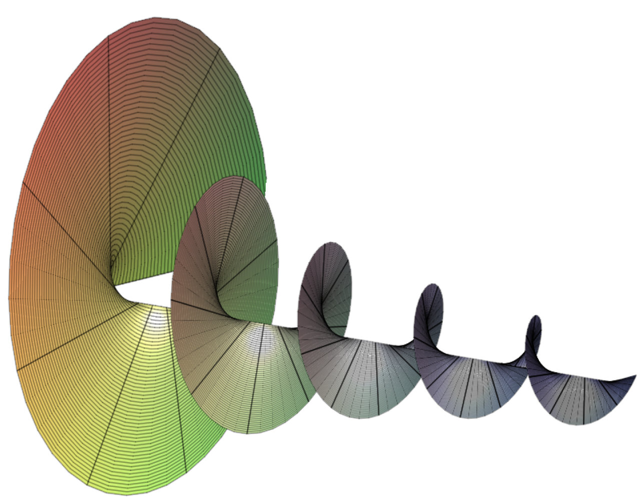
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas – Departamento de Matemática

Cálculo II

Resumen de conceptos y problemas resueltos



Sebastián Soto Rojas
Estudiante de Ingeniería Civil Electricista
(spsoto@uc.cl)

Este material se encuentra disponible de forma **gratuita** en la siguiente dirección:

http://web.ing.puc.cl/∼spsoto

Índice

Introducción

El presente texto nace como resultado de la compilación de las soluciones a las ayudantías realizadas durante la Temporada Académica de Verano 2014 del curso Cálculo II. Posteriormente estas fueron revisadas, corregidas y se agregaron los conceptos importantes del curso así como algunos problemas resueltos adicionales. Todo esto resulta en un texto de más de 300 páginas que trata de abordar todas las tipologías de problemas disponibles en el curso.

El curso Cálculo II es una miscelánea de tópicos relacionados con lo ya aprendido de cálculo en una variable, razón por la que si bien la densidad conceptual no es alta como en dicho curso, si existe una gran amplitud en cuanto a la tipología de problemas que se puede medir en una evaluación. Dado que el objetivo de este trabajo fue recopilar casi la totalidad de problemas disponibles, ello explica la extensión de este texto.

El libro cuenta con problemas recopilados de diversas fuentes −cada uno resuelto y explicado íntegramente por el autor de este trabajo−, entre ellas:

- Evaluaciones históricas del curso desde 2005.
- El texto guía del curso: J. Stewart, *Calculus: Early Trascendentals*, 7a edición.
- Ayudantías históricas del curso, entre ellas destacan el notable trabajo realizado por Sebastián Urrutia.
- Problemas disponibles en las evaluaciones y material de los cursos de Cálculo de MIT, todos disponibles en la plataforma MIT OpenCourseWare bajo licencia Creative Commons.
- Problemas de elaboración propia, principalmente aquellos de carácter conceptual.

Este texto tiene como única finalidad ser un **complemento** al estudio del curso y en ningún caso reemplaza al estudio conceptual que debe realizarse sistemáticamente en las cátedras y los textos guías.

El libro se encuentra en permanente revisión y corrección de detalles, razón por la cual cualquier observación, comentario y/o sugerencia se muy bien recibida en mi correo personal, spsoto@uc.cl. Finalmente, me gustaría agradecer a todos aquellos quienes revisaron el trabajo, en particular mientras estas fueron elaboradas en el TAV 2014. Mención especial merece Alessandro Valentini, quién se dio el trabajo de revisar gran parte de lo escrito en cada uno de los problemas.

Si eres alumno de Cálculo II actualmente y estas leyendo esto, te deseo el mejor de los éxitos del curso, y espero que este texto pueda serte de gran utilidad en tu estudio y desempeño en las evaluaciones.

Sebastián Soto R.
Julio de 2014

1. Aplicaciones de la integral

1.1. Repaso de técnicas de integración

En los próximos apartados realizaremos un uso intensivo de las técnicas de integración ya estudiadas, por lo cual es pertinente partir haciendo un repaso con las técnicas habituales y revisando algunas de las integrales más utilizadas.

Este apartado será relativamente breve, razón por la cual se aconseja revisar el capítulo completo de técnicas de integración del compilado de problemas resueltos de cálculo en una variable, no solo en este apartado si no a lo largo de todo el capítulo de aplicaciones de la integral.

Problema 1.1: Calcule las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x \arcsen(x)\, \mathrm{d}x$.

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+x^2}}$.

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi^2/16} \arctan\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$.

(d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{1+[f(x)]^2}$ si $f(x) = \dfrac{x-3}{2x}$.

(e) $\displaystyle\int \sec^3 x\, \mathrm{d}x$.

(f) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x$.

Solución:

(a) Una opción válida (dentro de las varias que pueden existir para calcular la misma integral) puede ser realizar la sustitución $u = \arcsen(x)$, de modo que se obtiene la integral:

$$\int x \arcsen(x)\, \mathrm{d}x = \int u \operatorname{sen}(u) \cos(u)\, \mathrm{d}u = F(u)$$

Sin embargo, al regresarnos a la variable original, x, tendremos que aplicar una serie de propiedades trigonométricas que pueden complicarnos al obtener la función deseada. Es por esta razón que aplicaremos directamente el método de integración por partes, notando que si bien x es fácil de derivar, la integraremos ya que $\arcsen(x)$ no es fácil de integrar de esta forma,

$$\begin{cases} u = \arcsen(x) & \rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \\ \mathrm{d}v = x & \rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Luego,

$$\int x \arcsen(x)\, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \arcsen(x) - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}}_{(1)}$$

Nos concentramos en calcular (1). En este caso, dada la naturaleza del denominador es conveniente aplicar la sustitución $x = \text{sen}(t) \to \mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t$. Con ello,

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\text{sen}^2(t)\cos(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\text{sen}^2(t)}} = \int \text{sen}^2(t)\mathrm{d}t$$

De la relación de coseno de la suma:

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \text{sen}^2(t) = 1 - \text{sen}^2(t)$$

Entonces:

$$\text{sen}^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(2t)}{4} + c \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} \int x \,\text{arcsen}\,(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\,\text{arcsen}(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(2t)}{4}\right) + c \\ &= \frac{x^2}{2}\,\text{arcsen}(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{arcsen}\ x}{2} - \frac{\text{sen arcsen}\ x\ \cos \text{arcsen}\ x}{2}\right) + c \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\int x\,\text{arcsen}\,(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\,\text{arcsen}(x) - \frac{1}{4}\left(\text{arcsen}\ x - x\sqrt{1-x^2}\right) + c}$$

(b) Observe que siempre en este tipos de expresiones en que aparece un polinomio cuadrático dentro de una raíz en el denominador conviene realizar el proceso de *completación de cuadrados* para obtener la sustitución adecuada. En este caso,

$$\begin{aligned} 4x + x^2 &= x^2 + 2\cdot 2x + 4 - 4 \\ &= (x+2)^2 - 4 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+2)^2 - 4}}$$

En este caso no se pueden utilizar la sustituciones trigonométricas ya que no existe forma sencilla de simplificar, por ejemplo, $\cos^2(x) - 1$ en la raíz. En este caso es conveniente realizar la sustitución con una función hiperbólica. En virtud de la identidad:

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2\, x = 1$$

Utilizamos la sustitución $x + 2 = 2\,\text{senh}\ t \to \mathrm{d}x = 2\cosh t\mathrm{d}t$. Es decir,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+x^2}} = \int \frac{2\cosh t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{\text{senh}^2\, t - 1}} = \int \mathrm{d}t \to \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+x^2}} = t + c$$

Pero de la sustitución empleada se tiene que: $t = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)$. Luego,

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right) + c}$$

(c) No hay nada que podamos hacer con la integral respecto a sustituciones. Sin embargo, recuerde el lector que la derivada de $\arctan(x)$ es $1/\left(1+x^2\right)$, la cual es una expresión fraccionar que sí es posible trabajar. Por esta razón es que probamos integrando por partes, de modo que:

$$\begin{cases} u = \arctan\left(\sqrt{x}\right) & \to \mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x} \\ \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \to v = x \end{cases}$$

De esta forma,

$$\int_0^{\pi^2/16} \arctan\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = x \arctan\left(\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^{\pi^2/16} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\pi^2/16} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x}}_{(1)}$$

En la expresión anterior nos "molesta" el hecho de que aparezca una raíz, razón por la cual probamos con la sustitución $t = \sqrt{x} \to \mathrm{d}t = \mathrm{d}x/2\sqrt{x} \to 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Es decir,

$$\int_0^{\pi^2/16} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x} = 2\int_0^{\pi/4} \frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int_0^{\pi/4} 1 - \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

La integración final resulta sencilla:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x} &= 2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(x)\Bigg|_0^{\pi/4}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \end{aligned}$$

Finalizamos:

$$\boxed{\int_0^{\pi^2/16} \arctan\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = 1 + \frac{\pi^2}{16}\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}}$$

(d) Parta por notar que la derivación de $f(x)$ y el cálculo de $f^2(x)$ convierte la expresión involucrada a integrar en una complicada desde el punto de vista algebraico. Puede evitarse todo este tedioso trabajo siendo ingeniosos en cuanto a la expresión involucrada.

Observe que aparece una función que contiene a $f(x)$ multiplicado por su derivada, $f'(x)$. Luego, aunque resulte una generalización algebraica, sigue siendo válido aplicar el teorema de sustitución:

$$u = f(x) \to \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Con ello,

$$\int_1^3 \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{1+[f(x)]^2} = \int_{f(1)}^{f(3)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

con $f(3) = 0$ y $f(1) = -1$. Luego, dado que la nueva primitiva es muy sencilla de calcular, tenemos que:

$$\int_1^3 \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{1 + [f(x)]^2} = \arctan(0) - \arctan(-1)$$

Es decir,

$$\boxed{\int_1^3 \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{1 + [f(x)]^2} = \frac{\pi}{4}}$$

(e) En las próximas aplicaciones de la integral que revisaremos, eventualmente aparecerá esta integral, por lo cual se recomienda saber calcularla. Tenemos que:

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\ \sec x\,\mathrm{d}x$$

Acá notamos que $\sec^2 x$ es fácil de integrar y $\sec x$ fácil de derivar. Hacemos entonces:

$$\begin{cases} u = \sec x & \rightarrow \mathrm{d}u = \tan x\ \sec x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sec^2 x\,\mathrm{d}x & \rightarrow v = \tan x \end{cases}$$

De esta forma,

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \sec x\ \tan x - \int \tan^2 x\ \sec x\,\mathrm{d}x$$

Pero $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, con lo cual si reemplazamos en la integrla de la derecha:

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \sec x\ \tan x - \int \sec^3 x - \sec x\,\mathrm{d}x$$

Es decir, reordenando la ecuación:

$$2\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \sec x\ \tan x + \int \sec x\,\mathrm{d}x$$

Y $\displaystyle\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\tan x + \sec x| + c$, con lo cual

$$\boxed{\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\tan x + \sec x| + \frac{1}{2}\sec x\ \tan x + c}$$

(f) Esta integral puede resolverse de dos formas. Revisaremos ambas:

Primera forma: Hacemos $x = \tan t \rightarrow \mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$. De esta forma,

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\tan^2 t}\ \sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \sec^3 t\,\mathrm{d}t$$

Ya vismo en el problema anterior como resolver esta integral. Luego,

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\tan t + \sec t| + \frac{1}{2}\sec t\ \tan t + c$$

Pero $t = \arctan x$, con lo cual

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + c}$$

recordando que $\sec \arctan x = \sqrt{1+x^2}$. Asimismo, el módulo es redundante, pues $\sqrt{1+x^2} > x$ por axiomática real, en el caso eventual de x fuese negativo.

Segunda forma: Hacemos $x = \operatorname{senh} t \to \mathrm{d}x = \cosh t\, \mathrm{d}t$. De esta forma,

$$\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t}\, \cosh t\, \mathrm{d}t$$

Recordando que $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, entonces la integral es igual a:

$$\cdots = \int \cosh^2 t\, \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \int e^{2t} + 2 + e^{-2t}\, \mathrm{d}t$$

Integrando termino a término:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) + 2t\right) + c \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cosh t\, \operatorname{senh} t + c \end{aligned}$$

donde notamos que $2 \operatorname{senh} x\, \cosh x = 2 \operatorname{senh} 2x$. Volver aquí a la variable original resulta sustancialmente más tedioso. Esto se debe a que:

$$t = \operatorname{senh}^{-1} x$$

Recordamos que:

$$\operatorname{senh} x = y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \to 2y = e^x - e^{-x} \; / \times e^x \to e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Haciendo $u = e^x$ obtenemos la ecuación cuadrática:

$$u^2 - 2yu - 1 = 0 \to u = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Dado que $u \geq 0$ (no es difícil demostrar esto), entonces nos quedamos solo con la rama positiva, i.e.

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \to x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Es decir, $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Reemplazando en la expresión que obtuvimos para la primitiva:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{senh} \operatorname{senh}^{-1} x\, \cosh \operatorname{senh} x + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}x\, \cosh \operatorname{senh}^{-1} x + c \end{aligned}$$

Para simplificar la última expresión notamos que:

$$\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1 \to \cosh^2 \operatorname{senh}^{-1} x - \operatorname{senh}^2 \operatorname{senh}^{-1} x = 1$$

De esta forma,

$$\cosh^2 \operatorname{senh}^{-1} x - x^2 = 1 \to \cosh \operatorname{senh}^{-1} x = \sqrt{1+x^2}$$

donde nos quedamos con la rama positiva pues el coseno hiperbólico es una función siempre positiva. Finalmente,

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + c}$$

1.2. Cálculo de áreas

La primera aplicación básica de la integración es el cálculo de áreas, pues en efecto es la motivación conceptual para el cálculo de integrales. Sin embargo, las dificultades nuevas que así surgen guardan relación con encontrar la integral adecuada dada una región en particular, o bien escoger el eje de integración adecuado para que sea en efecto posible calcular la integral.

La estrategia general para este tipo de problemas es:

- **Paso crítico:** Determinar la región a la cual se le desea calcular el área, para así poder plantear correctamente la integral y los extremos de esta.
- **Escribir la integral:** Usar la relación

  $$A_{\text{total}} = \int \mathrm{d}A \quad \text{con } \mathrm{d}A = |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$$

  donde el módulo mide la distancia del extremo inferior al superior y se toma el módulo para obtener una cantidad siempre positiva (el área de cualquier figura lo es).

  > **¡Ojo!** En este paso es importante determinar la conveniencia de integrar en el eje x o en el eje y así como determinar adecuadamente los intervalos de integración, debido a que de no realizarse el procedimiento completo es erróneo, inclusive si las técnicas de integración son correctas.
  >
  > Suerte similar correrán casi todos los problemas de aplicaciones de la integral que veremos en las próximas secciones.

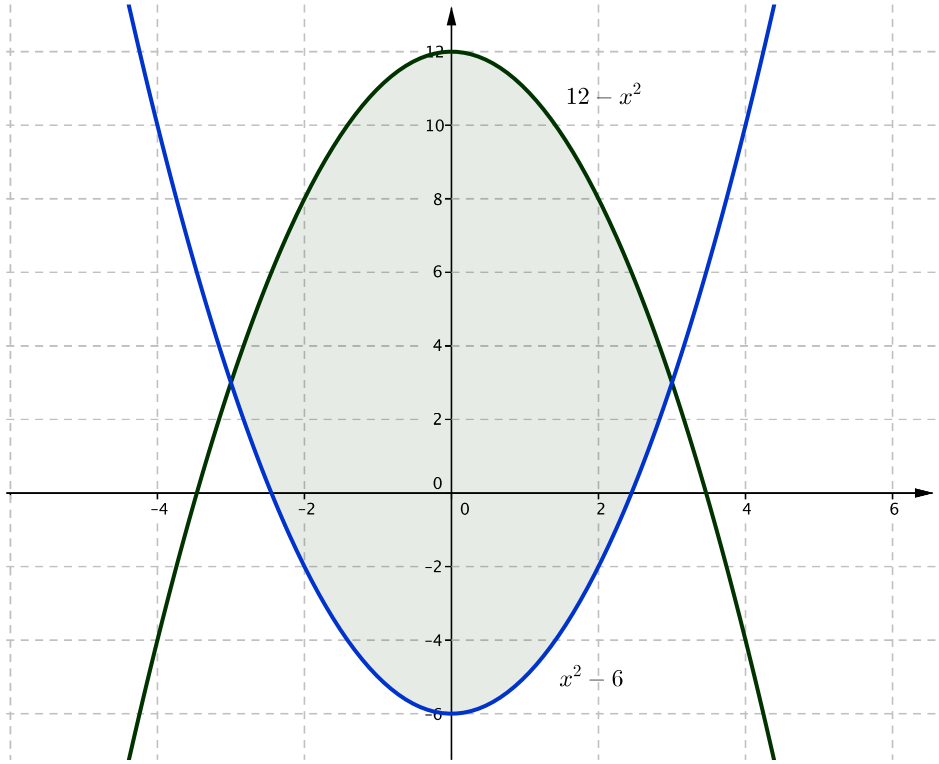
- **Calcular la integral:** Mediante las técnicas de integración adecuadas.

Esta será la estrategia que usaremos en todos los siguientes problemas. Una forma sencilla de verificar que nuestros resultados estén correctos consiste en ver si el resultado es efectivamente positivo, ya que al tratarse de magnitudes geométricas, no hay lugar para resultados negativos (y tampoco nulos en la mayoría de los casos).

Problema 1.2: Dibuje la región acotada y delimitada por las curvas $y = 12 - x^2$ e $y = x^2 - 6$. Luego, calcule el área de la región.

Solución:

Notando que ambas funciones son parábolas con vértice en $x = 0$, una con concavidad hacia arriba y otra con concavidad hacia abajo, graficar es sencillo:



Es decir, por arriba en la integración se ubica la curva $12 - x^2$ y por abajo la curva $x^2 - 6$. Para integrar debemos integrar entre ambas coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas. Por lo tanto, igualamos:

$$12 - x^2 = x^2 - 6 \to x^2 = 9 \to x = \pm 3$$

Escribiendo la integral,

$$A = \int_{-3}^{3} 12 - x^2 - x^2 + 6 \, \mathrm{d}x$$

Calculando mediante integración polinomial,

$$\boxed{A = 72}$$

Problema 1.3:

(a) Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, su tangente en el punto $x = 3$ y el eje Y.

(b) Calcule el área de la región $\mathcal{R}$ definida por

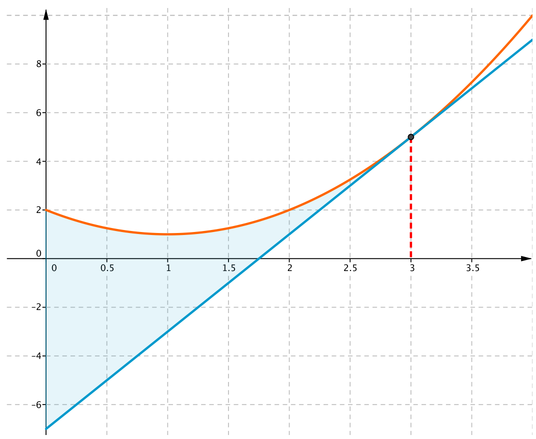
$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq \cos x, \ y \geq \operatorname{sen} x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ y \geq 0\right\}$$

Solución:

(a) En este caso, lo primero que debemos hacer es graficar las relaciones involucradas. Como:

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

Entonces identificar $\mathcal{R}$ resulta sencillo a partir del gráfico:



Luego, calculamos la recta tangente a partir de la ecuación geométrica de la recta tangente:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0) \rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Reemplazando con $x_0 = 3$, $f'(3) = 4$ e $y_0 = 5$, entonces la ecuación de la recta tangente es:

$$y_{\tan} = 4x - 7$$

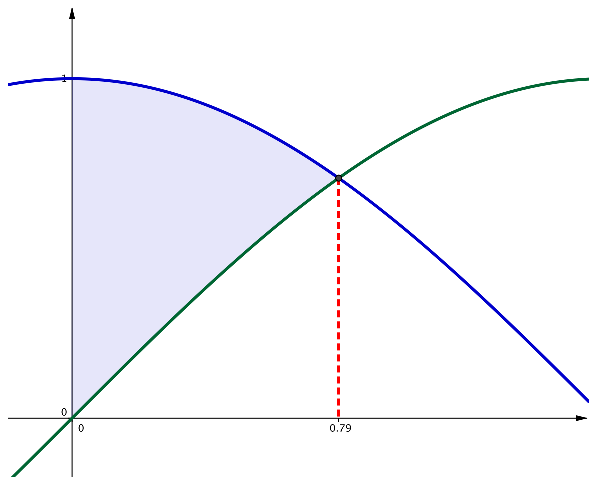
Luego, del gráfico se observa que:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 \left[(x-1)^2 + 1 - 4x + 7\right] \mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{(x-1)^3}{3}\right|_0^3 + 24 - 18 \\ &= \frac{8}{3} + 6 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{A = 9} \geq 0$$

(b) Nuevamente graficamos la región (coseno en rojo, seno en azul), la cual es fácilmente identificable a partir de las restricciones impuestas. Observe que si no se impone que $x \leq \pi/4$ ya que dada la periodicidad de seno y coseno se repiten periódicamente conjuntos que cumplen todas las restricciones.



Luego, se sigue que:

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos x - \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

donde $\pi/4$ se obtiene de resolver la ecuación $\cos x = \operatorname{sen} x$. Calculando,

$$A = \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/4} + \cos x \Big|_0^{\pi/4}$$

$$\to \boxed{A = \sqrt{2} - 1} \geq 0$$

En el siguiente problema revisaremos la ventaja de integrar en un eje con respecto a hacerlo en otro.

Problema 1.4: Calcule el área encerrada entre las curvas $y^2 = x$, $y = \dfrac{1}{2}(x-3)$ en $[0, 9]$.

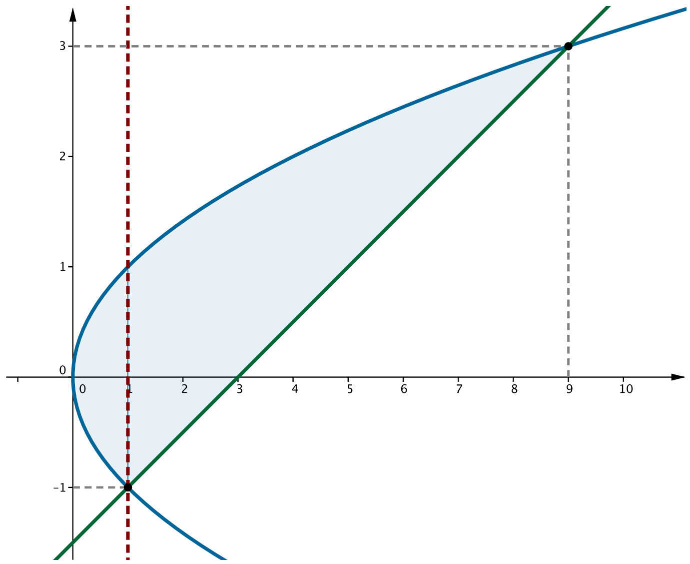
(a) integrando en el eje x.

(b) integrando en el eje y.

Comente sus resultados y la metodología empleada.

Solución:

Grafiquemos la región, pues tendremos que usarla en ambos problemas.



(a) Observe que si integramos en x, entonces los diferenciales de área son $\mathrm{d}A = (y_2 - y_1)\,\mathrm{d}x$. En este caso, antes de la línea roja el extremo superior corresponde a $\sqrt{x}$ al despejar la parábola y el inferior a $-\sqrt{x}$ al despejar la rama inferior. Sin embargo, después de la línea roja pasamos a la recta como extremo inferior, por lo cual necesariamente al integrar en este eje tendremos que escribir dos integrales.

Buscamos la intersección de ambas curvas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y^2 & = x \\ \\ y & = \dfrac{1}{2}(x-3) \end{cases}$$

Elevamos al cuadrado la segunda ecuación e igualamos las componentes y:

$$x = \frac{1}{4}(x-3)^2 \to 4x = x^2 - 6x + 9 \to x^2 - 10x + 9 = 0$$

Factorizando obtenemos que $(x-9)(x-1) = 0$, de donde obtenemos $x = 1$ y $x = 9$. Observamos de la gráfica anterior que el punto de utilidad es el menor, $x = 1$. Luego, escribimos la integral:

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - \left(-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x + \int_1^9 \sqrt{x} - \frac{1}{2}(x-3)\,\mathrm{d}x$$

donde integramos hasta 9 pues del gráfico se deduce que aquí termina el área. El área anterior se resuelve mediante simple integración polinomial, obteniendo así:

$$\boxed{A = \frac{32}{3}}$$

(b) Ahora los diferenciales de área corresponderán a $\mathrm{d}A = (x_2 - x_1)\,\mathrm{d}y$ donde deberemos despejar x en función de y. Cabe observar adicionalmente que ahora en todo el intervalo el extremo inferior es la parábola y el superior la recta, por lo cual solo será necesario escribir una integral.

Luego, la parábola ya está en la forma x en función de y. Para la recta hacemos un simple despeje algebraico:

$$y = \frac{1}{2}(x-3) \rightarrow x = 2y+3$$

Los extremos de integración serán ahora de $y=-1$ (reemplazando $x=1$ en cualquiera de las dos funciones) hasta $y=3$. De esta forma,

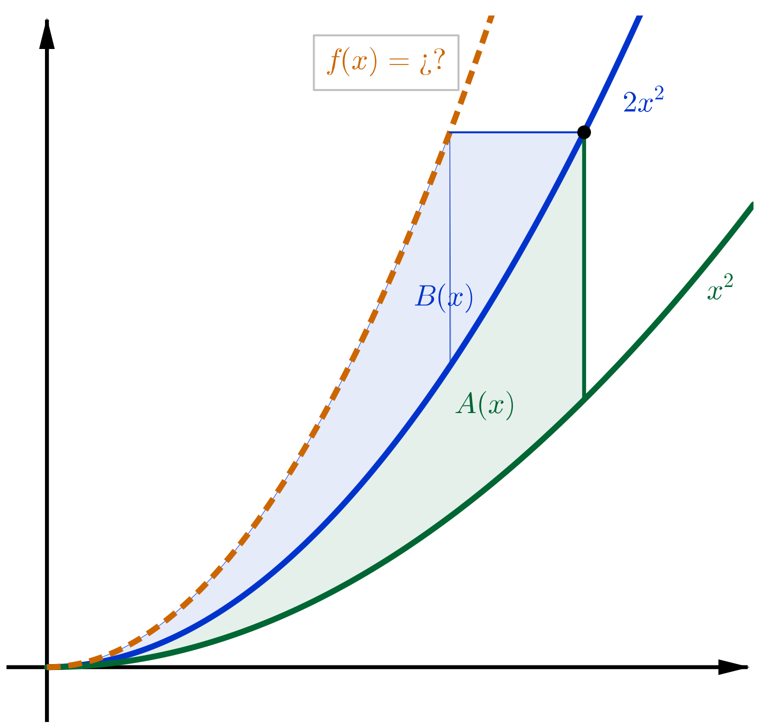
$$A = \int_{-1}^{3} 2y + 3 - y^2 \, \mathrm{d}y$$

Realizando la integración polinomial nuevamente obtenemos:

$$\boxed{A = \frac{32}{3}}$$

Este es un caso bastante simplificado, pero se comprueba que claramente puede resultar mucho más sencillo integrar en un eje que en otro, pues se requiere hacer menos despejes algebraicos y/o escribir una menor cantidad de integrales para expresar el área. No existe receta para esto, pues depende de cada problema, pero se hace evidente la necesidad de graficar siempre la región de integración para poder determinar cómo escribir de forma sencilla las integrales involucradas.

Problema 1.5: La figura siguiente muestra una curva $y=f(x)$ tal que para todo punto P, el área contenida en A y B son iguales. Determine $f(x)$.



Solución:

Sea $P = (x, f(x))$. Es evidente que en el problema deberá cumplirse que:

$$A(x) = B(x)$$

Entonces, calcularemos las áreas $A(x)$ y $B(x)$ como integrales cuyos extremos dependen de x. Es evidente que la integral de $B(x)$ contendrá implícitamente a $f(x)$. Luego, derivando por T.F.C. eliminamos las integrales y obtendremos una expresión algebraica de la cual despejar $f(x)$. Sigamos este procedimiento entonces.

Partamos por calcular $A(x)$, lo cual es prácticamente directo ya que es el área entre x^2 y $2x^2$ de 0 a x. Es decir,

$$A(x) = \int_0^x 2t^2 - t^2 \mathrm{d}t = \int_0^x t^2 \mathrm{d}t$$

Por otra parte, observe que la integral de $B(x)$ en el eje x resulta complicada de calcular, ya que debemos separar la integral en dos: una entre $2x^2$ y $f(x)$ y la siguiente entre la altura de intersección e $y = 2x^2$. El punto de intersección viene de despejar una ecuación algebraica para $f(x)$, razón por la cual concluimos que calcular la integral en el eje eje x resulta tedioso.

Esto no es así en el eje y para $B(x)$, ya que resulta un área tan fácil de calcular como en el caso de $A(x)$. Tenemos que:

$$B(x) = \int_0^{2x^2} \sqrt{\frac{t}{2}} - f^{-1}(t)\, \mathrm{d}t$$

Observe que en el eje y fue necesario tomar las inversas de las funciones $2t^2$ y $f^{-1}(t)$ respectivamente. Luego, deberá cumplirse que:

$$A(x) = B(x) \to \int_0^x t^2 \mathrm{d}t = \int_0^{2x^2} \sqrt{\frac{t}{2}} - f^{-1}(t)\, \mathrm{d}t$$

Derivando haciendo uso del T.F.C:

$$x^2 = \left[\sqrt{\frac{2x^2}{2}} - f^{-1}\left(2x^2\right)\right] 4x$$

Como esto debe cumplirse para todo x, no solo en particular para $x = 0$, podemos despejar las x sin ningún problema, obteniendo así:

$$f^{-1}\left(2x^2\right) = \frac{3x}{4}$$

Hacemos la sustitución $y = 2x^2 \to x = \sqrt{y/2}$ ya que estamos trabajando en el primer cuadrante. Con ello,

$$f^{-1}(y) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{y}{2}}$$

La inversa de la inversa, la función original, resulta sencilla de calcular en este caso, obteniendo así:

$$\boxed{f(x) = \frac{32}{9}x^2}$$

Decimos entonces, al dividir en área iguales, que $y = 2x^2$ es *bisectriz* de $f(x)$ y x^2.

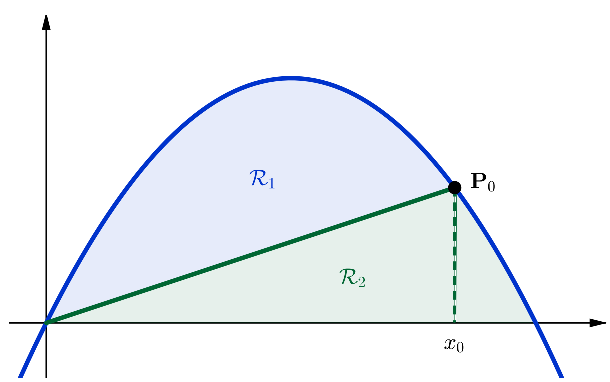
Problema 1.6: Considere la función $f(x) = 2x - x^2$ y la región $\mathcal{R}$ definida por

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Determine un punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, f(x_0))$ en el gráfico de f, de modo que la recta que une el origen con $\mathbf{P}_0$ divida $\mathcal{R}$ en dos regiones con la misma área.

Solución:

Partamos graficando la situación por la cual se pregunta, identificando apropiadamente las regiones a partir de la definición para un $\mathbf{P}_0$ cualquiera:



Notamos que la recta pasa por el origen, por lo cual tiene la forma $y = mx$. La pendiente deberá ser entonces:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0)}{x_0} \to y = \frac{2x_0 - x_0^2}{x_0} x = (2 - x_0)\, x$$

Luego, evaluando las integrales adecuadamente, para obtener el área de cada región:

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}_1) &= \int_0^{x_0} \left(2x - x^2\right) - (2 - x_0)\, x \, \mathrm{d}x = \frac{x_0^3}{6} \\ A(\mathcal{R}_2) &= \int_0^{x_0} (2 - x_0)\, x \, \mathrm{d}x + \int_{x_0}^{2} 2x - x^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{x_0^3}{6} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

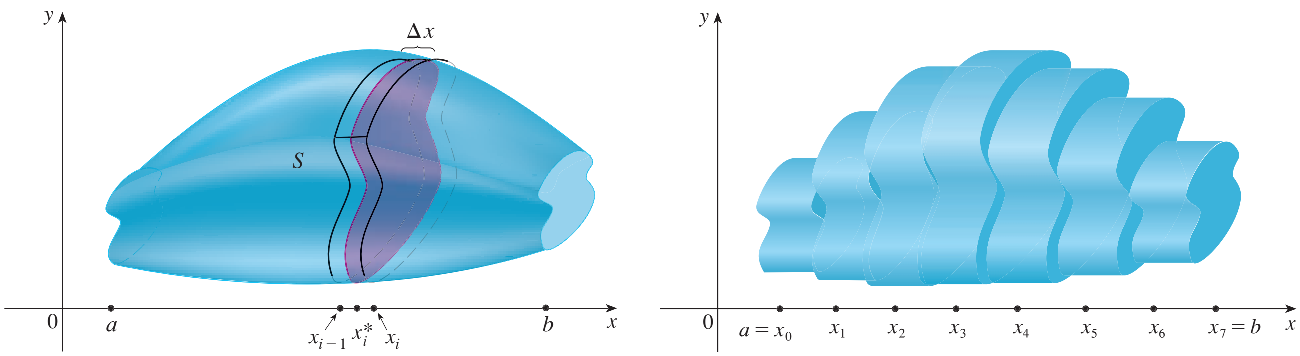
El x_0 que buscamos deberá cumplir que $A(\mathcal{R}_1) = A(\mathcal{R}_2)$. Es decir,

$$\frac{x_0^3}{6} = -\frac{x_0^3}{6} + \frac{4}{3} \to \boxed{x_0 = \sqrt[3]{4}}$$

Es decir, $\boxed{\mathbf{P}_0 = \left(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4}\right)}$.

1.3. Cálculo de volúmenes

Dado un sólido de forma arbitraria, tenemos como motivación calcular su volumen. Consideremos la siguiente figura:



Observe que si cortamos con un cuchillo una rebanada del sólido de la izquierda, obtendremos una rebanada con un espesor Δx y un volumen total ΔV. Es directo que en este caso la suma de cada ΔV nos entrega el volumen total del sólido. En otras palabras, si cortamos n rebanadas:

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

A partir del mismo gráfico de la figura izquierda es fácil notar que el área de la sección de la rebanada depende de x. Es decir, $A = A(x)$.

Una buena aproximación del volumen de cada rebanada puede ser tomar el área de la rebanada en un x_i^* entre x_{i-1} y x_i y multiplicar este área por el espesor de la rebanada. Es decir,

$$\Delta V_k \approx A(x_k^*)\,\Delta x$$

Al hacer la cantidad de rebanadas cortadas tender a infinito, tendremos que $x_k^* \to x_k$ y que $\Delta x \to 0$, por lo que la suma de los ΔV_k se convierte en una integral que nos entrega el volumen exacto del sólido. Es decir,

$$\Delta V_k \approx A(x_k^*)\,\Delta x \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

Sumando desde a hasta b:

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x}$$

Que es la fórmula general para el cálculo de volúmenes integrando en un eje, con el área de la sección dependiendo de dicho eje.

En los próximos problemas el objetivo es hacer la aplicación de estos conceptos, por lo cual el procedimiento recomendado en general es el siguiente:

- Tratar de imaginarse el sólido descrito en el problema.
- Reconocer en qué eje es conveniente "cortar rebanadas". Este es habitualmente aquel eje donde el área de cada sección de la rebanada es fácil de calcular.

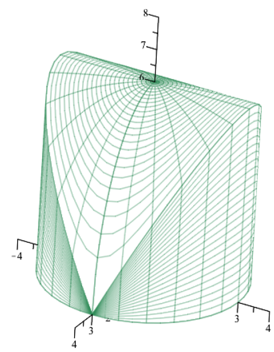
- Establecer la función $A(x)$ en dicho eje de integración.
- Calcular la integral.

Es muy importante realizar el primer y segundo caso adecuadamente, pues de ellos dependen que la totalidad del problema esté correctamente desarrollado.

Problema 1.7: Un sólido consiste en una base circular de diámetro $\overline{AB} = 2a$ y las secciones transversales perpendiculares a $\overline{AB}$ son cuadrados. Determine el volumen del sólido.

Solución:

Una buena idea es intentar partir por graficar el sólido siguiendo las especificaciones: base circular y regiones cuadradas. Se debiese obtener un sólido como el de la figura siguiente: (en este caso, $a = 3$)



Observe que para x dado tenemos que:

$$A(x) = (2y)^2$$

donde $y = y(x)$ viene dada por la ecuación básica de la circunferencia, i.e. $x^2+y^2 = a^2 \to y^2 = a^2-x^2$. Reemplazando,

$$A(x) = 4\left(a^2 - x^2\right)$$

Finalmente, integramos por la relación:

$$V = \int \mathrm{d}V = \int A(x)\,\mathrm{d}x$$

En este caso,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} 4\left(a^2 - x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= 8\int_{0}^{a} \left(a^2 - x^2\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Evaluando,

$$V = 8a^3 - \frac{8}{3}a^3 \to \boxed{V = \frac{16a^3}{3}}$$

Problema 1.8:

(a) Calcule el volumen del sólido cuya base es la región

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1 \wedge -\operatorname{senh}(x) \leq y \leq \cosh(x)\right\}$$

y cuyas secciones transversales al eje OX son cuadradas.

(b) La base de un sólido Ω es la región encerrada por la parábola $y = 1 - x^2$ y el eje x. Las secciones perpendiculares al eje y son cuadrados. Calcule el volumen de Ω.

Solución:

(a) Independiente de la forma que tenga la región (algo que puede complicarnos si es que no recordamos la forma de las curvas hiperbólicas), lo que sí tenemos que tener claro es cómo será la integración en este minuto. En este caso, integraremos haciendo uso de rebanadas de área $A = A(x)$. Como se trata de secciones transversales al eje OX cuadradas, entonces,

$$A(x) = \ell^2(x)$$

donde $\ell(x)$ es el largo del cuadrado. En este caso,

$$\ell(x) = \cosh(x) + \operatorname{senh}(x) = e^x \leftarrow \text{definición de f. hiperbólicas}$$

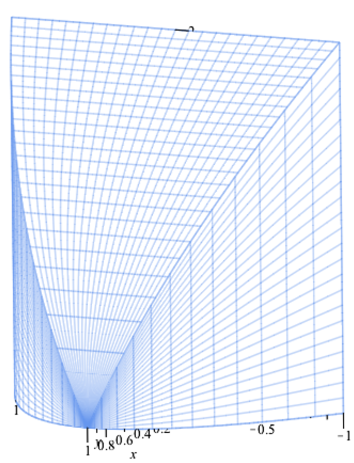
Es decir,

$$\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$$

Integrando,

$$V = \int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) \to \boxed{V = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)}$$

(b) En este caso la región es sencilla de imaginar. Luego, proyectando las secciones cuadradas obtenemos un sólido como el siguiente:



Observe que podemos aplicar nuevamente el método de las rebanadas. En este caso,

$$\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}y$$

ya que ahora las secciones son transversales al eje y. Luego, el área del cuadrado viene dada por:

$$A(x) = (2x)^2 \to A(x) = 4x^2\,\mathrm{d}y$$

Es decir,

$$\mathrm{d}V = 4x^2\,\mathrm{d}y$$

Aquí tenemos dos opciones igualmente válidas: (1) hacemos $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ con $1 - x^2 = f(x)$ o bien (2) observamos que:

$$1 - x^2 = y \to x^2 = 1 - y$$

Haremos lo segundo, teniendo así que:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 4(1-y)\mathrm{d}y \\ &= 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

(ojo con los extremos de integración: aquí estamos integrando en y). Finalmente, $\boxed{V = 4}$.

Problema 1.9: [**Propuesto**] Calcule el volumen de intersección de los cilindros:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \left\{(x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\right\} \\ \mathcal{C}_2 &= \left\{(x,y,z) \,:\, x^2 + z^2 \leq 1\right\} \end{aligned}$$

1.4. Sólidos de revolución

Los sólidos de revolución son sólidos generados al rotar una región plana en torno a un eje. Ejemplos típicos de ellos son el cono, el cilindro e incluso la esfera.

En este apartado calcularemos el volumen de sólidos de revolución un poco más generales. A partir de lo estudiado en el apartado anterior se puede notar que los sólidos de revolución son un caso particular del cálculo de volúmenes.

Considerando una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, deseamos calcular el volumen de revolución generado al rotar la curva en torno al eje x. Imaginándonos el sólido generado en este caso, podemos notar que al tomar una rebanada transversal al eje x, esta corresponderá a una circunferencia de radio $f(x)$. Es decir,

$$A(x) = \pi f^2(x)$$

Luego, integrando a partir de la fórmula revisada anteriormente,

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

Si deseamos realizar el mismo procedimiento en torno al eje y, notamos que una rebanada transversal al eje y será una circunferencia de radio x. Luego,

$$\boxed{V_{y,r} = \pi \int_{y_1}^{y_2} x\left(y\right) \mathrm{d}y}$$

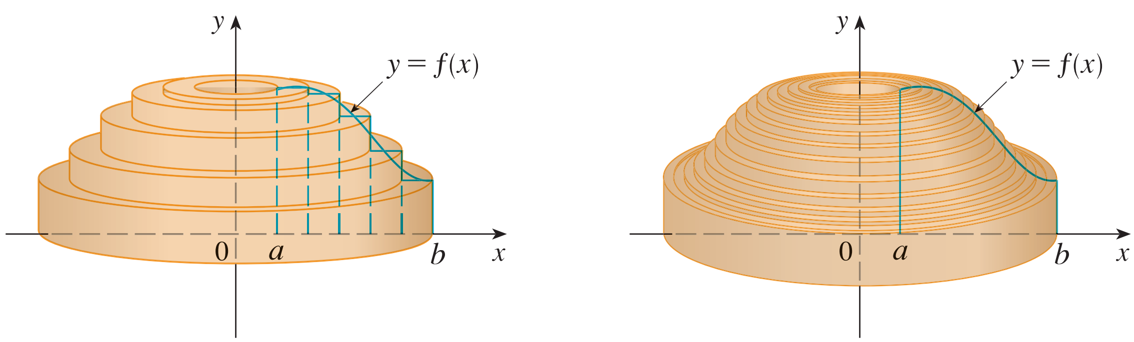
En muchos casos disponemos de la función $y = f\left(x\right)$ y puede resultar complicado obtener su inversa $x\left(y\right) = f^{-1}\left(y\right)$ por los procedimientos algebraicos que ello involucra. En dicho caso, podemos notar que de la ecuación anterior,

$$\mathrm{d}y = f'\left(x\right) \mathrm{d}x$$

Luego,

$$\boxed{V_{y,r} = \pi \int_{x_1}^{x_2} x f'\left(x\right) \mathrm{d}x}$$

la cual sirve exclusivamente cuando f es inyectiva. Cuando la función no es inyectiva podemos usar un tercer método denominado el **método de los casquetes cilíndricos**. Consideremos el sólido a la derecha de la siguiente figura:



En azul se puede ver la función $f\left(x\right)$ que al ser rotada en torno al eje y genera el sólido descrito en la figura. Otra forma válida de obtener el volumen generado es dividir el sólido en cascarones como los de la figura a la izquierda.

Cada uno de estos cascarones puede abrirse, obteniendo un rectágulo de alto $f\left(x\right)$ y ancho $2\pi x$, el perímetro del anillo que se revoluciona en torno al eje y. Asimismo, el cascarón tiene espesor Δx, razón por la cual el volumen de cada cascarón puede estimarse como:

$$\Delta V = 2\pi x f\left(x\right) \Delta x$$

Al hacer la cantidad de cascarones cortados tender a infinito, tendremos que $\Delta x \to \mathrm{d}x$ y $\Delta V \to \mathrm{d}V$. Es decir, simbólicamente se tendrá que:

$$\mathrm{d}V = 2\pi x f\left(x\right) \mathrm{d}x$$

Integrando estos diferenciales obtenemos el volumen total generado por cascarones cilíndricos:

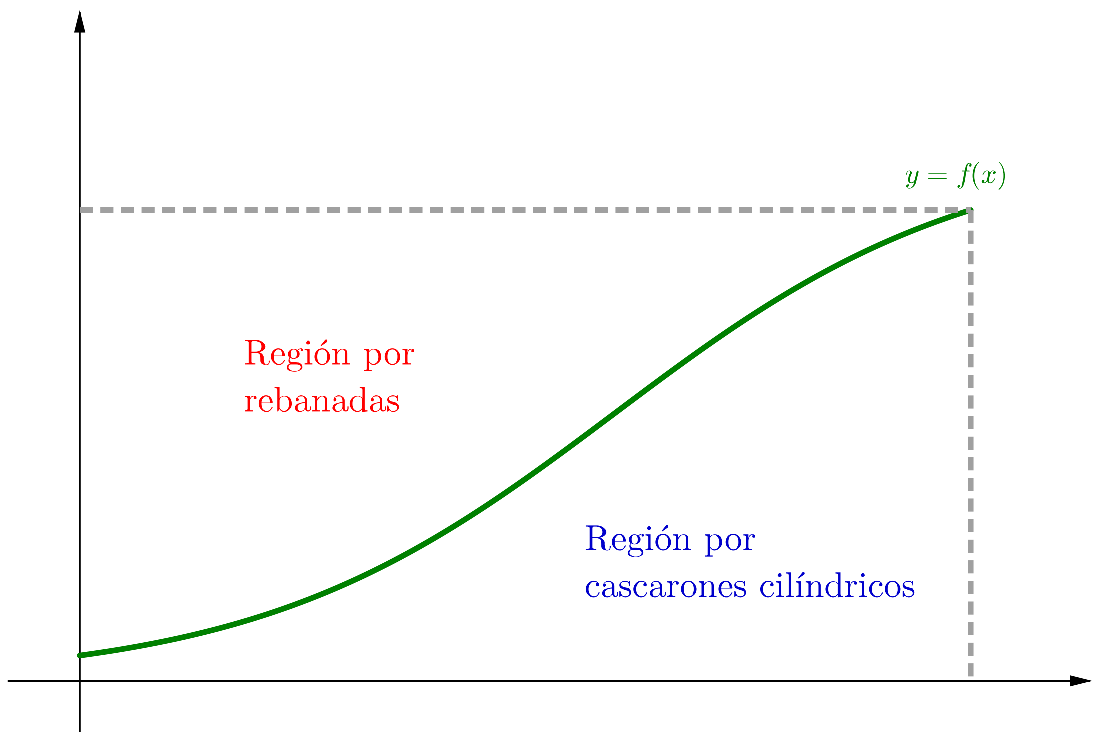
$$\boxed{V_{y,c} = 2\pi \int_a^b x f\left(x\right) \mathrm{d}x}$$

Antes de comenzar a resolver problemas, deben realizarse dos comentarios:

- Para medir el volumen de revolución generado por la región entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ con $f(x) > g(x)$ entonces las fórmulas pueden corregirse como sigue:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x)\, \mathrm{d}x\,;\; V_{y,r} = \pi \int_{y_1}^{y_2} (x_2(y) - x_1(y))\, \mathrm{d}y\,;\; V_{y,c} = 2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x$$

- El volumen en torno al eje y generado por rebanadas **no es el mismo** que el volumen generado por cascarones. Estudiando en detalle las fórmulas se puede concluir que para una función $f(x)$ arbitraria la región que se rota en torno al eje y en cada caso queda correctamente descrita en la siguiente figura:



Nuevamente, el procedimiento es similar al ya descrito en otras secciones: identificar adecuadamente la región de integración, escoger la fórmula de volumen adecuada y el eje de integración pertienente, escribir la integral con los límites de integración correctos y finalmente calcular la integral.

Suele ser habitual que las integrales aquí expresadas no son de resolución compleja, pues el énfasis pedagógico de este tipo de preguntas busca medir que la integral que expresa el volumen sea correcta.

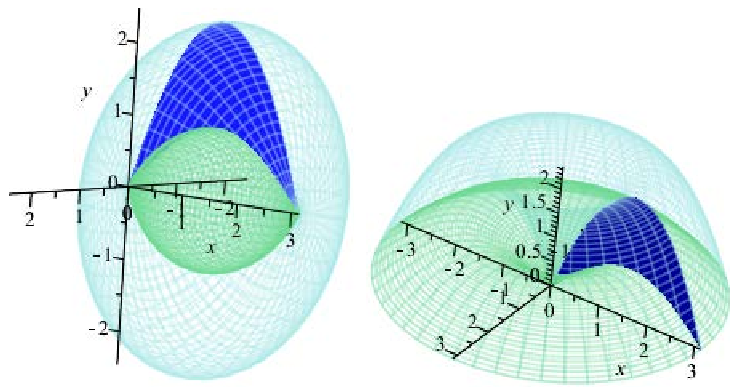
Problema 1.10: Considere las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$. Para la región $\mathcal{R}$ del primer cuadrante definida por

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,\pi] \wedge y \in [f(x), g(x)]\right\}$$

Calcular el área de $\mathcal{R}$ y calcular los volúmenes de los sólidos generados por la rotación de $\mathcal{R}$ en torno al eje OX y en torno al eje OY.

Solución:

Se grafica $\mathcal{R}$ y los sólidos generados al revolucionar en torno al eje x y al eje y respectivamente. La tapa superior se marca en turquesa y la tapa inferior en color verde:



El enunciado es directo en cuanto a cómo tenemos que calcular el área de la región $\mathcal{R}$: $f(x)$ por abajo y $g(x)$ por arriba. Como no tenemos problemas con las curvas, integramos en todo el dominio: de 0 a π. Es decir,

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{R}} &= \int_0^{\pi} \pi x - x^2 - \operatorname{sen}(x)\, dx \\ &= \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} + \cos(x)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^3}{6} - 1 - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \; \boxed{A_{\mathcal{R}} = \frac{\pi^3}{6} - 2}$$

El volumen en torno al eje x se calcula por simple superposición:

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \left[\left(\pi x - x^2\right)^2 - \operatorname{sen}^2(x) \right] dx$$

Esta integral, si bien es extensa, su cálculo es prácticamente directo si consideramos que $\operatorname{sen}^2(x) = [1 - \cos(2x)]/2$. Con ello,

$$\boxed{V_x = \frac{\pi^2}{30}\left(\pi^4 - 15\right)}$$

Por otra parte, para calcular el volumen en el eje x, debemos notar que ya no podemos hacerlo por la fórmula directa ya que ninguna de las dos funciones es inyectiva. Por esta razón debemos utilizar el método de los cascarones cilíndricos. Esto es, consideramos cilindros perpendiculares al eje x, cada uno tiene su altura determinada por la diferencia de alturas entre las curvas y su espesor por un diferencial de espesor dx. Es esperable que la suma de estos cascarones de el volumen completo en torno al eje y. Es decir,

$$\begin{aligned} dV &= \text{área cascarón} \times \text{espesor} \\ &= 2\pi x \left[g(x) - f(x)\right] dx \end{aligned}$$

Con ello,

$$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x \left[\pi x - x^2 - \operatorname{sen}(x)\right] dx$$

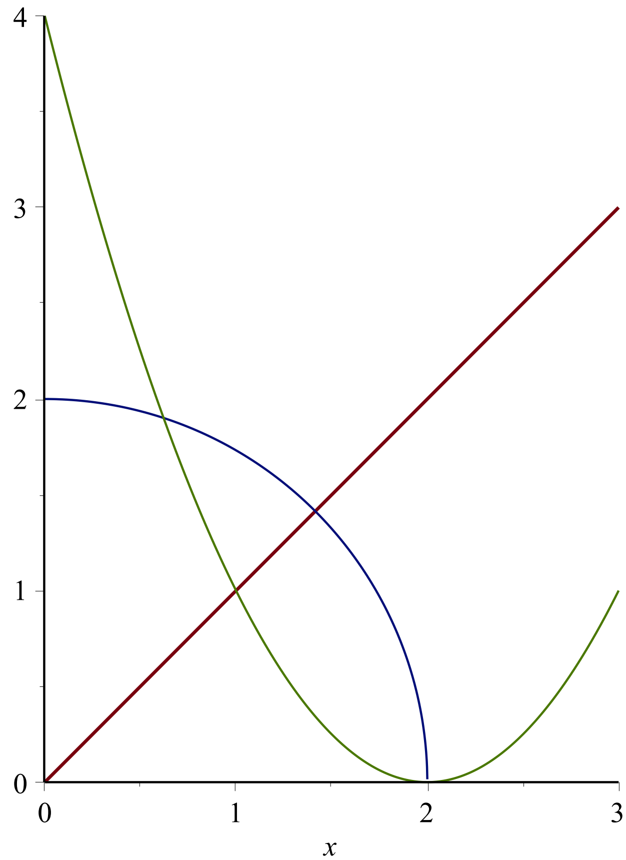
Esta integral también es de cálculo directo. Para integrar $x \operatorname{sen}(x)$ solo es necesario hacer integración por partes. De esta forma,

$$\boxed{V_y = \frac{\pi^5}{6} - 2\pi^2}$$

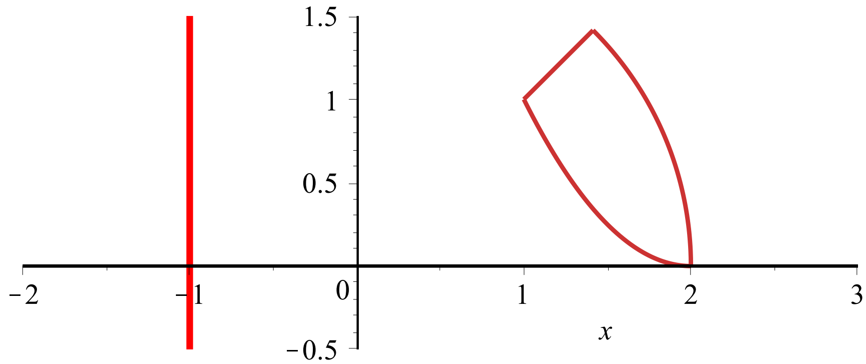
Problema 1.11: Escriba la integral que permite obtener el volumen del sólido de revolución generado al obtener rotar la región encerrada por las restricciones $y \leq x$, $y \leq \sqrt{4 - x^2}$ e $y \geq (x-2)^2$ en torno al eje $x = -1$. **No calcule.**

Solución:

Nuevamente, lo primero que partimos por graficar es la región de integración. En este caso, tanto la primera como la tercera restricción son sencillas de graficar. La segunda restricción es el interior del semicírculo de radio 2 con $y \geq 0$.



Luego, es identificamos correctamente la región en cuestión junto al eje de rotación:



Los puntos de intersección en cuestión los obtenemos intersectando las curvas:

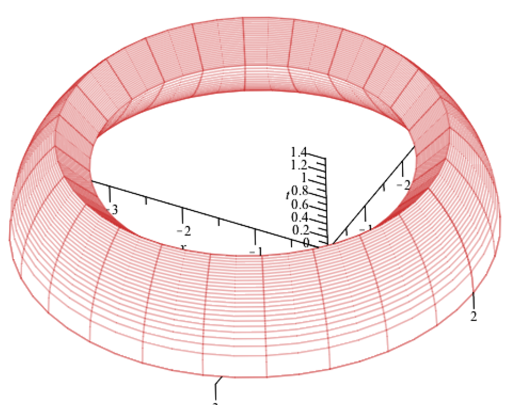
$$x = \sqrt{4 - x^2} \to 2x^2 = 4 \to x = \pm\sqrt{2} \to \boxed{x = \sqrt{2}}$$

$$x = (x-2)^2 \to= x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) = 0 \to \boxed{x = 1}$$

Para efectos prácticos la función del tramo superior es:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq \sqrt{2} \\ \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

la cual es inmediatamente una función no inyectiva. Esto, en conjunto al sólido que esperamos obtener, que se muestra a continuación:



Nos hacen concluir que debemos utilizar el método de los casquetes cilíndricos. Se requiere aplicar una modificación, que viene del hecho de que ya no estamos trabajando con el eje Y, sino que con el eje paralelo $x = -1$. Por lo tanto, recordamos la fórmula de los casquetes cilíndricos:

$$V = 2\pi \int_a^b x \left[f(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x$$

Analizamos elemento a elemento:

- dx representa el espesor del cascarón.
- $f(x)-g(x)$ representa la altura del manto cilíndrico.
- x representa el radio del cilindro.

Observe que en el contexto de este problema lo único que cambia es el radio del cilindro, ya que estamos midiendo el radio a una unidad más lejos que x. Por lo tanto, la nueva fórmula a utilizar en este caso consiste en:

$$\tilde{V}=2\pi\int_a^b(x+1)\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$$

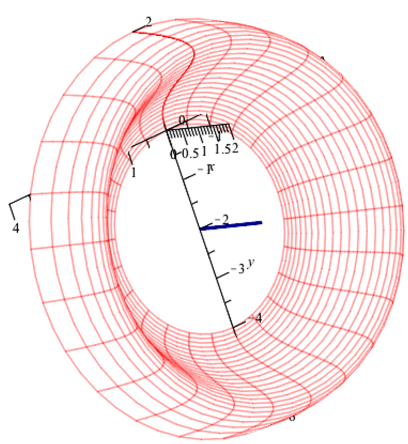
Como $f(x)$ tal como la definimos más arriba es una función a tramos en este caso, debemos separar la fórmula de la integral en los dos tramos correspondientes, en los cuales cambia la forma en que se mide la altura del casquete cilíndrico. De esta forma, terminamos el problema utilizando la fórmula anterior con las funciones involucradas:

$$\boxed{V_{x=-1}=2\pi\int_1^{\sqrt{2}}(x+1)\left[x-(x-2)^2\right]\mathrm{d}x+2\pi\int_{\sqrt{2}}^2(x+1)\left[\sqrt{4-x^2}-(x-2)^2\right]\mathrm{d}x}$$

Problema 1.12: Utilizando capas cilíndricas, calcular el volumen de revolución que se consigue al rotar la porción de plano del primer cuadrante encerrada por las curvas de ecuaciones $x=0$ y $x=2y^3-y^4$ en torno a la recta de ecuación $y=-2$.

Solución:

La región de revolución (en rojo) junto al sólido generado al revolucionarla en torno al eje $y=-2$ (paralelo a x) corresponde a:



Para obtener la región basta notar que $x=y^3\left(2-y\right)$ y tomamos una tabla de signos en $y=0$ e $y=2$ para bosquejar, evidentemente observando que ahora x es una función de y y no al revés como hemos hecho habitualmente a lo largo del curso.

El hecho que complica de todo esto es que el eje de revolución ya no es el eje x, si no que un eje arbitrario. Esto no es del todo complicado si pensamos que el volumen seguirá siendo el mismo a pesar de que desplacemos la figura. En otras palabras: desplacemos la curva $x = 2y^3 - y^4$ hacia arriba de modo que calcen los ejes. De esta forma, la nueva curva (en analogía a un desplazamiento hacia la derecha), será

$$x = 2\,(y-2)^3 - (y-2)^4$$

Ahora debemos calcular el volumen de revolución de esta figura en torno al eje x. Del gráfico se ve rápidamente que tendremos que hacerlo mediante cascarones cilíndricos, ya que $x\,(y)$ no es una función inyectiva. Entonces aplicamos al fórmula de cascarones cilíndricos, pero ahora integrando con respecto a x (y cuidando las nuevas raíces, que son los extremos de integración):

$$V_x = 2\pi \int_2^4 y\left[2\,(y-2)^3 - (y-2)^4 - 0\right] dy$$

Trasladamos los extremos de integración sin mayor dificultad (en analogía a la sumatoria o mediante $u = y - 2$):

$$V_x = 2\pi \int_0^2 (y+2)\left(2y^3 - y^4\right) dy$$

De aquí observamos que la fórmula es la misma, y solo se producirá una variación en la componente radial en los ejercicios de este tipo. Este resultado se calcula finalmente por integración directa (polinomial):

$$\therefore\ \boxed{V_x = \frac{32\pi}{3}}$$

Problema 1.13:

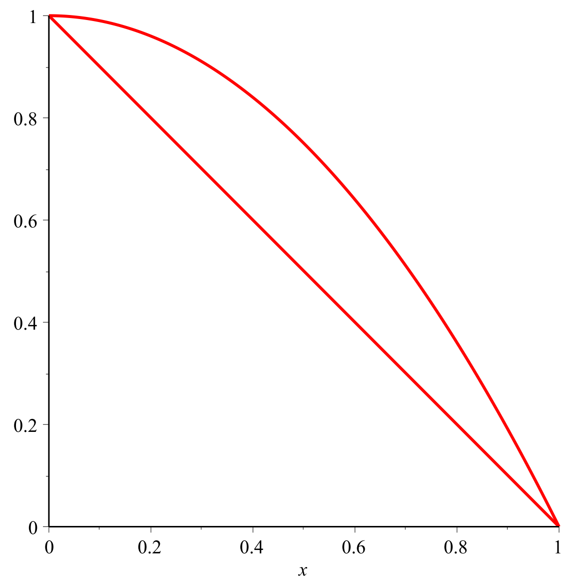
(a) Calcule el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región limitada por las curvas $y = 1 - x^2$ e $y = 1 - x$ en torno al eje $x = 4$.

(b) Hallar el volumen del sólido obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje Y donde

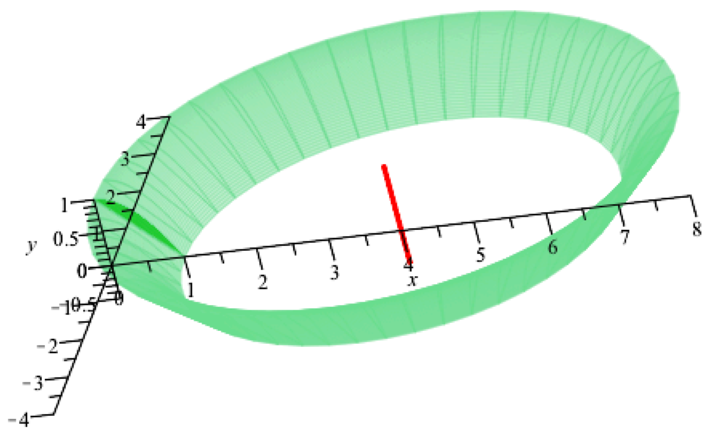
$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y^2 \leq 4x,\ x^2 \geq 4y,\ x^2 + y^2 \leq 12\right\}$$

Solución:

(a) Partimos graficando la región. Ambas curvas son sencillas de graficar, obteniendo así la región de forma fácil junto al eje de revolución:



Luego, es fácil proyectar la región en el sólido de revolución:



De esta forma, planteamos la integral necesaria para escribir el sólido de revolución. Podemos obtener el volumen del sólido de revolución por cualquiera de los dos métodos ya que las funciones en la región involucrada son localmente inyectivas.

Utilizaremos el método de los casquetes cilíndricos. Para ello recordamos cómo se plantea la ecuación, ya que en este caso cambia el eje de rotación. De la fórmula

$$V_{x=0} = 2\pi \int x \left[f(x) - g(x) \right] \mathrm{d}x$$

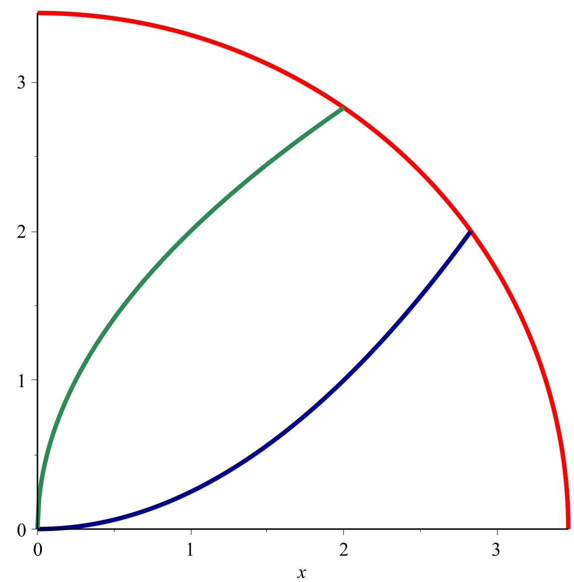
observamos que el elemento que cambia es x, el cual mide la distancia al eje de rotación. En este caso, dada la ubicación del eje de rotación podemos deducir que la distancia de un cascarón al eje de revolución para x dado es $4 - x$. Luego,

$$\begin{aligned} V_{x=4} &= 2\pi \int_0^1 (4-x) \left[1 - x^2 - 1 + x \right] \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^1 (4-x) \left(x - x^2 \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

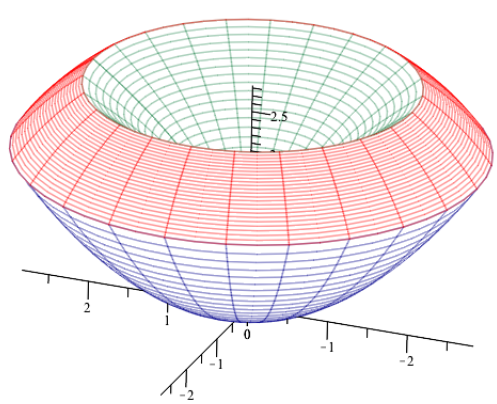
Calculamos la integral expandiendo la función polinomial e integrando paso a paso. Luego,

$$\boxed{V_{x=4} = \frac{7\pi}{6}}$$

(b) Lo primero que debemos hacer es determinar la región de revolución. Para ello graficamos las dos curvas considerando que las dos primeras son parábolas (de hecho son la misma parábola pero con distinta dependencia) y la última es una circunferencia de radio $2\sqrt{3}$. Con estas consideraciones, los gráficos son más o menos como sigue: y la región es muy fácil de determinar:



Al revolucionar la región, obtenemos una gráfica como la siguiente:



Luego, solo nos queda integrar. El resultado de hacer esto mediante fórmula directa en el eje y nos resultará complicado ya que no se generará una figura como la que queremos de forma directa. Por esta razón es que usaremos integración mediante cascarones cilíndricos, dividiendo la región en 2: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ donde $\mathcal{R}_1$ es la región delimitada hasta que la curva verde se intersecta con la roja y $\mathcal{R}_2$ lo restante. La justificación de esta división pasa porque las alturas de los cascarones serán variables según la curva delimitada.

Simplemente nos falta hacer uso de las fórmulas:

$$V_{\mathcal{R}_1} = 2\pi \int_0^{\bar{x}} x\left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

¿Cuánto vale $\bar{x}$? Queda determinado por el punto de intersección de ambas curvas:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 12 \\ y^2 &= 4x \end{aligned}$$

Restando:

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \to (x-2)(x+6) = 0$$

Evidentemente la única solución que nos sirve es la positiva, $x = 2$. Con ello,

$$V_{\mathcal{R}_1} = 2\pi \int_0^{2} x\left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = 2\pi\left(\frac{8}{5}\sqrt{2} - 1\right)$$

donde se calculó la integral por simple integración de funciones potencia. De forma análoga,

$$V_{\mathcal{R}_2} = 2\pi \int_2^{\tilde{x}} x\left(\sqrt{12 - x^2} - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

Por otra parte $\tilde{x}$ viene determinado por el sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 12 \\ x^2 &= 4y \end{aligned}$$

Luego,

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \to (y-2)(y+6) = 0$$

Es decir $y = 2$ y con ello $x = 2\sqrt{2}$. Haciendo la sustitución $u = x^2$ obtenemos una fórmula directa de integrar:

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{R}_2} &= \pi \int_4^{8} \left(\sqrt{12 - u} - \frac{u}{4}\right) du \\ &= 2\pi\left(\frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{17}{3}\right) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$V = V_{\mathcal{R}_1} + V_{\mathcal{R}_2} \to \boxed{V = 2\pi\left(\frac{104}{15}\sqrt{2} - \frac{30}{13}\right)}$$

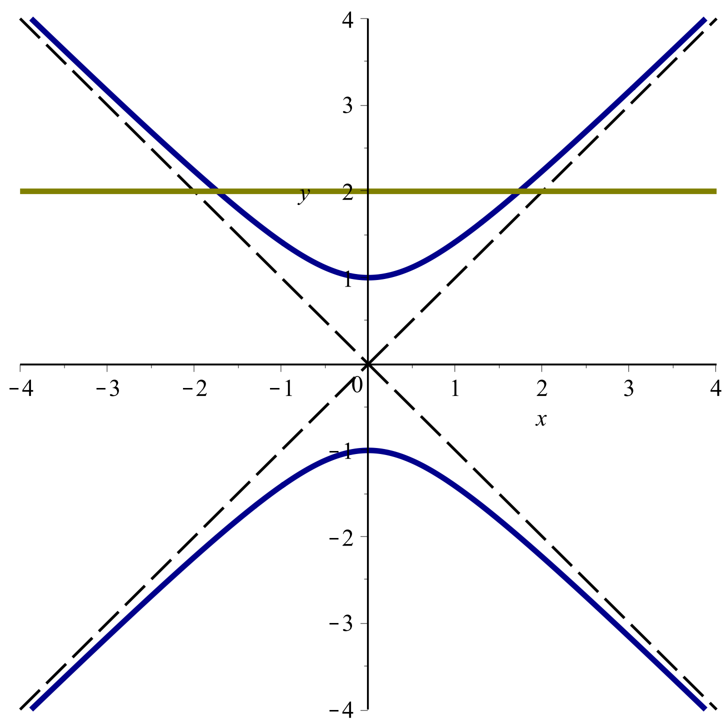
Problema 1.14: Calcule el volumen resultante al rotar la región encerrada por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ e $y = 2$ en torno al eje x y al eje y.

Solución:

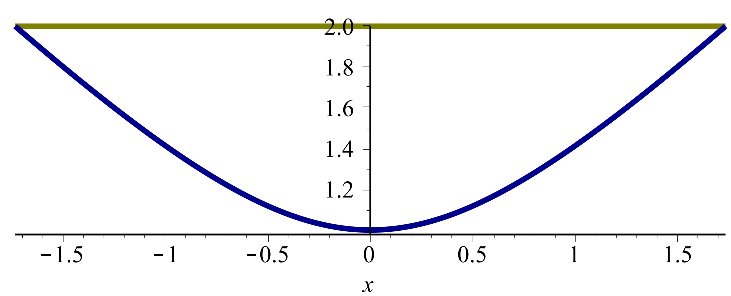
La primera pregunta que debemos hacernos es: ¿cómo graficar una hipérbola? Sea $\Gamma : y^2 - x^2 = 1$, entonces si $(x_0, y_0) \in \Gamma$ se sigue que $(-x_0, y_0)$ y $(x_0, -y_0)$ también pertenecen a Γ y por lo tanto la función es simétrica en torno a los ejes X e Y. Grafiquemos entonces solamente en el primer cuadrante, i.e.

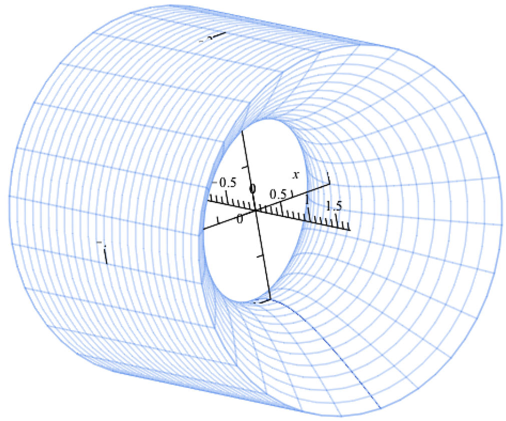
$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

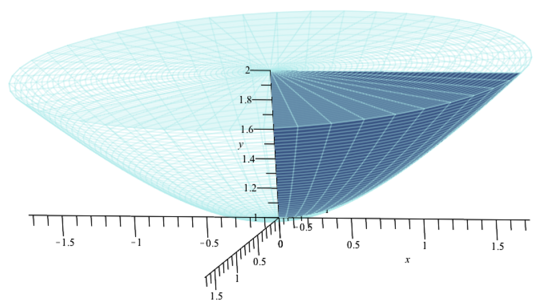
Esta es una función continua y diferenciable que vale 1 en $x = 1$ y que para $x \to \infty$ se conforma asintóticamente como x. Es decir, la gráfica de la hipérbola junto a $y = 2$ y las asíntotas es la siguiente:



Luego, la región y los sólidos generados son los siguientes:







Ahora calculamos los sólidos. Para el eje OX es directo, los extremos los obtenemos resolviendo $\sqrt{x^2+1} = 2 \to x = \pm\sqrt{3}$, con lo cual:

$$
\begin{aligned}
V_x &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi \left[4 - (1 + x^2)\right] \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(3 - x^2\right) \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \left(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) \\
&= 4\pi\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Finalmente, $\boxed{V_x = 4\pi\sqrt{3}}$. Para el eje Y tenemos el problema de que la figura atraviesa el eje. Sin embargo, dada la simetría de la figura no cuesta imaginarse el sólido y por lo tanto podemos solo tomar la región para $x \geq 0$ e integrar allí.

Este sólido sí puede obtenerse por la fórmula directa, pero lo haremos por cascarones para demostrar que también es posible. En este caso, para obtener el resultado mediante cascarones cilíndricos debemos restar correctamente las alturas involucradas:

$$\begin{aligned}
V_y &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x\left[2-\sqrt{1+x^2}\right] \mathrm{d}x \\
&= 2\pi\left(\int_0^{\sqrt{3}} 2x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\pi\left(3-\frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u\right) \\
&= 2\pi\left(3-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+u)^{3/2}\Big|_0^3\right) \\
&= 2\pi\left(3-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

Es decir, $\boxed{V_y = \frac{4\pi}{3}}$.

Finalmente, este problema es muy valioso desde el punto de vista conceptual pues nos permite comprender qué representa cada fórmula de integración en el eje y.

Problema 1.15: Sea $y=f(x)$ una función positiva con derivada continua $f'(x)>0$ en $[a,b]$ con $0<a<b$. Pruebe que:

$$2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x + \pi\int_a^b x^2 f'(x)\mathrm{d}x = \pi\left[b^2 f(b) - a^2 f(a)\right]$$

Interprete geométricamente este resultado.

Solución:

Esta demostración, dados los extremos de la derecha sugiere inmediatamente la aplicación de integración por partes. Observe que dada la integral:

$$\pi\int_a^b x^2 f'(x)\mathrm{d}x$$

Hacemos $\begin{cases} u = x^2 & \rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}v & \rightarrow v = f(x) \end{cases}$, con lo cual:

$$\pi\int_a^b x^2 f'(x)\mathrm{d}x = \pi x^2 f(x)\Big|_a^b - \pi\int_a^b 2xf(x)\mathrm{d}x$$

Observación: El hecho de que $f'(x)$ sea continua garantiza la aplicación del teorema de sustitución y el hecho de que la derivada sea positiva garantiza que no ocurran cambios de signos en la derivación.

Reordenando términos y evaluando la primitiva se llega así a lo pedido:

$$\underbrace{2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}_{(1)} + \underbrace{\pi\int_a^b x^2 f'(x)\mathrm{d}x}_{(2)} = \underbrace{\pi\left[b^2 f(b) - a^2 f(a)\right]}_{(3)} \quad \blacksquare$$

Esta fórmula no significa ninguna sorpresa desde el punto de vista geométrico. Si tomamos la función $f(x)$ entre a y b, tenemos que el volumen resultante al rotar la región entre $f(x)$ y OX en torno al eje y (fórmula (1), cascarones cilíndricos, la región bajo $f(x)$) sumado al volumen resultante de rotar la región entre $f(x)$ y OY en torno al eje y (fórmula (2), fórmula explícita, la región sobre $f(x)$) efectivamente nos entrega el volumen del cilindro superior restado al volumen del cilindro inferior (fórmula (3)). Es decir, gráficamente se puede entender, que los volúmenes generados (incluso si f es decreciente) son los mismos.

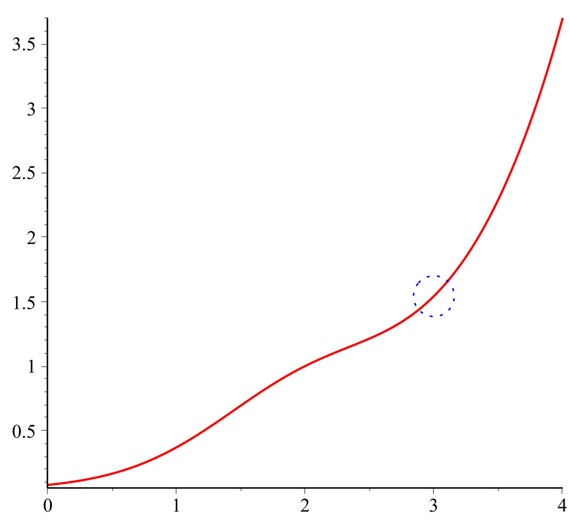
Problema 1.16: [**Propuesto**] Se dispone de una copa en forma de cono con altura h y ángulo 2θ se llena completamente con agua. Una esfera de radio r se ubica cuidadosamente en la parte superior de la copa hasta que el cuerpo de la esfera roza con los bordes de la copa, desplazando así cierto volumen de agua $V = V(r)$. Determine el radio de la esfera r de modo de modo que el volumen desplazado sea máximo.

1.5. Longitud de curvas

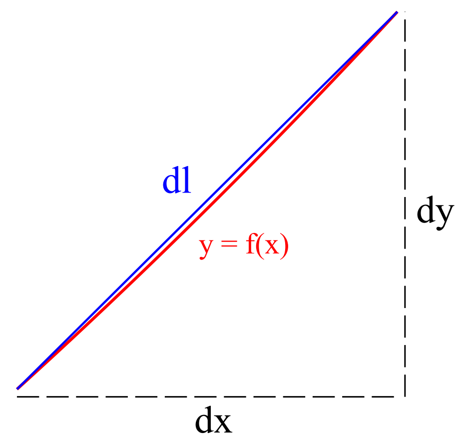
En los problemas siguientes calcularemos la longitud de una curva en el plano cartesiano. Para ello, recurriremos nuevamente al enfoque diferencial. De esta forma, el largo total de una curva es una suma de diferenciales de largo:

$$\ell = \int \mathrm{d}\ell$$

Debemos calcular el diferencial de largo $\mathrm{d}\ell$. Para ello observemos la figura para una función cualquiera:



Luego, hagamos un zoom al segmento de curva marcado en azul:



Observamos que entre los puntos extremos de este segmento se puede trazar una recta que los une. Cuando $\Delta x \to 0$ se puede demostrar que la recta coincide con el segmento de recta. Luego, se sigue que:

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

Observe que sabemos el valor de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ si esta es una función diferenciable. Es decir,

$$\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

Integrando desde x_i hasta x_f cada uno de estos segmentos:

$$\boxed{\ell = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}$$

Esta es la fórmula que utilizaremos en todos estos problemas.

Problema 1.17: Calcule la longitud de la curva en los siguientes casos:

(a) $y = a\cosh(x/a)$ entre $x = 0$ y $x = a$.

(b) $y^2 = x^3$ desde el origen hasta $x = 4$.

(c) $y = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

(a) Partimos derivando:

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \to y' = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Luego,

$$\ell = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}\mathrm{d}x$$

Calculamos esta integral recordando que:

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \to 1 + \operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t$$

Es decir,

$$\ell = \int_0^a \cosh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = a\operatorname{senh}\frac{x}{a}\Big|_0^a$$

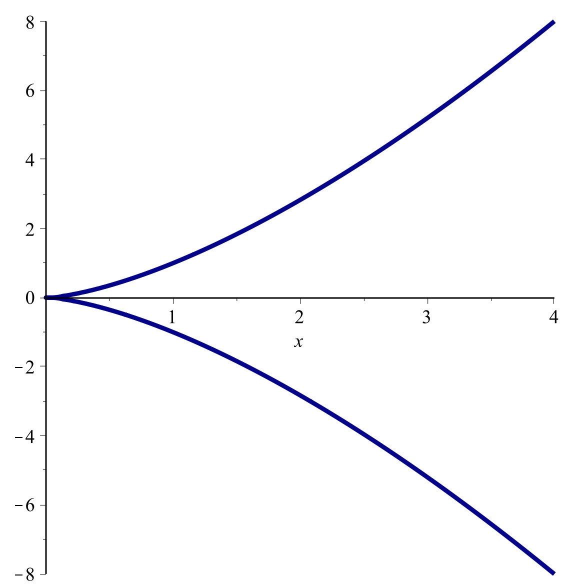
Finalmente,

$$\boxed{\ell(a) = a\ \operatorname{senh}(1)}$$

(b) Tenemos que $0 \leq x \leq 4$ por lo que no hay problema en tomar la raíz cuadrada. De esta forma,

$$y = \pm x^{3/2}$$

El problema es que, efectivamente, existe tanto la rama negativa como la positiva ya que cualquier punto $y \geq 0$ de la curva cumple que su punto reflejado en torno al eje x, $-y \leq 0$ cumple la ecuación analítica $y^2 = x^3$. Graficamos la curva en cuestión:



Observe que dada la simetría, se puede calcular solo la rama positiva y multiplicar por dos. Derivando,

$$y'_+ = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

Luego,

$$\ell = 2\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^4$$

Evaluando,

$$\to \boxed{\ell = \frac{16}{27}\left[10^{3/2} - 1\right]}$$

(c) No tratamos siquiera de graficar la curva dada la dificultad inherente a hacerlo. Sin embargo, la expresión es explícita y podemos tratarla algebraicamente. Derivamos usando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$y' = \sqrt{x^2 - 1}$$

Escribiendo la integral:

$$\ell = \int_1^3 \sqrt{1 + x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 |x|\,\mathrm{d}x = \int_1^3 x\,\mathrm{d}x$$

Finalmente,

$$\boxed{\ell = 4}$$

En los próximos ejercicios nos centraremos en la dificultad principal de este tipo de problemas que es resolver la integral en cuestión.

Problema 1.18:

(a) Calcule la longitud de la curva $y = \dfrac{1}{3}\left(x^2 + 2\right)^{3/2}$ comprendida entre los puntos:

$$\mathbf{p}_1 = \left(0, \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_2 = \left(1, \sqrt{3}\right)$$

(b) Encuentre el largo de la curva $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln(x)}{2}$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

(a) Seguimos utilizando la fórmula de forma explícita. Derivamos:

$$y' = x\left(x^2 + 2\right)^{1/2}$$

Reemplazamos en la fórmula:

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2\left(x^2 + 2\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + x^4 + 2x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sqrt{\left(1 + x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Como $1 + x^2 \geq 0$ no hay problema extrayendo la raíz:

$$\ell = \int_0^1 \left(1 + x^2\right)\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{3}$$

$$\to \boxed{\ell = \frac{4}{3}}$$

(b) Nuevamente derivamos:

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Reemplazando en la fórmula:

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2x}\right)^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Observe que la integral parece ser complicada, pero reordenando los términos se observa que se puede armar un cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2x} + \left(\frac{1}{2x}\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Finalmente, evaluar la integral resulta sencillo:

$$\begin{aligned}
\ell &= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right)\Bigg|_1^2 \\
&= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - \cancel{\frac{1}{2}\ln 1} \\
&\to \boxed{\ell = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2}
\end{aligned}$$

Problema 1.19: Considere la curva Γ definida por la relación $y = -\ln(1 - x^2)$ con $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(a) Calcule el largo de Γ.

(b) Calcule el área del manto generado por la rotación en torno al eje OY de Γ.

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Reemplazando en la fórmula:

$$\ell = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2}}\, \mathrm{d}x$$

Como $\left(x^2 - 1\right)^2 > 0$ para $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ no hay problema en sacar la raíz al sumar las fracciones. Sin embargo, hay que notar que $x^2 - 1 < 0$ en este intervalo, razón por la cual hay que tomar correctamente el módulo. Entonces, trabajemos un poco el numerador:

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{\left(x^2 - 1\right)^2 + 4x^2}}{1 - x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}}{1 - x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}{1 - x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Esta expresión es más sencilla que la raíz, y puede ser calculada cuidadosamente. Observe que:

$$\frac{x^2 + 1}{1 - x^2} = -\frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1} = \frac{2}{1 - x^2} - 1$$

La segunda expresión es sencilla, pero la primera requiere ser resuelta mediante el método de fracciones parciales. Observe que:

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{(x + 1)(1 - x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x + 1}\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x + 1} + \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x} - \int_0^{1/2} \mathrm{d}x \\
&= \ln(1 + x)\Big|_0^{1/2} - \ln(1 - x)\Big|_0^{1/2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\ell = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\ell = \ln(3) - \frac{1}{2}}$$

A modo de verificación, note que $3 > e \rightarrow \ln(3) > 1 \rightarrow \ell > 0$.

(b) Observe que mediante aproximación utilizando cascarones de forma cilíndrica se puede deducir la fórmula para la superficie de revolución:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}S$$

Observe que podemos aproximar mediante un método análogo al de los casquetes cilíndricos, solo que esta vez consideramos solamente las tapas del cilindro, ya que estas son las que aportan superficie. De esta forma, los anillos sin espesor generados pueden aproximarse como:

$$\mathrm{d}S = \text{perímetro de la circunferencia} \times \text{longitud de la curva}$$

Es decir,

$$\mathrm{d}S = 2\pi x \mathrm{d}\ell = 2\pi x \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Integrando,

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Ya sabemos el valor de $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ pues lo calculamos y simplificamos en el ejercicio anterior. Reemplazamos directamente:

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^{1/2} \frac{x\left(1 + x^2\right)}{1 - x^2} \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^{1/2} x \left(\frac{2}{1 - x^2} - 1 \right) \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^{1/2} \left(\frac{2x}{1 - x^2} - x \right) \mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_0^{1/2} \frac{2x\mathrm{d}x}{1 - x^2} - 2\pi \int_0^{1/2} x\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

La primera integral se calcula fácilmente haciendo la sustitución $u = x^2 \to \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. La segunda se integra directamente:

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^{1/4} \frac{\mathrm{d}u}{1 - u} - \frac{\pi}{4} \\
&= -2\pi \ln(1 - u)\Big|_0^{1/4} - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{S = 2\pi \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{\pi}{4}}$$

Problema 1.20: Calcule la longitud de la curva $y = \log\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$ para $x \in [1, 2]$.

Solución:

Por simplicidad notemos que $y = \log(e^x + 1) - \log(e^x - 1)$. Derivando para aplicar la fórmula de longitud de arco:

$$y' = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{e^{2x} - 1}$$

Es decir,

$$1 + y'^2 = \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1 + 4e^{2x}}{\left(e^{2x} - 1\right)^2} = \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right)^2$$

Por lo tanto,

$$\ell = \int_1^2 \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$$

Para resolver esta integral podemos eliminar el término que complica los cálculo, por lo tanto, hacemos

$$u = e^{2x} \to \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x \to \frac{\mathrm{d}u}{2u} = \mathrm{d}x$$

Luego,

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^4} \frac{u+1}{u\,(u-1)}\mathrm{d}u$$

Para resolver la integral de u hacemos separación en fracciones parciales:

$$\frac{u+1}{u\,(u-1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u-1} \to a\,(u-1) + bu = u+1$$

Haciendo $u=1$ tenemos que $b=2$. Haciendo $u=0$, $-a=1 \to a=-1$. Es decir,

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\int_{e^2}^{e^4} \frac{2}{u-1}\,\mathrm{d}u - \int_{e^2}^{e^4} \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\ell = \log\frac{e^4-1}{e^2-1} - \log e^2}$$

Problema 1.21: Esboce el gráfico de la curva $y^2 = x\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^2$ y calcule la longitud del lazo que ella forma.

Solución:

Partimos haciendo el gráfico. Observamos que despejando y:

$$y = \pm\sqrt{x}\left|1-\frac{x}{3}\right|$$

lo cual impone inmediatamente que $x \geq 0$ para que y sea real. Observe que existen muchas combinaciones posibles de signos, pero también muchas simetrías. En particular, notemos que la curva es simétrica en torno al eje x ya que $-y$ se puede obtener a partir del mismo punto x en cuestión, dependiendo de cómo se despeje la raíz. Observe que la curva se anula en $x=0$ y

$$1-\frac{x}{3} = 0 \to x = 3$$

Consideremos la expresión analítica sin signos ni módulos: luego al reflejar esta en torno al eje x obtendremos el lazo final. Tenemos entonces la expresión:

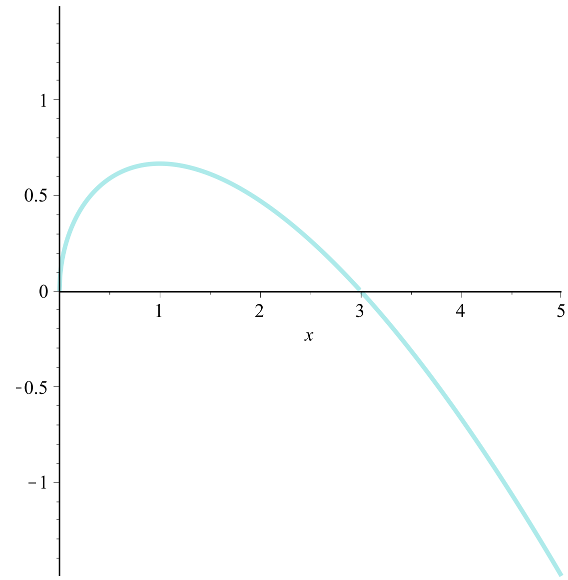
$$\tilde{y} = \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{3}\right)$$

Analizando los signos:

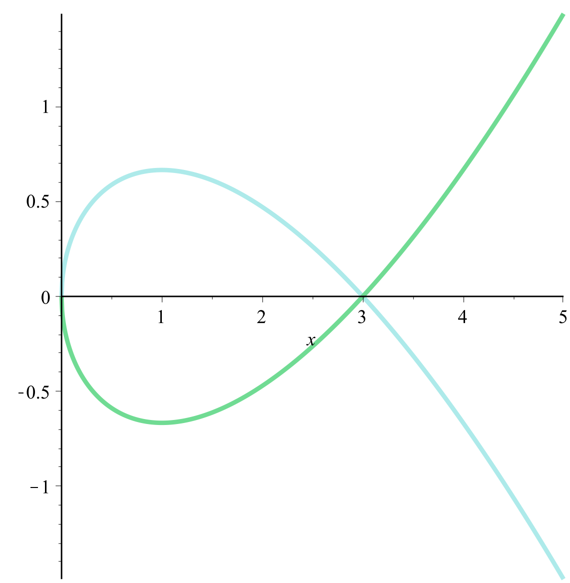
$$1-\frac{x}{3} \geq 0$$

ya que $\sqrt{x}$ siempre es no negativo. La inecuación anterior se logra para $x \in (-\infty, 3)$, en particular para $x \in [0, 3]$ en este caso. Luego, la función es negativa para $x \in (3, \infty)$. Notar además que el vértice de la parábola se alcanza en el origen y que para $x \to \infty$ la función tenderá por lo tanto a $-\infty$.

Considerando además que la función es continua y diferenciable para $x > 0$, podemos esbozar el gráfico sin dificultad:



Luego, la figura total la obtenemos reflejando en torno al eje X:



Queremos calcular solamente la longitud del lazo. Es decir, por la simetría de la figura podemos calcular la longitud de $\tilde{y}$ entre 0 y 3 (en este intervalo está dibujado el lazo cerrado) y luego multiplicar por 2 para obtener la longitud total del lazo. Esto es lo que haremos entonces:

$$\ell = 2 \int_0^3 \sqrt{1 + f'(x)^2} \mathrm{d}x$$

Tenemos que:

$$f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2} \to f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + f'(x)^2} &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}x^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}x^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\ell &= 2\int_0^3 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_0^3 + \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^3 \\
&= 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{3/2} \\
&= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\ell = 4\sqrt{3}}$$

Problema 1.22: Calcule el largo de la curva $y = e^x$ para $x \in [0, 1]$.

Solución:

El problema sugiere que su resolución es directa, puse se entregan todos los elementos para su resolución. Aplicamos la fórmula directamente:

$$y = e^x \to y'^2 = e^{2x}$$

Es decir, debemos calcular:

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

Sin embargo, resolver esta integral puede no ser tan sencillo como parece. ¿Cuál es la primera dificultad sugerente de ella? El hecho que aparezca una función en la raíz. Eliminémosla haciendo la sustitución:

$$u = e^{2x} \to \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x \to \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{d}u}{2u}$$

Es decir,

$$\ell = \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{1 + u}}{2u}\mathrm{d}u$$

Ahora lo que nos complica es la aparición de la raíz. Hagamos la sustitución:

$$v = \sqrt{1+u} \to \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{1+u}} \to 2v\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}u$$

$$v = \sqrt{1+u} \to u = v^2 - 1$$

Es decir,

$$\ell = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{v^2\mathrm{d}v}{v^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \mathrm{d}v - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{\mathrm{d}v}{v^2-1}$$

La primera integral es sencilla de calcular. La segunda complica relativamente. Aplicamos fracciones parciales:

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{\mathrm{d}v}{v^2-1} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{\mathrm{d}v}{v+1} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{\mathrm{d}v}{v-1}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\ell &= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e^2-1}{2-1}\right) = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(e^2\right) \\
&= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - 1
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\ell = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - 1}$$

Finalmente, un problema de carácter conceptual:

Problema 1.23: Sea $\Gamma : y = f(x)$ una curva continuamente diferenciable para $x_0 \leq x \leq a$. Demuestre que

$$\ell(a) = \int_{x_0}^{a} \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

es una función creciente.

Solución:

Esta pregunta es de sencilla resolución y nos aporta un resultado obvio: a medida que agregamos más segmento de la curva, su largo tiene que aumentar. Al tratarse de $f(x)$ de una función continuamente diferenciable, entonces $f'(x)$ es continua y por lo tanto $\sqrt{1+f'(x)^2}$ es continua por teorema de composición de funciones continuas. Luego, $\ell(a)$ es diferenciable y por lo tanto $\ell'(a)$ existe para todo $a \geq x_0$.

Se sigue entonces que podemos demostrar que la función es creciente si demostramos que $\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}a > 0$. Derivando,

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}a} = \sqrt{1+f'(a)^2}$$

La cual es evidentemente no negativo pues la raíz es siempre positiva. Tampoco existe la opción de que el resultado sea nulo pues por axiomática real se cumple que $1 + f'(a)^2 \geq 1$. Con esto, demostramos así lo pedido. ■

Problema 1.24: [**Propuesto**] Considere la curva definida por la ecuación:

$$\mathbf{r}\,(t) = \left(t \operatorname{sen} t,\; t \cos t,\; \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \right) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Calcule el largo ℓ de la curva. *Ayuda:* El largo de una curva puede extenderse a $\mathbb{R}^3$ de la misma forma que se calcula para $\mathbb{R}^2$:

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$$

1.6. Superficies de revolución

Dada una curva $y = f\,(x)$, la motivación ahora es determinar el área del manto generado al rotarla en torno al eje x. Asumiendo un enfoque diferencial tal como se ha realizado en otras aplicaciones, se puede dividir el manto en anillos cortados transversalmente al eje x. Cada uno de estos tiene radio $f\,(x)$ y espesor $\mathrm{d}\ell$, razón por la cual simbólicamente se puede escribir:

$$\mathrm{d}S_x = 2\pi f\,(x) \times \mathrm{d}\ell$$

Integrando de a a b:

$$\boxed{S_x = 2\pi \int_a^b f\,(x) \sqrt{1 + f'\,(x)^2}\,\mathrm{d}x}$$

Nuevamente, la dificultad de este tipo de problemas se reduce principalmente a poder evaluar la integral, pues las expresiones suelen complicarse por la presencia de una raíz cuadrada.

Problema 1.25: Determine el área de la superficie obtenida al rotar la curva $y = \operatorname{sen}(x)$, $x \in [0, \pi]$ en torno al eje X.

Solución:

Reemplazando en la fórmula,

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) \sqrt{1 + \cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Notamos que aparece una integral y su derivada. Por lo tanto, hacemos $u = \cos(x) \to \mathrm{d}u = -\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$ y así:

$$S_x = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{d}u = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{d}u$$

En un problema anterior ya demostramos que:

$$\int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+u^2}\right| + \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + c$$

Luego,

$$\boxed{S_x = 2\pi\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right]}$$

Problema 1.26: Considere la curva $y = \sqrt[3]{x}$ y la superficie generada al rotarla en torno al eje X para $0 \leq x \leq 8$.

(a) Escriba la integral para el área de la superficie generada como una integral en x.

(b) Escriba la integral para el área de la superficie generada como una integral en y.

(c) Calcule la integral obtenida en b).

Solución:

(a) La región es sencilla de graficar ya que la curva en cuestión es fácil de dibujar. Por esta razón la figura se deja propuesta al lector para trabajarla junto a este desarrollo. Escribimos la integral directamente a partir de la visto en clases:

$$y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{1/3} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

Es decir,

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{1+\frac{1}{9}x^{-4/3}}\,\mathrm{d}x$$

Con lo cual,

$$\mathrm{d}A = 2\pi y \mathrm{d}\ell \to \boxed{S = \int_0^8 2\pi\sqrt[3]{x}\sqrt{1+\frac{1}{9}x^{-4/3}}\,\mathrm{d}x}$$

la cual a su vez es una integral difícil de calcular.

(b) Observe que <u>**NO**</u> se está pidiendo calcular la superficie de revolución en torno al eje y, lo que se está pidiendo es escribir la misma área anterior ahora como una integral en y, no en x. Para evitar complicaciones, invirtamos los ejes y deduzcamos correctamente la fórmula. Tenemos la relación $y = \sqrt[3]{x} \to x = y^3$. Por otra parte,

$$\mathrm{d}A = 2\pi y\,\mathrm{d}\ell$$

La expresión simbólica del diferencial sigue siendo la misma. Lo que ahora cambia es:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\ell &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}\\ &= \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Por otra parte, $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 = 9y^4$. Reemplazando, notamos también que ahora los extremos de integración cambian de 0 a 2 (las coordenadas y respectivas para $y(0)$ e $y(8)$) al integrar en y:

$$\boxed{S = \int_0^2 2\pi y\sqrt{1+9y^4}\,\mathrm{d}y}$$

Esta integral ya resulta mucho más sencillo trabajarla. Observe que se podría haber obtenido el mismo resultado haciendo la sustitución $y = \sqrt[3]{x}$. Sin embargo, por propósitos pedagógicos se prefirió deducir la fórmula.

(c) Para calcular la integral anterior partimos observando que:

$$S = \frac{\pi}{3}\int_0^2 6y\sqrt{1+(3y^2)^2}\,\mathrm{d}y$$

Entonces hacemos $u = 3y^2 \to \mathrm{d}u = 6y$. Con ello,

$$S = \frac{\pi}{3}\int_0^{12}\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Desde aquí podemos proceder de dos formas: (1) sustituyendo $u = \tan(t)$ o bien (2) sustituyendo $u = \operatorname{senh}(t)$. Con ambos caminos se llega exactamente al mismo resultado. Sin embargo, el lector puede comprobar que la cantidad de operaciones involucradas en la segunda forma es menor, razón por la cual preferimos este camino. Luego,

$$\mathrm{d}u = \cosh(t) \to S = \frac{\pi}{3}\int_{\operatorname{senh}^{-1}0}^{\operatorname{senh}^{-1}12}\cosh^2 t\,\mathrm{d}t$$

Observe que:

$$\begin{aligned}\cosh^2 t &= \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}\\ &= \frac{1+\cosh 2t}{2}\end{aligned}$$

Es decir, como $\operatorname{senh}^{-1} 0 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}S &= \frac{\pi}{6}\left(\operatorname{senh}^{-1}12 + \left.\frac{\operatorname{senh}2t}{2}\right|_0^{\operatorname{senh}^{-1}12}\right)\\ &= \frac{\pi}{6}\left(\operatorname{senh}^{-1}12 + \frac{\operatorname{senh}\left(2\operatorname{senh}^{-1}12\right)}{2}\right)\end{aligned}$$

que es un resultado más que suficiente. Se puede utilizar el hecho de que $\operatorname{senh}2t = \dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} = \dfrac{\left(e^t-e^{-t}\right)\left(e^t+e^{-t}\right)}{2}$. Es decir,

$$\operatorname{senh}2t = 2\operatorname{senh}t\cosh t$$

para seguir simplificando:

$$\boxed{S = \frac{\pi}{6}\left(\operatorname{senh}^{-1} 12 + 24\cosh\left(\operatorname{senh}^{-1} 12\right)\right)}$$

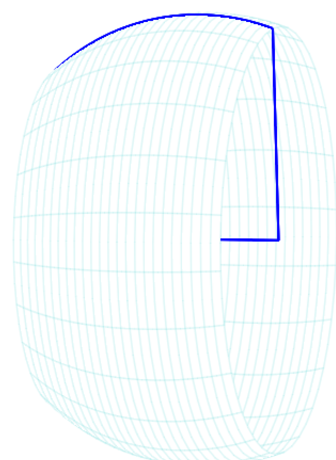
Problema 1.27:

(a) La esfera con centro en el origen y radio r se corta por 2 planos paralelos dados por $x = r_1$ y $x = r_2$ donde $-r < r_1 < r_2 < r$. Calcule el área de la superficie de la esfera comprendida entre los dos planos.

(b) Calcule el área del manto de la superficie de revolución que resulta de rotar en torno al eje OX la curva $32y^2 = 4x^2 - x^4$.

Solución:

(a) Es fácil imaginarse la superficie resultante, que puede entenderse como una esfera con dos cortes.



La superficie de revolución generada puede tenderse como la semicircunferencia superior de

$$x^2 + y^2 = r^2$$

revolucionada en torno al eje x entre $x = r_1$ y $x = r_2$. Es decir,

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \to y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ell &= \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \frac{r\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

pues al tratarse de una medida geométrica $r > 0$. Luego,

$$\mathrm{d}S = 2\pi\,|y|\,\mathrm{d}\ell = 2\pi\cancel{\sqrt{r^2 - x^2}}\frac{r\mathrm{d}x}{\cancel{\sqrt{r^2 - x^2}}}$$

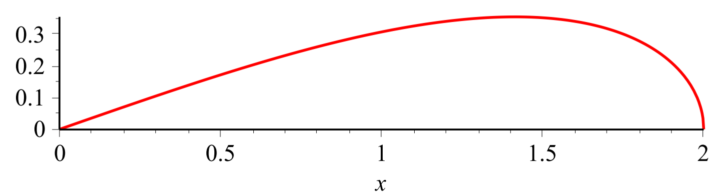
Es decir, $\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}x$. Integrando,

$$\boxed{S = 2\pi r\int_{r_1}^{r_2}\mathrm{d}x = 2\pi r\,(r_2 - r_1)}$$

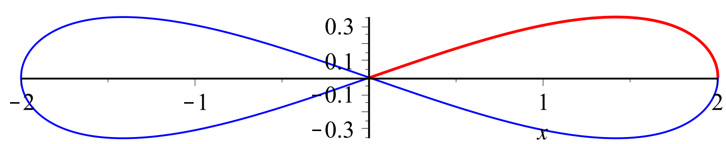
(b) La primera dificultad radica en graficar la curva $32y^2 = 4x^2 - x^4$, que llamaremos Γ desde ahora. Parta por observar que la curva es simétrica tanto por eje x como por el eje y, ya que si $(x, y) \in \Gamma$ (satisface la ecuación de la curva), entonces $(-x, y)$, $(-x, -y)$ y $(x, -y)$ también. Luego, concentraremos nuestros esfuerzos en graficar solamente para el primer cuadrante $(x, y \geq 0)$ y luego reflejaremos en torno a los ejes. Haciendo esto, despejamos y como función de x:

$$4\sqrt{2}y = x\sqrt{4 - x^2} \to y = \frac{x}{4\sqrt{2}}\sqrt{4 - x^2}$$

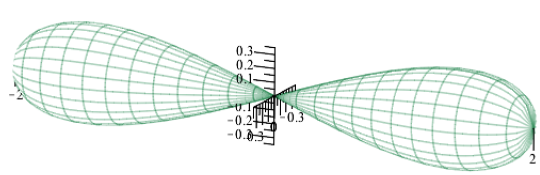
Considerando que la función es positiva en este cuadrante, es continua y diferenciable en $(0, 2)$ y vale cero en $x = 0$ y $x = 2$, entonces podemos esbozar de forma fácil aplicando el Teorema de Rolle (tiene que aparecer un máximo local):



Extendemos la simetría a los demás cuadrantes:



No es complicado luego proyectar la superficie de revolución:



Por la misma simetría, podemos calcular el área en el primer cuadrante y luego multiplicar por 2 (la simetría en torno al eje X es redundante para la superficie), obteniendo así el área total del manto. Es decir,

$$S = 2S_1$$

Calculamos ℓ_1 a partir de la fórmula vista en clases. Por comodidad derivaremos implícitamente:

$$64y \cdot y' = 8x - 4x^3 \to y' = \frac{\sqrt{2}\,(2-x^2)}{4\sqrt{4-x^2}}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ell &= \sqrt{1 + \frac{\left(2-x^2\right)^2}{8\left(4-x^2\right)}}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{36 - 12x^2 + x^4}{8\left(4-x^2\right)}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\left(x^2-6\right)^2}{\left(4-x^2\right)}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{6-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= 2\pi\frac{x}{4\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{6-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{8}x\left(6-x^2\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Integrando entre las raíces (donde la curva existe),

$$S_1 = \frac{\pi}{16}\int_0^2 2x\left(6-x^2\right)\mathrm{d}x$$

Hacemos $u = x^2 \to \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$. Con ello,

$$S_1 = \frac{\pi}{16}\int_0^4 (6-u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{16}\left(24 - \frac{16}{2}\right) = \pi$$

Finalmente,

$$\boxed{S = 2S_1 = 2\pi}$$

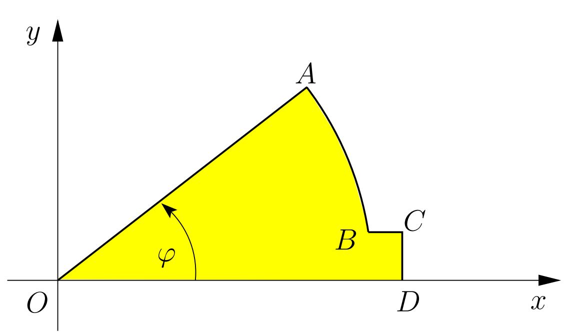
Problema 1.28: [**Propuesto**]

(a) Muestre que un observador a una altura h sobre el polo norte de una esfera de radio r puede ver una parte de la esfera que tiene área

$$\frac{2\pi r^2 h}{r+h}$$

(b) Dos esferas con radio r y R se ubican a una distancia $d > r + R$. ¿Dónde debería ubicarse una lámpara en la línea que une los centros de las esferas de modo de iluminar la máxima área posible?

Problema 1.29: [**Propuesto**] Un trompo se genera al rotar en torno al eje X la figura siguiente:



OA: es un trazo recto inclinado en un ángulo φ,

AB: es un arco de circunferencia de radio R y centro en O,

BC: es un trazo horizontal,

CD: es un trazo vertical *de largo 1*, ubicado en $x = R + 1$.

(a) Escriba la o las integrales que permiten calcular el volumen del trompo y calcúlelas.

(b) Escriba las integrales que permiten calcular el área total de la superficie del trompo y calcúlelas.

1.7. Fuerzas, momentos y centroides

Se define el *momento* en torno al eje y como la suma ponderada de un elemento de masa por su distancia al eje x. Es decir, simbólicamente:

$$\Delta M_y = x \Delta m \to \mathrm{d}M_y = x\,\mathrm{d}m$$

donde $\mathrm{d}M_y$ es un diferencial de momento y $\mathrm{d}m$ un diferencial de masa. Adicionalmente, $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}A$ donde σ es la densidad de masa por unidad de área (kg/m^2). Por otra parte, sabemos que el diferencial de área puede ser aproximado por rectángulos de área infinitesimal, es decir $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ donde $f(x)$ viene a representar una medición de la altura. Integrando,

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g(x)}^{f(x)} x\sigma \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Como x no depende de y y asumiendo que $\sigma = \sigma(x)$ (pues en otro caso esto pasa a ser un problema de integrales múltiples), entonces σ y x se ven como constantes en la integral sobre y, i.e.

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} x\sigma \left(\int_{g(x)}^{f(x)} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \to M_y = \int_{x_1}^{x_2} x\sigma \left[f(x) - g(x) \right] \mathrm{d}x$$

A partir de la suma ponderada podemos obtener la coordenada x del centroide de la figura, el cual se define como:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \int_{x_1}^{x_2} x\sigma \left[f(x) - g(x) \right] \mathrm{d}x \quad \text{donde } m = \int_{x_1}^{x_2} \sigma \left[f(x) - g(x) \right] \mathrm{d}x$$

Si σ es constante, tal como en muchas situaciones, se puede aprovechar la linealidad de la integral y obtener:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{x_1}^{x_2} x\left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x} \quad \text{con } A = \int_{x_1}^{x_2}\left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x$$

Análogamente,

$$\mathrm{d}M_x = y\,\mathrm{d}m$$

con $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}A$ y $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Es decir,

$$\mathrm{d}M_x = y\sigma\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Integrando primero en y y luego en x:

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{g(x)}^{f(x)} y\sigma\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Suponiendo nuevamente que $\sigma = \sigma(x)$, esto se ve como una constante en la integral de $\mathrm{d}y$, con lo cual:

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2}\sigma\left(x\right)\left(\int_{g(x)}^{f(x)} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

La integral de y es fácil de calcular, pues es una polinomial:

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2}\sigma\left(x\right)\frac{f^2(x) - g^2(x)}{2}\mathrm{d}x$$

Finalmente, suponiendo σ constante podemos definir de forma análoga la coordenada y del centroide como el promedio ponderado:

$$\boxed{\bar{y} = \frac{1}{2A}\int_{x_1}^{x_2}\left[f^2(x) - g^2(x)\right]\mathrm{d}x} \quad \text{con } A = \int_{x_1}^{x_2}\left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

Observe que los momentos (**¡no los centroides!**) son aditivos: es decir, si queremos calcular el momento de la figura encerrada entre $f(x)$ y $g(x)$ podríamos haber calculado los momentos de cada una las figuras con respecto al eje x ($f(x)$ y $g(x)$ cero en cada integral por separado) y luego haberlos restado, obteniendo exactamente las mismas fórmulas obtenidas anteriormente.

Asimismo, si tenemos dos figuras con centroides $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$[1] y áreas A_1 y A_2 respectivamente, entonces el centroide de ambas figuras en conjunto puede escribirse en términos de estas expresiones como:

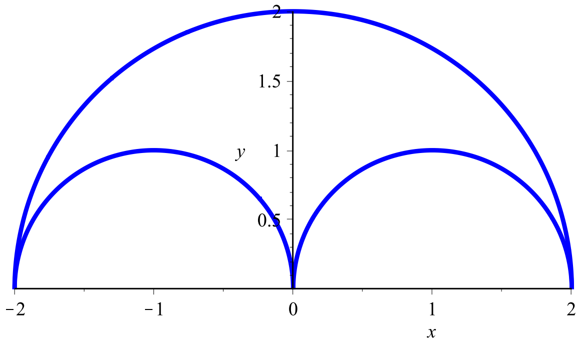
$$\mathbf{x} = \frac{A_1\mathbf{x}_1 + A_2\mathbf{x}_2}{A_1 + A_2}$$

Aplicaremos directamente estas fórmulas a los siguientes problemas para calcular centroides.

Problema 1.30:

[1]Note que $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son **vectores**. Usaremos los vectores en letra negrita minúscula a lo largo de este libro, en contraposición a la notación antigua con flechas arriba de ellos ($\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$).

(a) Calcule el centroide de la figura siguiente:



Donde todas las curvas son circunferencias y la densidad es constante. Utilizando el Teorema del Centroide de Pappus calcule el volumen de revolución en torno al eje X.

(b) Considere la región del plano limitada por

$$0 \leq y \leq 1 - x^2$$

cuya densidad superficial de masa es $\sigma(y) = \sqrt{1-y}$. Determine los momentos con respecto a ambos ejes y calcule sus centroides.

Solución:

(a) Primero partamos ahorrando trabajo. Observe que $f(x)$ (la curva superior) es una función par y estamos integrando entre dos números simétricos, lo cual obviamente se traduce en una figura simétrica. Con ello, observe que el momento de la figura superior viene dado por:

$$M_{f(x),y} = \int_{-2}^{2} x f(x) \mathrm{d}x$$

Note que $xf(x)$ es una función impar, y por lo tanto esta integral vale inmediatamente cero al ser integrada en extremos simétricos, i.e. $M_{f(x),x} = 0$. Por otra parte, para las curvas inferiores $g_1(x)$ (semicircunferencia de la izquierda) y $g_2(x)$ (semicircunferencia de la derecha) se puede observar inmediatamente que $M_{g_1(x),y} = -M_{g_2(x),y}$, con lo cual el momento total es:

$$M_y = \sum M_{y,i} = M_{f(x),y} + M_{g_1(x),y} + M_{g_2(x),y} = 0 \to \boxed{\bar{x} = 0}$$

Aprovecharemos en todos estos ejercicios próximos esta propiedad: si la figura es simétrica en torno a un eje, entonces el momento y centroide respectivos son cero. No se cumple esto para el eje y, por lo que debemos calcular individualmente.

Este problema puede resultar más sencillo si consideramos que los momentos son aditivos, por lo cual calculamos cada uno de los momentos en torno al eje x por separado. En primer lugar, calculamos para $g_1(x)$, la cual viene dada por:

$$g_1(x) = \sqrt{1 - (x+1)^2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} M_{g_1(x),x} &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} g_1^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1-(x+1)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(2-\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_{-2}^{0}\right) = \frac{1}{2}\left(2-\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Es decir,

$$M_{g_1(x),x} = \frac{2}{3}$$

Dado que estamos midiendo el momento en torno al eje x, y la figura en cuestión es simétrica, entonces es evidente que:

$$M_{g_1(x),x} = M_{g_2(x),x}$$

El momento de $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ es análogo:

$$\begin{aligned} M_{f(x),x} &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 4-x^2\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} 4-x^2\mathrm{d}x \\ &= 8-\frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Finalmente, el momento total en torno al eje x es:

$$M_x = \frac{16}{3} - 2\times\frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

El área total de la figura también resulta fácil de calcular, ya que es operar con áreas ya conocidas:

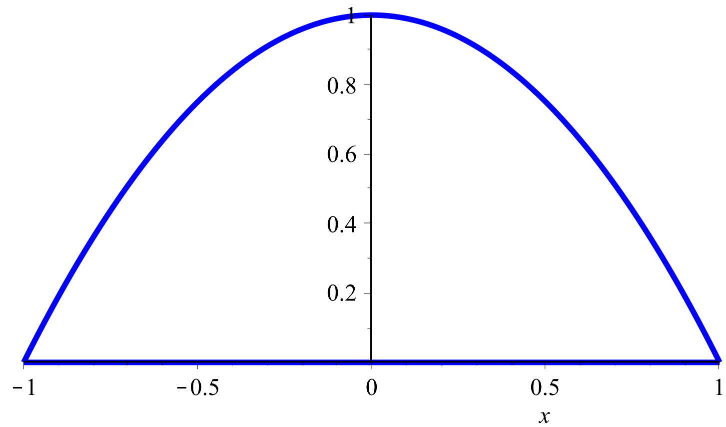
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\pi\times 2^2 - 2\times\frac{1}{2}\pi\times 1^2 \\ &= 2\pi - \pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

con lo cual,

$$\boxed{\bar{y} = \frac{4}{\pi}}$$

Observe que la coordenada y es en efecto mayor a la figura solamente encerrada por $f(x)$, $8/(3\pi)$. Es decir, concluimos que las coordenadas del centroide son $\boxed{(\bar{x},\bar{y}) = (0,4/\pi)}$.

(b) Grafiquemos la región en cuestión: todos los puntos cuya coordenada y es positiva y menor a la parábola $1-x^2$. Luego, la región es aquella entre el eje x y la parábola en cuestión. El gráfico es por lo tanto:



Inmediatamente, como σ no depende de x, no se altera la fórmula para $\bar{x}$. Por simetría de la figura deducimos inmediatamente que $\bar{x} = 0$. Para el eje y la situación es diferente, ya que la situación cambia. Volvamos a los primeros principios. Se tiene que:

$$\mathrm{d}M_x = y\,\mathrm{d}m = y\sigma(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Lo que debemos hacer ahora es integrar esta figura. Observe que integrando en y primero obtenemos la expresión:

$$M_x = \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1-x^2} y\sqrt{1-y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

la integral en y puede resultar tediosa de calcular, y producto de los extremos puede quedar una expresión difícil de manejar. Seamos inteligentes, e integremos primero en x. Observe que para y fijo la coordenada x debe moverse entre $\sqrt{1-y}$ y $-\sqrt{1-y}$. Esto último puede deducirse a partir de la gráfica de la región y también de forma analítica resolviendo la ecuación $y = 1 - x^2$ para x. La coordenada y en este caso debe moverse entre 0 y 1, con lo cual tenemos que:

$$M_x = \int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} y\sqrt{1-y}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Observe que todo lo que está adentro de la primera integral no depende de x, razón por la cual podemos tomarlo como constante y sacarlo de la integral:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{0}^{1} y\sqrt{1-y}\left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{1} y\sqrt{1-y}\left(2\sqrt{1-y}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{1} 2y\left(1-y\right)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

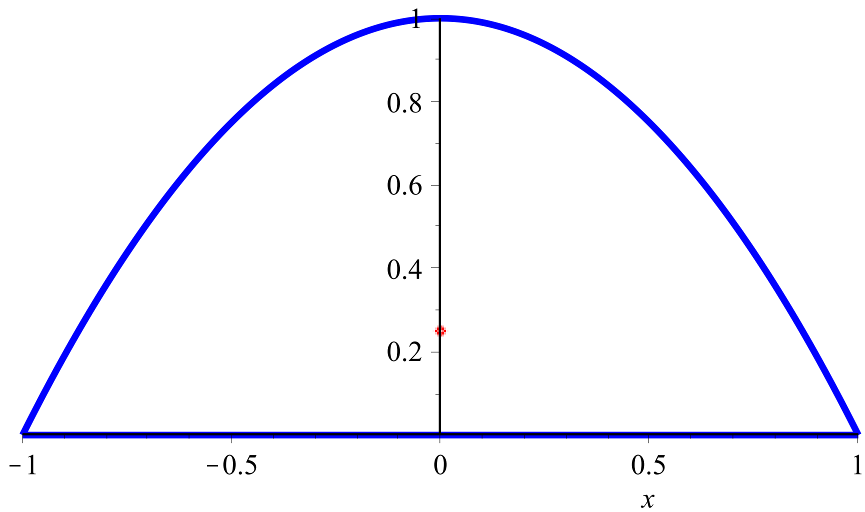
Evaluando la integral mediante la fórmula polinomial obtenemos:

$$M_x = \frac{1}{3}$$

Calculamos el área de la figura:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^1 1 - x^2 \mathrm{d}x \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Finalmente, el centroide viene dado por: $\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1/4)}$. Visto en la figura:



Problema 1.31: Calcule el centroide de la región del primer cuadrante encerrada por las curvas $y = x^n$ e $y = x^m$ con $m < n$.

Solución:

Si $m < n$ y estamos en el primer cuadrante, partimos por notar que las intersecciones de x^n y x^m se dan en $x = 0$ y $x = 1$ exclusivamente. Luego, la región de interés se da para $x \in [0, 1]$.

Dado que $x \in [0, 1]$, entonces x^a es una función decreciente para a y por lo tanto $x^m > x^n$. Por lo tanto, el área de la figura viene dada por:

$$A = \int_0^1 (x^m - x^n)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-m}{(m+1)(n+1)}$$

Asimismo, de la definición de momentos,

$$M_y = \int_0^1 x\,(x^m - x^n)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{m+2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n-m}{(m+2)(n+2)}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{2m} - x^{2n}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n-m}{(2m+1)(2n+1)}$$

Es decir, las coordenadas del centroide se ubican en:

$$\boxed{(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{A}\left(M_y, M_x\right) = \left(\frac{(m+1)(n+1)}{(m+2)(n+2)}, \frac{(m+1)(n+1)}{(2m+1)(2n+1)}\right)}$$

1.7.1. Teorema del Centroide de Pappus

Haremos uso a continuación del Teorema del Centroide de Pappus, el cual partimos enunciado:

> **Teorema:** Sea $\mathcal{R}$ una región del plano que se encuentra solamente a un lado de la recta $\mathcal{L}$ en el plano. Si $\mathcal{R}$ es rotado en torno a $\mathcal{L}$, entonces el volumen del sólido resultante es:
>
> $$V = A(\mathcal{R}) \cdot d$$
>
> donde $A(\mathcal{R})$ es el área de $\mathcal{R}$ y d la distancia recorrida por el centroide en la rotación.

Evidentemente la distancia recorrida al revolucionar corresponde al perímetro de una circunferencia, cuyo radio es la distancia del centroide a la recta. Es decir, $d = 2\pi r$ donde

$$r = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

¿Qué utilidad nos presta este problema? Simplificar integrales que nos sería imposible calcular, o que significarían un gran trabajo. Esto ocurre:

- Cuando la integral en cuestión es de por sí difícil de calcular.
- Cuando la recta no es vertical ni horizontal, sino que oblicua.

En ambos casos se aconseja utilizar este teorema, ya que todo el problema se reduce a calcular dos integrales: la del área y la del momento.

Problema 1.32: Considere la región $\mathcal{R}$ del plano definida por $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ donde:

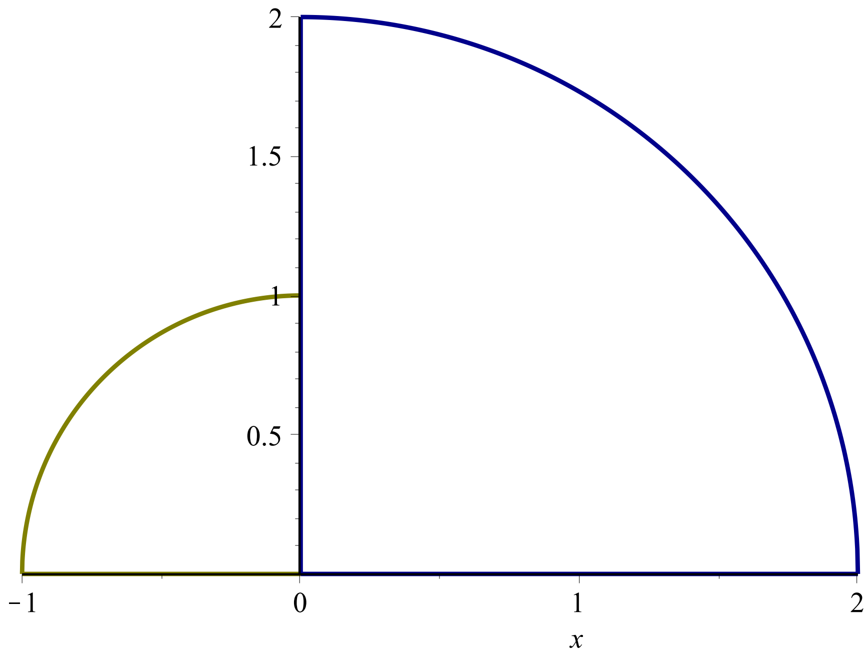
$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \leq 4, \, x \geq 0, \, y \geq 0\right\} \\ \mathcal{R}_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \leq 1, \, x \leq 0, \, y \geq 0\right\} \end{aligned}$$

(a) Calcule el centroide de $\mathcal{R}$.

(b) Determine el volumen del sólido generado al rotar $\mathcal{R}$ con respecto a la línea $y = 8/\pi$.

Solución:

(a) Graficamos la región total: $\mathcal{R}_1$ corresponde a la porción de circunferencia en el primer cuadrante y $\mathcal{R}_2$ corresponde a la porción de circunferencia en el segundo cuadrante. El área es muy sencilla de graficar:



... y de calcular:

$$A = \frac{1}{4}\pi \times 2^2 + \frac{1}{4}\pi \times 1^2 = \frac{5\pi}{4}$$

Calculamos el momento total en torno a cada uno de los ejes como la suma de los momentos. Observe que por simetría, para cada cuarto de círculo se cumplirá que la coordenada en el eje x es la misma que la coordenada del eje y. Calculamos:

$$\begin{aligned} M_{f(x),y} &= \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 2x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4-u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,(4-u)\bigg|_0^4 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

A partir de la simetría concluimos (y se puede verificar fácilmente) que:

$$M_{f(x),x} = \frac{1}{2}\int_0^2 4 - x^2\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$$

Ahora calculamos para $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ para $x \in [-1, 0]$:

$$\begin{aligned} M_{g(x),x} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 1 - x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 1 - x^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Luego, $M_{g(x),x} = \dfrac{1}{3}$ y $M_{g(x),y} = -\dfrac{1}{3}$ (el centroide debe ser negativo por el cuadrante). Los momentos totales vienen dados por:

$$M_x = \frac{8+1}{3} = 3 \quad \text{y} \quad M_y = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

Dividiendo por el área obtenemos las coordenadas del centroide:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5\pi}, 3 \cdot \frac{4}{5\pi}\right) \to \boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{28}{15\pi}, \frac{12}{5\pi}\right)}$$

(b) Debido a que el planteamiento de la integral puede ser tedioso y ya conocemos tanto el centroide como el área de la figura, aplicamos el Teorema del Centroide de Pappus. La distancia a la recta desde el centroide en este caso es sencilla de calcular ya que es la resta de las coordenadas y:

$$r = \frac{1}{\pi}\left(8 - \frac{12}{5}\right) = \frac{28}{5\pi}$$

Es decir,

$$d = 2\pi r = \frac{56}{5}$$

Finalmente,

$$V = A(\mathcal{R}) \cdot d = \frac{5\pi}{4}\frac{56}{5} = 14\pi$$

$$\therefore \boxed{V = 14\pi}$$

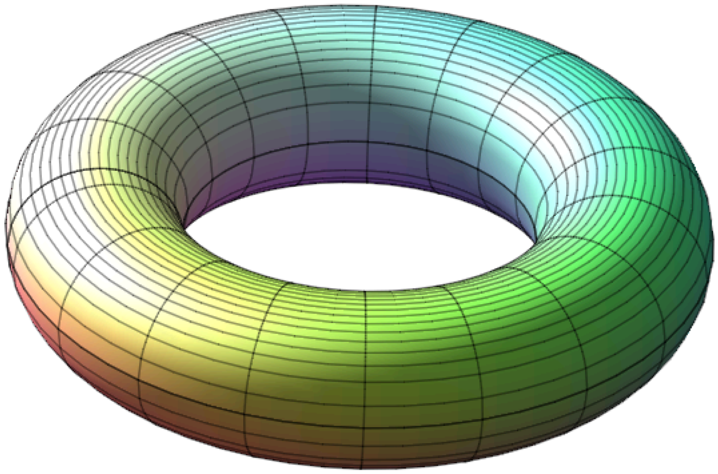
Problema 1.33:

(a) Calcule el volumen de un toro macizo o toroide, cuyos radios menor y mayor son r y R.

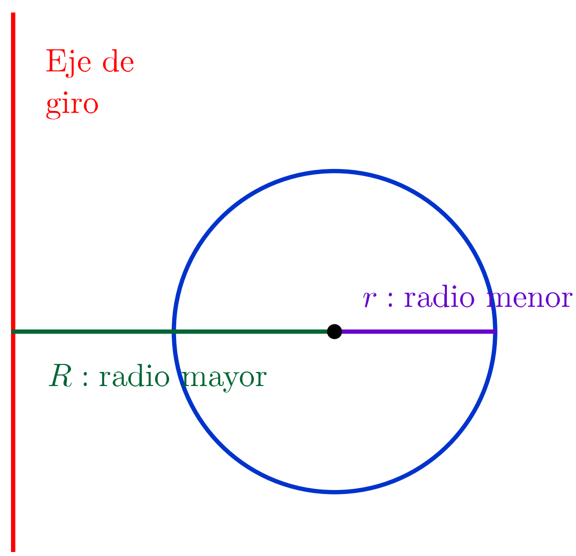
(b) Hallar el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región encerrada entre el eje X y el arco $y = \operatorname{sen}(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ alrededor $2x + y = 0$.

Solución:

(a) Un toroide es un sólido como el de la figura siguiente:



que puede entenderse y modelarse como la revolución de una circunferencia ubicada en el eje x en torno al eje y, o viceversa. Sus radios menor y mayor se describen correctamente en la siguiente figura:



Es posible plantear las integrales para este sólido de revolución, ya sea mediante cascarones cilíndricos o bien como la superposición de dos semicircunferencias.

Sin embargo, dado que calcular el área y centroide de una circunferencia es sencillo de determinar, optamos por utilizar el Teorema del Centroide de Pappus. Observe que a partir de los datos tenemos una circunferencia de radio r. Por lo tanto,

$$A(\mathcal{R}) = \pi r^2$$

Por otra parte, si ubicamos la circunferencia en el eje x, entonces necesariamente el centroide se ubica en la coordenada

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (R, 0) \to d = R$$

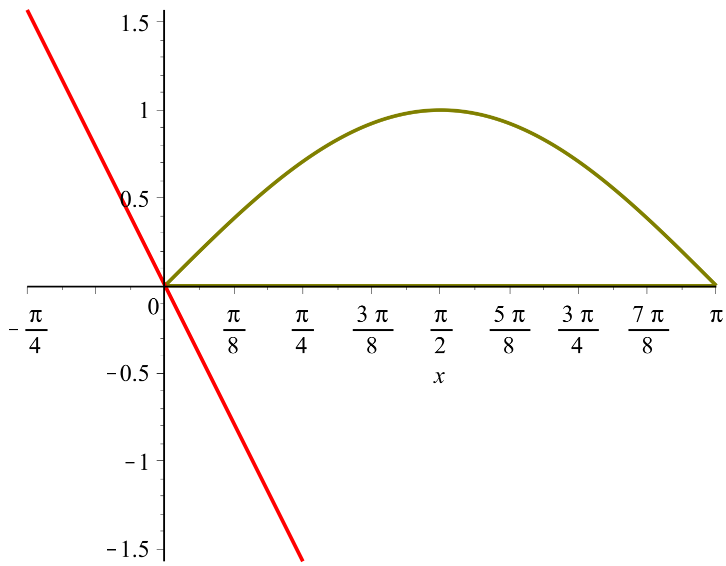
donde d es la distancia al eje rotación. Luego, la distancia recorrida por el centroide en la revolución es:

$$\ell = 2\pi d = 2\pi R$$

Finalmente,

$$\boxed{V = A(\mathcal{R}) \cdot \ell = 2\pi^2 r^2 R}$$

(b) Partimos por identificar la región y el eje de rotación (la recta $y = -2x$), lo cual resulta sencillo pues las funciones son fáciles de graficar:



Evidentemente al tratarse de una recta oblicua tendremos que resolver utilizando el Teorema del Centroide de Pappus ya que el cálculo de la posible integral resultaría tedioso. Para ello, partimos calculando el área:

$$A(\mathcal{R}) = \int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_0^\pi = 2$$

Por otra parte, podemos aprovechar inmediatamente la simetría de la figura y deducir que[2]:

$$\bar{x} = \frac{\pi}{2}$$

Calculamos el momento en torno al eje x:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2(x)\mathrm{d}x$$

Recuerde que $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, con lo cual:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{4}\int_0^\pi 1-\cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\Big|_0^\pi\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

[2]Traslade $\pi/2$ unidades al origen la figura: tendrá la función coseno, cuyo centroide por simetría es $\bar{x} = 0$. Por traslación se deduce el centroide de la figura original.

Es decir, las coordenadas del centroide son:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$$

Calculamos la distancia del punto a la recta si $a = 2$, $b = 1$ y $c = 0$:

$$r = \frac{\pi + \dfrac{\pi}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{9\pi}{8\sqrt{5}} \to d = 2\pi r = \frac{9\pi^2}{4\sqrt{5}}$$

Finalmente el volumen del sólido es:

$$\boxed{V = \frac{9\pi^2}{2\sqrt{5}}}$$

Bajo las mismas ideas utilizadas para los problemas anteriores respecto al Teorema del Centroide de Pappus, ahora también calcularemos áreas de superficies de revolución a partir de la versión respectiva de este teorema. La enunciamos:

> **Teorema:** Sea Γ una curva del plano que se encuentra solamente a un lado de la recta $\mathcal{L}$ en el plano. Si Γ es rotada en torno a $\mathcal{L}$, entonces el área de la superficie resultante es:
>
> $$A = \ell(\Gamma) \cdot d$$
>
> donde $\ell(\Gamma)$ es el largo de Γ y $d = 2\pi r$ la distancia recorrida por el centroide en la rotación con r la distancia del centroide a la recta.

Problema 1.34: Considere el arco de cicloide, cuya ecuación paramétrica es $x(t) = t - \operatorname{sen}(t)$ e $y(t) = 1 - \cos(t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcule el área de la superficie de revolución en torno a la recta $x = 2\pi$.

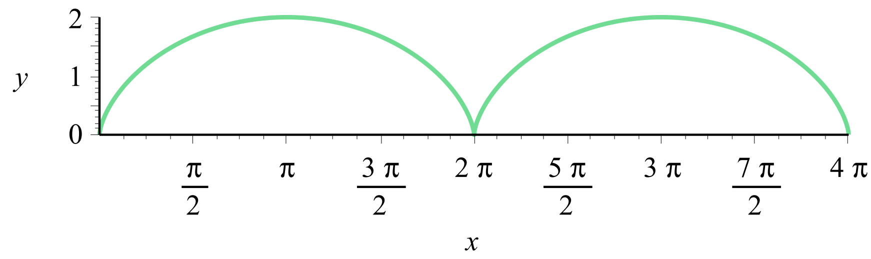
Solución:

Esta es una curva paramétrica, que estudiaremos más adelante con más detalle. Lo importante aquí es observar que ahora la coordenada x y la coordenada y no son coordenadas directamente relacionadas, sino que ambas son funciones de un parámetro t, razón por la cual estudiamos su evolución a medida que transcurre el "tiempo".

Por una parte observe que:

$$x'(t) = 1 - \cos(t)$$

Es decir, $x'(t) \geq 0$ para todo t y por lo tanto, contrario a lo que puede pensarse, la partícula o trayectoria está siempre alejándose del origen, solo que con una velocidad variable. Por otra parte $1 - \cos(t)$ oscila solo entre 0 y 2. El gráfico de la función se puede esbozar como sigue:



y continua repitiéndose la figura para t superior. Para estos propósitos no es del todo relevante, ya que de cualquier forma podemos resolver el problema de forma algebraica. La pregunta es: estamos acostumbrados a sólidos de revolución de funciones explícitas, en que hacemos uso de $y' = f'(x)$. ¿Cómo trabajamos en este caso?

Lo primero que debemos partir por notar es que el hecho de trabajar en torno al eje $x = 2\pi$ complica las cosas al momento de plantear la integral, razón por la cual puede resultar pertinente usar el Teorema del Centroide de Pappus, en su versión para superficies de revolución.

Partamos por calcular el largo de la curva:

$$\ell(\Gamma) = \int_{x_i}^{x_f} \mathrm{d}\ell$$

Primer problema: el largo de curva requiere y'. ¿Qué hacemos? Recordemos los primeros principios de deducción del largo de curva::

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

No sabemos el valor de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, pero sí sabemos el valor de:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(t) \to \mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'(t) \to \mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t$$

Es decir, en coordenadas paramétricas se tiene que:

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

¿De dónde a dónde debemos integrar? Eso lo sugiere el enunciado:

$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}y$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - \cos(t) \\ y'(t) &= \operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ell &= \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

¿Cómo integramos? Recordemos que:

$$\frac{1-\cos(t)}{2} = \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) \to 2 - 2\cos(t) = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Despejando:

$$\begin{aligned}\ell\left(\Gamma\right) &= 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \\ &= -4\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 4+4\end{aligned}$$

Es decir, $\ell\left(\Gamma\right) = 8$. Ahora tenemos que determinar el centroide **de la curva**, no de la superficie que esta encierra. ¿Cómo lo hacemos? Recordemos que:

$$\mathrm{d}M_y = x\,\mathrm{d}m$$

En este caso, $\mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}\ell$ donde μ es la densidad lineal de masa. Asumiendo densidad constante e integrando:

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell\left(\Gamma\right)} \int_{x_i}^{x_f} x\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Como $\mathrm{d}\ell = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$, entonces:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{\$}\int_0^{2\pi} (t - \operatorname{sen} t)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} t\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\left(t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \pi - 0 \\ &= \pi\end{aligned}$$

La primera integral fue calculada utilizando integración por partes y la segunda es inmediatamente cero ya que es el producto de senos de distinta frecuencia en un período. Finalmente,

$$\bar{x} = \pi$$

lo cual también pudo haber sido comprobado fácilmente por simetría. Observe que como estamos trabajando una revolución en torno al eje $x = 2\pi$, paralelo al eje y, entonces no necesitamos calcular la coorenada $\bar{y}$ del centroide, ya que la distancia al eje en este caso se mide solo como la diferencia entre las coordenadas x. Es decir,

$$r = 2\pi - \pi \to d = 2\pi r = 2\pi^2$$

Finalmente, aplicando el teorema:

$$A = \ell\left(\Gamma\right) d \to \boxed{A = 16\pi^2}$$

Problema 1.35: Encuentre el área de la superficie obtenida al rotar la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en torno a la línea $y = r$, con $r > 0$.

Solución:

Dado que el centroide de la curva y su largo son sencillos de calcular, aplicamos el Teorema del Centroide de Pappus para superficies de revolución. Fácilmente notamos que:

$$\bar{x} = 0 \quad , \quad \bar{y} = 0 \quad , \quad \ell\left(\Gamma\right) = 2\pi r$$

Luego, la distancia al eje $y = r$ es r. Por lo tanto, la distancia recorrida por el centroide es $2\pi r$. Con ello, concluimos que:

$$S = \ell\left(\Gamma\right) 2\pi r \rightarrow \boxed{S = 4\pi^2 r^2}$$

Evidentemente el problema se puede hacer también planteando con cuidado las integrales respectivas dado el cambio de eje. Sin embargo, este ejercicio extiende sustancialmente más los cálculos, razón por la cual se deja propuesta al lector.

1.8. Trabajo (∗)

Nota: Este tipo de problemas son opcionales de acuerdo al programa de cada curso de aplicaciones de cálculo, por lo cual queda como una sección opcional.

De las aplicaciones básicas de un curso de física sabemos que para una partícula a la cual se le aplica una fuerza F y se produce un desplazamiento d el trabajo realizado viene dado por:

$$W = F \cdot d$$

Sin embargo, perfectamente F y/o d pueden variar en el tiempo, i.e. $F = F\left(t\right)$ y/o $d = d\left(t\right)$. Dada la motivación de calcular el trabajo en este caso es que como siempre se puede asumir un enfoque diferencial. En otras palabras,

$$\Delta W \approx d\Delta F \quad \text{o bien} \quad \Delta W = F\Delta d$$

Dependiendo del tipo de problema. Asimismo $\Delta F \approx F'\left(t\right)\Delta t$ ó $\Delta d \approx d'\left(t\right)\Delta t$. Luego, haciendo $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos que:

$$\mathrm{d}W = dF'\left(t\right)\mathrm{d}t \quad \text{o bien} \quad \mathrm{d}W = F(t)d'\left(t\right)\mathrm{d}t$$

según corresponda a cada problema en particular. Integrando de t_1 a t_2 puede ser obtenido el trabajo total. Se revisarán los problemas típicos de trabajo a continuación, donde se puede ver la clara dependencia con respecto a la situación que se busca modelar. Sin embargo, las ideas general son siempre comunes.

Problema 1.36: Un cable de acero uniforme, de 40 metros de largo y con una masa total de 60 kilos cuelga de la azotea de un edificio de altura $H >> 40$. Hallar el trabajo realizado en recoger 10 metros de cable desde la azotea.

Solución:

Ubiquemos el eje de coordenadas donde comienza la cuerda que se enuentra colgando del edificio. Luego, a la altura desde este origen de coordenadas la mediremos como h y por lo tanto la azotea del edificio se encuentra a $h = 40$.

Observe que a medida que el cable sube, la masa restante es:

$$\lambda(40 - h)$$

donde h es la altura actual de la punta inferior del cable y $\lambda = 60/40 = 3/2$ kg/m es la densidad lineal de masa. Luego, la fuerza gravitatoria ejercida hacia abajo por cable es.

$$F(h) = \lambda(40 - h)g$$

con g la constante de aceleración gravitatoria. Luego, el trabajo realizado al mover todo este segmento restante de cuerda en una distancia dh es:

$$\mathrm{d}W = F(h)\mathrm{d}h = \lambda g(40 - h)\mathrm{d}h$$

Tenemos que integrar desde la altura cero hasta la altura 10:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{10} \lambda g(40 - h)\mathrm{d}h \\ &= \lambda g\left(400 - \frac{100}{2}\right) \\ &= 350 \times \frac{3}{2}g \\ &= 525g \end{aligned}$$

Es decir el trabajo realizado es $\boxed{W = 525g}$.

Problema 1.37: Un helicóptero −con su estanque lleno de combustible− pesa 10 toneladas. Asciende verticalmente con velocidad constante, alcanzando 600 metros de altura en un cuarto de hora.

Se sabe que el combustible consumido tras t minutos de vuelo está dado por la expresión

$$\frac{2t}{t+1}$$

medido en toneladas. Calcule el trabajo total realizado por el helicóptero en su ascenso.

Solución:

Tenemos que la masa del helicóptero en cualquier instante viene dada por:

$$m(t) = 10 - \frac{2t}{t+1}$$

Y luego su peso hacia abajo viene dado por:

$$F(t) = -\left(10 - \frac{2t}{t+1}\right) g$$

donde g es la constante de aceleración gravitatoria. Para desplazar al helicóptero en una pequeña diferencia de altura hacia arriba hay que vencer la fuerza gravitatoria, i.e.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= -F(t)\mathrm{d}h \\ &= \left(10 - \frac{2t}{t+1}\right) g\, \mathrm{d}h \end{aligned}$$

Como tenemos que integrar en t ya que $F(t)$ es una función del tiempo, entonces tenemos que expresar dh en términos de dt. Esto se logra notando que:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v = \frac{600}{15} = 40 \quad \mathrm{m/min}$$

ya que según el enunciado la velocidad es constante. Luego,

$$\mathrm{d}h = v\, \mathrm{d}t$$

Es decir,

$$\mathrm{d}W = \left(10 - \frac{2t}{t+1}\right) vg\, \mathrm{d}t$$

Integrando de $t = 0$ a $t = 15$ min según lo pedido se tiene que el trabajo total viene dado por:

$$\begin{aligned} W &= v\int_0^{15} 10\mathrm{d}t - 2v\int_0^{15}\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= 120vg + 2vg\ln 16 \\ &= 2vg\,(60 + \ln 16) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{W = 80g\,(60 + \ln 16)}$$

Problema 1.38: Un estanque de forma esférica con radio 3 tiene una cañería de 1 metro de altura en la parte **superior** y se encuentra completamente lleno de agua. Encuentre el trabajo necesario para bombear todo el fluido fuera del estanque suponiendo que la masa específica del agua (densidad) es ρ_0.

Solución:

El hecho físico que hay que tener claro en este ejercicio es que para retirar el agua del estanque desde la parte superior es necesario remover cada partícula de masa del estanque hasta la parte superior. Si la partícula se encuentra a distancia h en el fondo desde la parte de la cañería, entonces el trabajo necesario para moverla hacia arriba será mayor que el de una partícula a una profundidad $\tilde{h} > h$.

El lector podrá pensar que basta con calcular la masa de agua, su peso y luego multiplicar por la altura del estanque. Sin embargo, esto no es tan sencillo pues una capa de agua a distancia x del estanque se desplaza menos distancia (y por lo tanto requiere menos trabajo a realizar) que una capa a una distancia más profunda del estanque. Este problema, por lo tanto, lo tenemos que resolver con un enfoque diferencial.

Modelemos el estanque con capas de agua cilíndricas, cada una a una distancia x desde la parte superior del estanque (decimos entonces que $\mathrm{d}V$ está a una profundidad x). Observe que tenemos que desplazar la capa agua $\mathrm{d}V$ desde el fondo del estanque hasta la parte superior para poder bombear todo el fluido.

Partamos cuantificando la masa de agua. En una capa de espesor $\mathrm{d}x$ en el estanque se tiene que el volumen de agua se puede aproximar por el área en ese punto por el espesor:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \pi r^2(x)\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(3^2 - x^2\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Luego, la masa en esta capa de volumen es:

$$\mathrm{d}m = \rho_0\,\mathrm{d}V$$

La fuerza requerida para levantar esta capa es:

$$\mathrm{d}F = g\,\mathrm{d}m = \rho_0 g\pi\left(3^2 - x^2\right)\mathrm{d}x$$

Esta capa debe viajar aproximadamente una distancia $x+1$ (se le agrega el metro de cañería) hasta llegar a la parte superior del estanque. Luego,

$$\mathrm{d}W = (x+1)\,\mathrm{d}F = \pi\rho_0 g\,(x+1)\left(3^2 - x^2\right)\mathrm{d}x$$

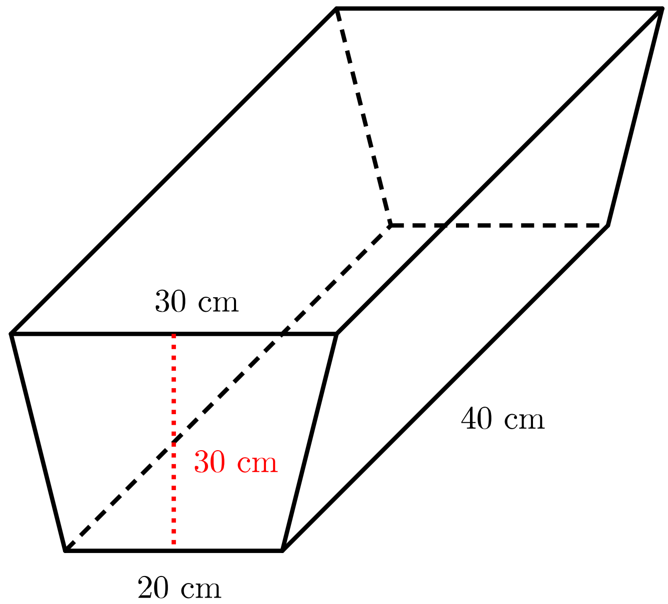
Integrando,

$$W = \rho_0 g\pi\int_{-3}^{3}(x+1)\left(3^2 - x^2\right)\mathrm{d}x$$

Calculando la última integral mediante integración polinomial (se deja propuesto):

$$\boxed{W = 36\rho_0 g\pi}$$

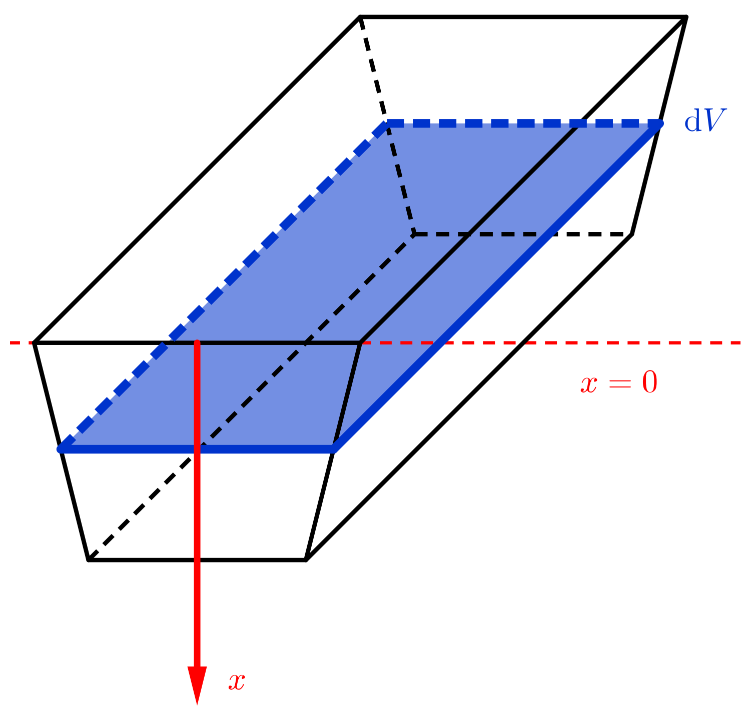
Problema 1.39: La figura es una arteza de base triangular, dos tapas de forma de trapecio y dos laterales rectangulares.



Si la arteza es llenada con agua hasta 25 cm de profundidad, escriba la integral cuyo valor corresponde el trabajo necesario para bombear el agua fuera del recipiente desde arriba.

Solución:

Podemos modelar la situación como sigue a continuación:



El problema de esta situación es que si bien sabemos que para desplazar una masa m una altura h su trabajo es mgh, en este caso a lo largo de x va variando la masa. Por lo tanto, para cada diferencial de masa a posición x, tendemos que hacer un trabajo $xg\,\Delta m$ para llevarlo hasta la parte superior de la arteza.

Es decir, a priori sabemos que:

$$\Delta W = xg\,\Delta m$$

Debemos dejar Δm en términos de $\mathrm{d}x$ para poder escribir adecuadamente la integral. Sin embargo, si llamamos ρ a la densidad, entonces se tendrá que:

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

donde ΔV puede entenderse como toda la región señalada en azul, de espesor Δx, ya que para todo cubito de masa a esa altura el trabajo realizado será constante. Asimismo, ΔV puede entenderse como un paralelepípedo de espesor Δx, alto 40 cm y ancho dado por la recta que delimita la arteza de forma oblicua.

De acuerdo a nuestro sistema de coordenadas, en $x = 0$ el ancho de la arteza es 30 cm y en $x = 30$ cm el ancho de la arteza es 20 cm, disminuyendo de forma lineal. Luego,

$$y = \frac{30-20}{0-30}(x-0) + 30 = 30 - \frac{x}{3}$$

Por lo tanto,

$$\Delta V \approx 40\left(30 - \frac{x}{3}\right)\Delta x$$

Y luego,

$$\Delta W \approx 40\rho g x\left(30 - \frac{x}{3}\right)\Delta x$$

Haciendo $\Delta x \to 0$ para obtener el trabajo exacto obtenemos la relación simbólica:

$$\mathrm{d}W = 40\rho g x\left(30 - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x$$

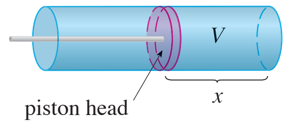
Dado que la arteza esta llena hasta una profundidad 25 cm, debemos partir integrando desde 5 cm hasta 30 cm. De esa forma,

$$\boxed{W = 40\rho g \int_5^{30} x\left(30 - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x}$$

Se deja propuesto al lector el cálculo de esta integral polinomial.

Problema 1.40: Cuando un gas se expande en un cilindro de radio r, la presión en cualquier instante es una función del tiempo del volumen: $P = P(V)$. La fuerza ejercida por el gas en el pistón es el producto de la fuerza por el área. Muestre que el trabajo realizado por el gas cuando se expande de un volumen V_1 a un volumen V_2 es:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,\mathrm{d}V$$



Solución:

Observe que la fuerza ejercida puede comprenderse entonces como:

$$F = \pi r^2 P(V)$$

Entonces un diferencial de trabajo por efecto de mover el pistón una distancia $\mathrm{d}x$ puede escribirse como:

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}x = P(V)\pi r^2 \mathrm{d}x$$

Pero $\pi r^2 \mathrm{d}x$ es el área por un diferencial de distancia al mover el pistón en $\mathrm{d}x$. Luego,

$$\pi r^2 \mathrm{d}x = \mathrm{d}V$$

con lo cual, integrando:

$$\mathrm{d}W = P(V)\mathrm{d}V \to \boxed{W = \int_{V_1}^{V_2} P(V)\,\mathrm{d}V}$$

demostrando así lo pedido. Solo a modo de comentario observe que desplazarse desde un volumen V_1 hasta un volumen V_2 puede parecer extraño, pero en realidad apunta a exactamente lo mismo que desplazarse desde una posición x_1 en la ubicación del pistón hasta una posición x_2, lo cual evidentemente se traduce en un cambio de volumen. ■

1.9. Extensión a coordenadas paramétricas

Áreas y centroides. Para deducir cómo medir áreas encerradas por curvas cartesianas, recordamos las expresiones en coordenadas cartesianas:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}x = \int_{y_1}^{y_2} x\,\mathrm{d}y$$

En ambos casos se hace $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$ ó $\mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t$ y se reemplaza con las expresiones cartesianas para obtener el resultado pedido. Es muy aconsejable en muchos casos dibujar el área encerrada si es que no se especifican adecuadamente los límites de integración. Asimismo, eventualmente el signo de $x'(t)$ puede ser negativo al derivar. No es pertinente entrar en detalles por ahora, pero en dichos casos se puede simplemente tomar el módulo y obtener el área con el signo positivo adecuado.

Se hace una deducción exáctamente análoga para momentos y centroides a partir de las fórmulas cartesianas. Revisaremos esto en la práctica en el siguiente problema.

Problema 1.41: Considere la región $\mathcal{R}$ encerrada por la curva de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t)\,\mathrm{sen}(t) \\ y(t) &= \mathrm{sen}(t) \end{aligned}$$

para $t \in (0, \pi)$.

(a) Esboce $\mathcal{R}$ y calcule su área.

(b) Hallar las coordenadas del centro de masa de $\mathcal{R}$.

Solución:

Siempre en las curvas parámetros, cuando se requiera graficar la curva en cuestión, lo ideal es poder buscar una relación entre x e y, ya que hacerlo a partir de las coordenadas simultáneamente no resulta del todo sencillo. En este caso, notemos que:

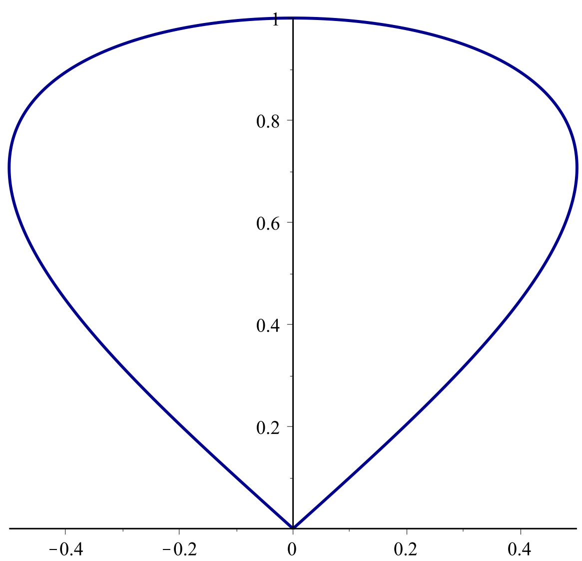
$$\begin{aligned} x^2(t) &= \cos^2(t)\operatorname{sen}^2(t) \\ &= \left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)\operatorname{sen}^2 t \\ &= \left[1-y^2(t)\right]y^2(t) \end{aligned}$$

Es decir, los puntos de la curva cumplen la relación implícita $x^2 = (1-y^2)\,y^2$. Sin embargo, hay que tener cierta precaución, pues como $t \in (0,\pi)$ entonces se tiene que $y(t) \geq 0$. Salvo eso, observe el lector que la curva es simétrica en torno al eje Y puesto que si $(x_0, y_0) \in \Gamma$ (satisface la ecuación implícita), entonces $(-x_0, y_0) \in \Gamma$ también pues la ecuación se sigue satisfaciendo.

Luego, solo nos preocupamos de graficar la curva en el primer cuadrante $(x, y \geq 0)$:

$$x = \sqrt{1-y^2}\,y$$

Esta es una función continua, diferenciable, positiva y con raíces en 0 y 1. Luego, a partir del Teorema de Rolle es sencillo esbozar el lado derecho junto a su reflejo:



Para calcular el área de $\mathcal{R}$ (el área encerrada por la curva), podemos observar que dado que obtuvimos de forma sencilla x como función de y, entonces resulta más pertinente integrar en y. Luego, la representación simbólica del área puede entenderse como rectángulos de ancho $2x$ y altura $\mathrm{d}y$, i.e.

$$\mathrm{d}A = 2x\,\mathrm{d}y$$

Como y es diferenciable, $\mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t$. Es decir,

$$\mathrm{d}A = 2x\left(t\right)y'\left(t\right)\mathrm{d}t$$

Integramos de 0 a $\pi/2$, pues por el simple hecho de considerar como $2x\left(t\right)$ el ancho del rectángulo ya estamos considerando el lado de la curva para $(\pi/2, \pi)$. Es decir,

$$A = 2\int_0^{\pi/2} x(t)y'(t)\mathrm{d}t$$

Como $y'(t) = \cos\left(t\right)$ reemplazamos directamente,

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2\left(t\right)\operatorname{sen}\left(t\right)\mathrm{d}t$$

Dado que aparece coseno y su derivada, hacemos la sustitución $u = \cos\left(t\right) \to \mathrm{d}u = -\operatorname{sen}\left(t\right)\mathrm{d}t$. Es decir,

$$A = 2\int_0^1 u^2\mathrm{d}u$$

Es decir, $\boxed{A = \dfrac{2}{3}}$.

(b) Partimos ahorrando trabajo y notamos que de la simetría de la figura se concluye inmediatamente que $\bar{x} = 0$. Es decir, nuestros esfuerzos solo deben concentrarse en calcular $\bar{y}$. Para ello, notamos que en este caso podemos aproximar cada diferencial de momento en torno al eje x como rectángulos de área $\mathrm{d}A$ igual que la vista anteriormente y ponderados por la posición y respectiva. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M_x &= x\,\mathrm{d}A = x(t)2x(t)y'(t)\,\mathrm{d}y \\ &= 2x^2\left(t\right)y'(t)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Integrando nuevamente de 0 a $\pi/2$:

$$M_x = 2\int_0^{\pi/2} \cos^3\left(t\right)\operatorname{sen}^2\left(t\right)\mathrm{d}t$$

Para resolver esta integral notamos que:

$$M_x = 2\int_0^{\pi/2} \cos\left(t\right)\left[1 - \operatorname{sen}^2\left(t\right)\right]\operatorname{sen}^2\left(t\right)\mathrm{d}t$$

Hacemos $u = \operatorname{sen}\left(t\right) \to \mathrm{d}u = \cos\left(t\right)\mathrm{d}t$. Con ello,

$$\begin{aligned} M_x &= 2\int_0^1 u^2\left(1 - u^2\right)\mathrm{d}u \\ &= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 2\left(\frac{5-3}{15}\right) \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Dividiendo por el área:

$$\bar{y} = \frac{4}{15}\cdot\frac{3}{2} = \frac{2}{5}$$

Es decir, las coordenadas del centroide se ubican en $\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{2}{5}\right)}$.

Sólidos de revolución. Nuevamente recurrimos a las expresiones cartesianas, reemplazamos x e y con las ecuaciones paramétricas y adaptamos el diferencial a conveniencia. Nuevamente se recomienda dibujar la región de integración para tener una idea adecuada del método de integración que conviene utilizar.

Problema 1.42: Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la astroide definida por la parametrización

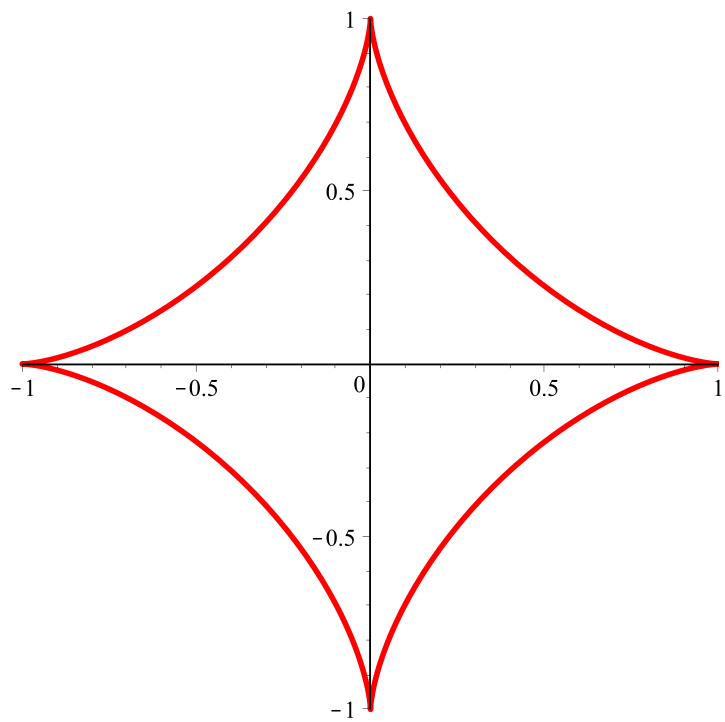
$$x = a\cos^3 t$$

$$y = a\,\mathrm{sen}^3\, t$$

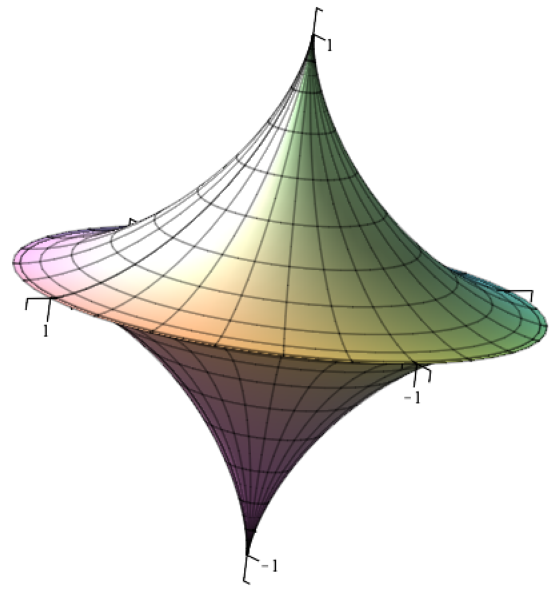
con $t \in [0, 2\pi]$ en torno al eje Y.

Solución:

Un astroide es una figura que al rotarla en torno al eje y requiere utilizar el volumen por casquetes cilíndricos para generar el sólido deseado. En efecto, el astroide tiene la forma:



Rotando en torno al eje Y se genera un sólido como el siguiente:



Recordamos asimismo que en coordenadas cartesianas el volumen de revolución en torno al eje y viene dado por:

$$V_y = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} xy \, \mathrm{d}x$$

En este caso llevar al sistema parámetrico es sencillo pues conocemos el valor de x e y en dichas coordenadas. Solamente basta notar que $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$ e incluso así tenemos el diferencial bien expresado.

Sin embargo, por simetría podemos integrar desde 0 a $\pi/2$ para obtener solamente $1/4$ del astroide y luego multiplicar el volumen por 2 para obtener el resultado total. De esta forma,

$$\begin{aligned} V_y &= 4\pi \int_0^{\pi/2} x(t)\, y(t)\, x'(t)\, \mathrm{d}t \\ &= 4\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \, \operatorname{sen}^3 t \, 3\cos^2 t \, (-\operatorname{sen} t)\, \mathrm{d}t \\ &= -12\pi a^3 \int_9^{\pi/2} \cos^5 t \, \operatorname{sen}^4 t \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Observe que aparece un signo negativo por efecto de la derivada de x. Esto solo está indicando que la coordenada x ahí es decreciente. Por lo tanto, podemos obviar este signo tomando el módulo para obtener la medida geométrica de interés[3]. Es decir,

$$V_y = 12\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^5 t \, \operatorname{sen}^4 t \, \mathrm{d}t$$

Para resolver esta integral notamos que:

$$\cos^5 t = \left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right)^2 \cos t$$

con lo cual

$$V_y = 12\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right)^2 \operatorname{sen}^4 t \, \cos t \, \mathrm{d}t$$

[3]Si bien esto suena poco convincente, en estricto rigor $dx = |x'(t)|\, dt$, lo cual valida completamente el resultado. Esto se estudia en más detlale en el curso de Cálculo III.

Es inmediata la conveniencia de hacer $u = \operatorname{sen} t \to \mathrm{d}u = \cos t \, \mathrm{d}t$. De esta forma,

$$V_y = 12\pi a^3 \int_0^1 \left(1 - u^2\right)^2 u^4 \, \mathrm{d}u$$

Luego, expandiendo e integrando de forma polinomial se llega al resultado:

$$\boxed{V_y = 4\pi a^3 \frac{8}{315}}$$

Longitud de arco y superficie de revolución. Para calcular la longitud de arco debemos determinar el diferencial de largo en primer lugar. Simbólicamente,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ell &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \\ &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Entonces integrando de t_1 a t_2 tenemos que:

$$\boxed{\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, \mathrm{d}t}$$

Todos estos problemas por lo general se reducen a encontrar la técnica de integración adecuada, pues no debemos desconocer que por lo general resolver integrales con composiciones de raíces no es un problema sencillo habitualmente.

Exactamente de la misma forma pueden calcularse las áreas de superficies de revolución, solo basta hacer la representación simbólica adecuada.

Problema 1.43: Dado el arco $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \ln\left[\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\right] \\ \\ y(t) = \operatorname{sen}(t) \end{cases}$ con $\dfrac{\pi}{4} \leq t \leq \dfrac{3\pi}{4}$.

Calcule la longitud del arco y el área de la superficie obtenida al girar el arco en torno al eje OX.

Solución:

(a) Calculamos a partir de la fórmula ya deducida. Derivamos:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\operatorname{sen}(t) + \frac{\sec^2\left(\dfrac{t}{2}\right)}{2\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)} = -\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)} \\ &= -\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \end{aligned}$$

$$y'(t) = \cos(t)$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\ell &= \sqrt{\operatorname{sen}^2(t) - 2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2(t)} + \cos^2(t)} \\
&= \sqrt{\csc^2(t) - 1}\mathrm{d}t \\
&= |\cot(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} |\cot(t)|\,\mathrm{d}t = 2\log\left[\operatorname{sen}(t)\right]\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/4} \\
&= 2\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \log\left(\frac{2}{4}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, $\boxed{\ell = \log\left(\frac{1}{2}\right)}$.

(b) La representación simbólica del diferencial de superficie en torno al eje OX es:

$$\mathrm{d}A = 2\pi y(t)\,\mathrm{d}\ell$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen}(t)\,|\cot(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} |\cos(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= 2 \times 2\pi \operatorname{sen}(t)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{A = 2\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)}$$

Problema 1.44: Considere la curva:

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^4}{2} + \frac{2t^6}{3}, \frac{2t^3}{3} + \frac{4t^5}{5}\right)$$

Encuentre $t_0 > 0$ para el cual el largo de γ sobre $[0, t_0]$ es $\frac{2}{3}$.

Solución:

Podemos calcular el largo para t_0 general. Así generaremos una ecuación algebraica igualada a $2/3$ y luego despejamos. Calculemos entonces el largo entre 0 y t_0 de γ. Para ello, obtenemos el $\mathrm{d}\ell$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2t^3 + 4t^5 = ty'(t) \\ y'(t) &= 2t^2 + 4t^4 \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ell &= y'(t)\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(2t^2+4t^4\right)\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(2t+4t^3\right)\sqrt{t^2+t^4}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t_0:

$$\ell = \int_0^{t_0} \left(2t+4t^3\right)\sqrt{t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$$

Notar que $(t^2+t^4)' = (2t+4t^3)$. Entonces, hacemos $u = t^2+t^4 \to \mathrm{d}u = (2t+4t^3)\,\mathrm{d}t$. Luego,

$$\begin{aligned} \ell(t_0) &= \int_0^{t_0^2+t_0^4} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{3}\left(t_0^2+t_0^4\right)^{3/2} \end{aligned}$$

Luego, buscamos que:

$$\frac{2}{3}\left(t_0^2+t_0^4\right)^{3/2} = \frac{2}{3} \to \left(t_0^2+t_0^4\right) = 1$$

Resolvemos la ecuación:

$$t_0^4 + t_0^2 - 1 = 0 \to t_0^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

donde nos quedamos con la raíz positiva ya que por axiomática real $t_0^2 > 0$.Finalmente, como $t_0 > 0$ para que el largo sea positivo, entonces:

$$\boxed{t_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$$

Problema 1.45: Considere la curva Γ dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = 3t^2 \quad , \quad y(t) = 3t - t^3 \quad \text{con } t \in [0,1]$$

(a) Sea $\mathcal{R}$ la región comprendida entre Γ y OX. Hallar el volumen del sólido engendrado por la rotación de $\mathcal{R}$ en torno a OY.

(b) Hallar el área de la superficie de revolución engendrada por la rotación de Γ en torno al eje OX.

Solución:

(a) Para resolver estos problemas recordamos siempre la fórmula simbólica de los diferenciales y luego aplicamos el sistema de coordenadas respectivo. En este caso, recordamos que un diferencial de volumen en el sólido de revolución en torno al eje OY de la región encerrada por Γ y OX puede entenderse como el volumen de un casquete cilíndrico. Es decir,

$$\mathrm{d}V = 2\pi xy\,\mathrm{d}x$$

Luego, aplicamos el contexto en el sistema de coordenadas. Tenemos que:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad \text{y} \quad \mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$$

Se hizo el cambio de diferencial para poder integrar correctamente en función de t, ya que a priori no tenemos como hacerlo directamente en x dado el sistema de coordenadas. Luego,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x(t)y(t)x'(t)\mathrm{d}t \\ &= 2\pi \int_0^1 3t^2\left(3t - t^3\right)6t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Esta última no es más que una integral polinomial que puede calcularse de forma sistemática, pero tediosa. El volumen final corresponde entonces a:

$$\boxed{V = \frac{576}{35}\pi}$$

(b) Ahora en este caso recordamos la forma simbólica para el diferencial de superficie. Al tratarse de anillos transversales al eje OX, tenemos que:

$$\mathrm{d}A = 2\pi y\,\mathrm{d}\ell$$

¿Qué cambia respecto al sistema de coordenadas cartesianas? Que $y = y(t)$ y que:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ell &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \\ &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas respectivas:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 6t \\ y'(t) &= 3 - 3t^2 \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{36t^2 + (3 - 3t^2)^2}\,\mathrm{d}y$$

Expandimos, tratando de completar cuadrados:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ell &= \sqrt{36t^2 + 9 - 18t^2 + 9t^4}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{(3t^2 + 3)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(3t^2 + 3\right)\mathrm{d}t \leftarrow \text{pues } 3t^2 + 3 > 0 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathrm{d}A = 2\pi \left(3t - t^3\right) \left(3t^2 + 3\right) \mathrm{d}t$$

Integrando,

$$\begin{aligned} A &= 3\pi \int_0^1 2t \left(3 - t^2\right) \left(t^2 + 1\right) \mathrm{d}t \\ &= 3\pi \int_0^1 (3 - u)(u + 1) \,\mathrm{d}u \\ &= 3\pi \int_0^1 \left(2u + 3 - u^2\right) \mathrm{d}u \\ &= 3\pi \left(u^2 \Big|_0^1 + 3 - \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 \right) \end{aligned}$$

Finalmente, $\boxed{A = 11\pi}$.

1.10. Extensión a coordenadas polares

Otra representación útil para figuras con ciertos tipos de simetría en torno al origen es la representación polar, donde un punto (x, y) pasa a ser representado por su distancia al origen ρ y su ángulo con respecto al eje x $-\theta-$ recorrido en sentido anti horario. En otras palabras,

$$(x, y) \longrightarrow (\rho, \theta)$$

Para ello se puede hacer la siguiente conversión:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Asimismo, la relación inversa es:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Así como en el sistema cartesiano ya hemos trabajado muchas veces con funciones del tipo $y = f(x)$ en que la coordenada y depende del valor que se tome en x, en el sistema polar es común hacer representaciones del tipo $\rho = \rho(\theta)$. Es decir, la componente radial dependiendo del ángulo en cuestión. De esta forma,

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \rho(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) &= \rho(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}$$

con lo cual se hace evidente que las coordenadas polares no son más que un caso particular de coordenadas paramétricas.

Partiremos el estudio de las coordenadas polares estudiando efectivamente cómo graficar este tipo de relaciones en el gráfico polar.

Importante: Se recomienda revisar el siguiente problema, pues en el generaremos todos los gráficos en detalle y detectaremos propiedades de los gráficos polares, los cuales son a su vez básicamente todos los que habitualmente se utilizan para elaborar problemas pedagógicos.

Problema 1.46: Grafique las siguientes curvas polares. Introduzca un valor pertinente en cada caso:

(a) Circunferencia(s): $\rho(\theta) = r\cos(\theta)$ y $\rho(\theta) = r\,\text{sen}(\theta)$. $r > 0$ fijo y arbitrario.

(b) Rosa polar: $\rho(\theta) = r\cos(n\theta)$ y $\rho(\theta) = r\,\text{sen}(n\theta)$. Pruebe para distintos valores de n. $r > 0$ es fijo y arbitrario.

(c) Lemniscata: $\rho^2(\theta) = a\cos(2t)$ y $\rho^2(\theta) = a\,\text{sen}(2\theta)$ con $a > 0$ fijo y arbitrario.

(d) Cardioide: $\rho(\theta) = a(1 - n\cos\theta)$. con n **entero**. Pruebe para distintos valores de n.

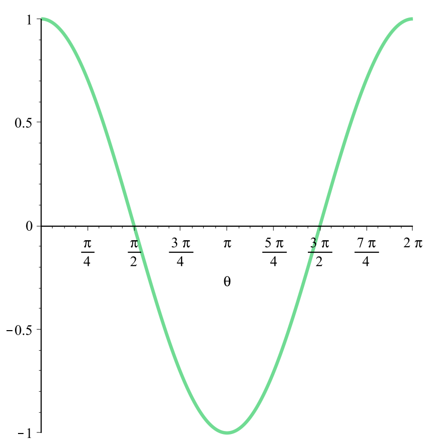
Dado un gráfico de la forma $\rho = \rho(\theta)$, ¿qué puede decir del gráfico de $\rho(\theta - \pi/2)$? ¿y de $3\rho(\theta)$? ¿qué representa la curva $\theta = \pi/4$?

Solución:

Siempre la mejor idea para resolver este tipo de problemas es partir generando un gráfico cartesiano en que ubicamos θ en el eje x y ρ en el eje y, ya que esto nos da una idea adecuada de cómo se comporta la componente radial en función del θ en el cual nos encontramos ubicados.

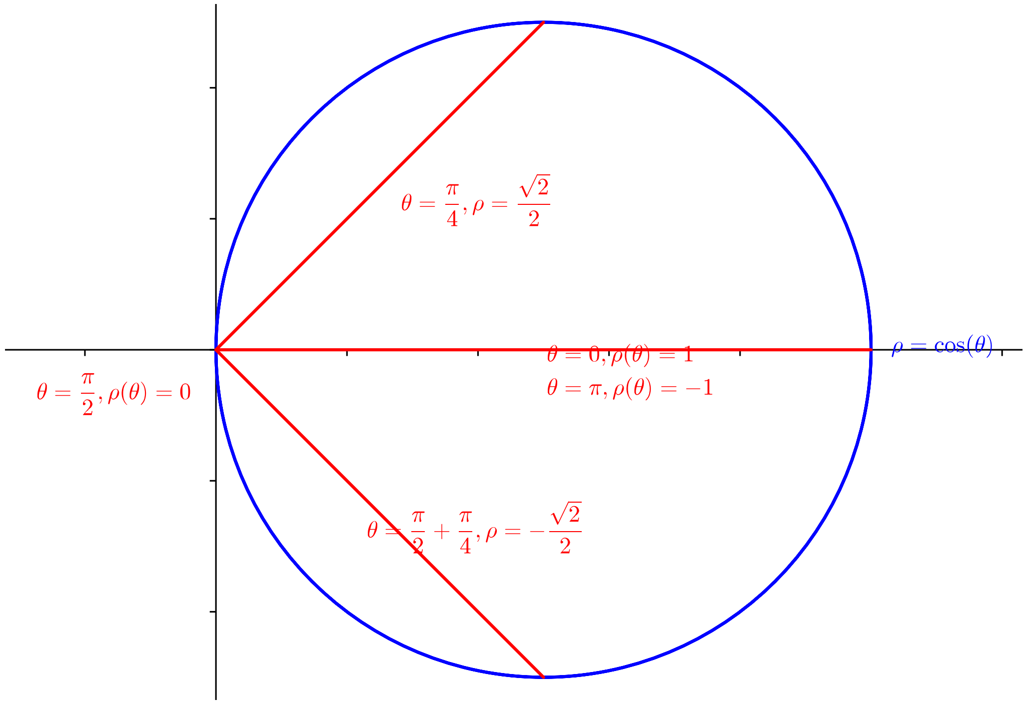
Asimismo, conviene ser astutos y ser capaces de detectar simetrías. Sin embargo, cada caso se revisará en los ejemplos a continuación.

(a) Graficamos ρ en función de θ tal como se indicó:



Observe que $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$ por la simetría de la función de la definición. Por lo tanto, el barrido radial que hagamos en el sentido antihorario (θ) tiene que generar el mismo en el sentido horario $(-\theta)$, por lo tanto existe una simetría en torno al eje x, lo cual nos puede ser de utilidad para graficar la función.

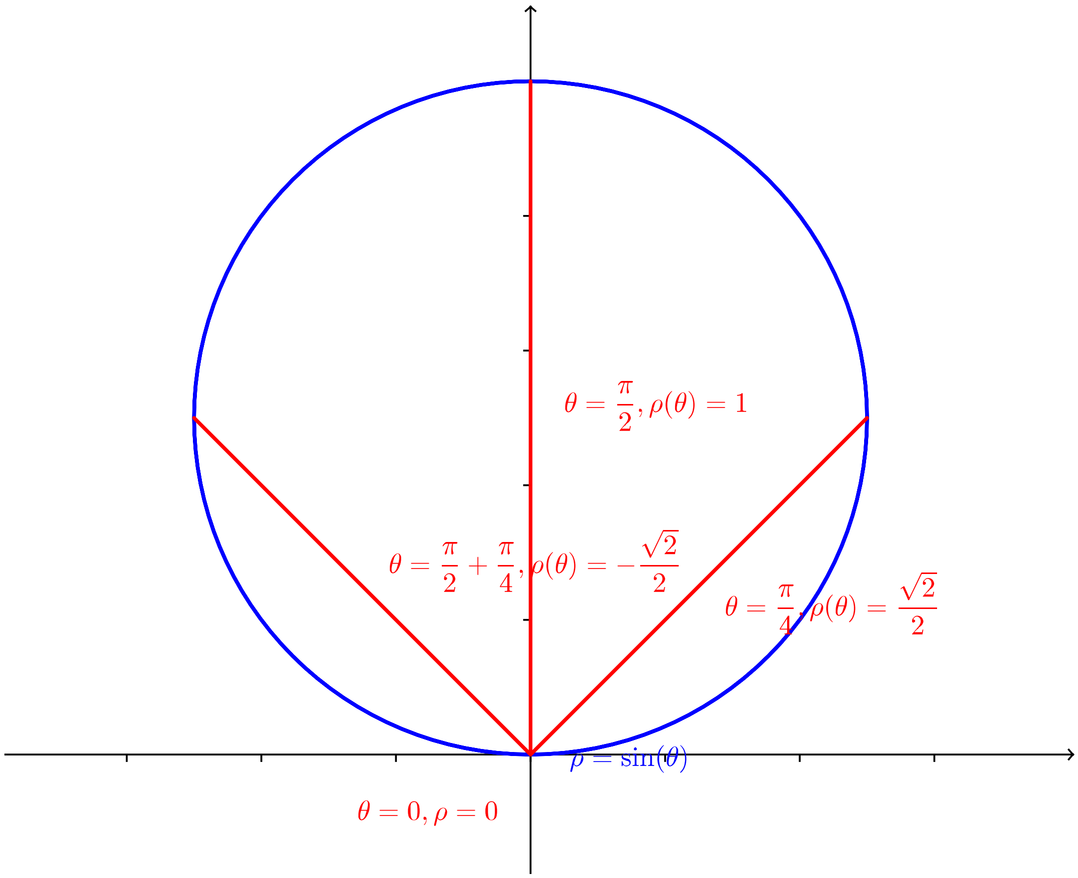
Finalmente, graficamos haciendo esta consideración y tomando algunos valores particulares:



En efecto, esta figura corresponde a una circunferencia y mediante un poco trabajo algebraico adicional se puede demostrar que es efectivamente así.

Para el caso $\rho(\theta) = \operatorname{sen}\theta$ notamos ahora que $\rho(\theta - \pi/2) = \rho(-\theta - \pi/2)$ (piende en la función seno, esta tiene claramente un eje de simetría par en $x = \pi/2$), por lo cual el barrido desde $\pi/2$ tiene que ser igual. Es decir, existe una simetría en torno al eje y.

Tomando algunos valores obtenemos así la siguiente figura:

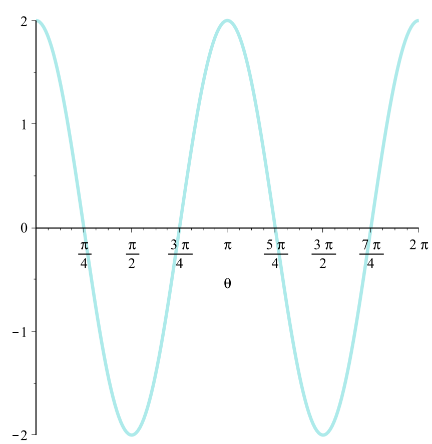


Observe que es la misma gráfica anterior rotada en 90º en sentido antihorario. **Esto no es ninguna casualidad**. En efecto, si notamos que:

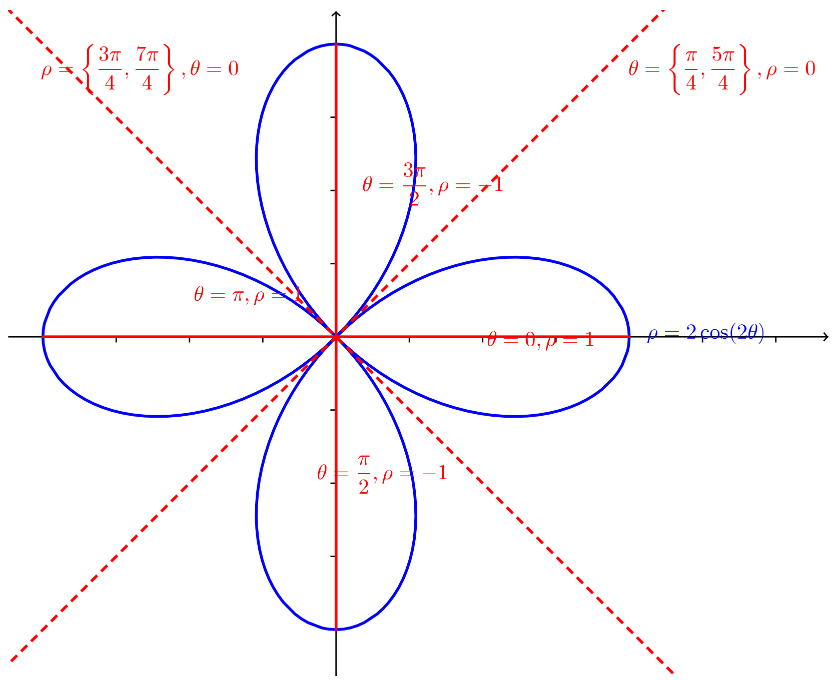
$$\operatorname{sen}(\theta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

entonces es fácil notar que la nueva gráfica es la misma gráfica tomada anteriormente con coseno, pero este desfase en 90º debe ser representado. Un valor ρ_1 de la primera curva obtenido en θ_1 será ubicado en la segunda curva en $\theta_1 + \pi/2$ (para cancelar los $-\pi/2$), por lo que efectivamente este atraso en 90º se representa como una rotación en 90º en sentido anti horario.

(b) Asumamos $r = n = 22$. Graficamos ρ en función de θ:

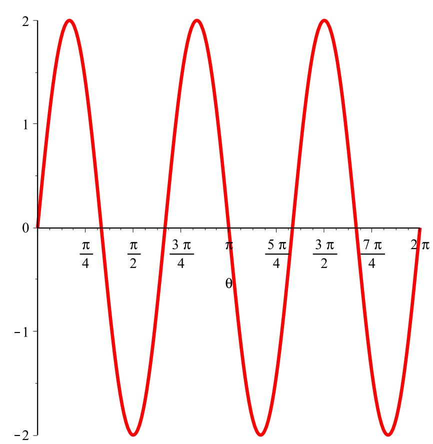


Se observa nuevamente simetría en torno al eje x pues $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$. Por lo tanto, graficamos solo los primeros dos cuadrantes y luego reflejamos en torno al eje x. Tomando algunos de los valores se obtiene la siguiente figura:

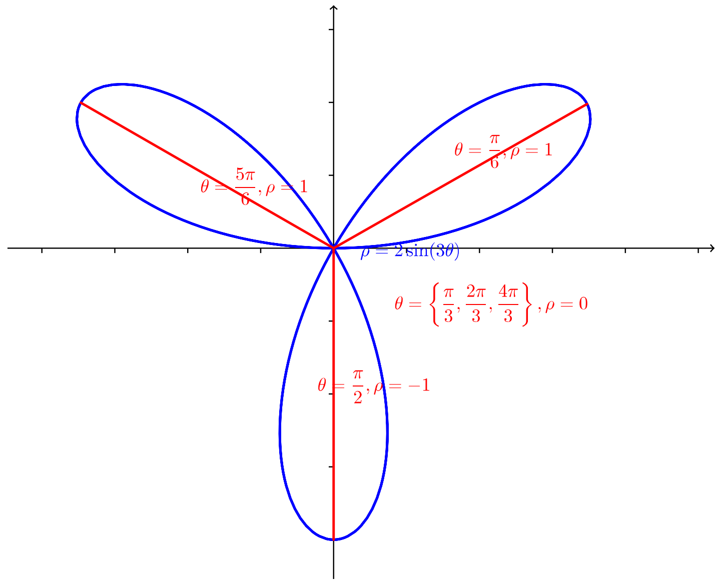


Se puede demostrar experimentando que para un n par el número de pétalos de la rosa es $2n$ en este caso.

Revisemos ahora el caso $n = 3$ en la función seno, asumiendo $r = 2$. En este caso el gráfico es el siguiente:



Si bien se puede demostrar la existencia de una simetría, esta no es tan evidente desde el punto algebraico, por lo que la omitiremos para concentrarnos exclusivamente en graficar a partir de la tabla de valores. Tomando algunos puntos se obtiene que:



De la misma forma se puede demostrar que si n es impar se obtienen n pétalos en la figura.

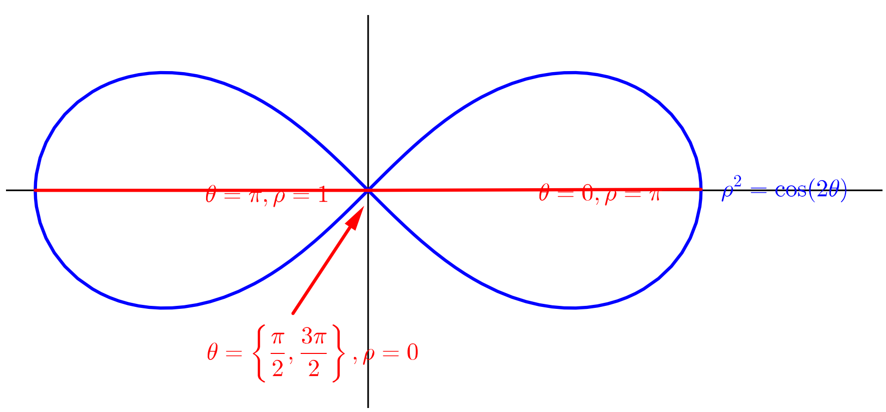
(c) Observe que ahora tenemos una relación implícita, de donde puede despejarse:

$$\rho_1 = \sqrt{\cos(2\theta)} \quad \text{y} \quad \rho_2 = -\sqrt{\cos(2\theta)}$$

donde ambos resultados son igualmente válidos pues efectivamente satisfacen la ecuación implícita. Por lo tanto, se puede tomar ρ_1 y graficarlo como ya se ha hecho para posteriormente tomar dicha gráfica y proyectarla con la componente radial invertida en signo.

Se puede notar asimismo que $\rho_1(\theta) = \rho_1(-\theta)$ por lo cual existe simetría en torno al eje x de la figura. Y adicionalmente, debemos notar que ρ_1 y en general ρ no aceptan cualquier valor de θ, deben ser solo aquellos θ para los cuales $\cos(2\theta)$ es positivo.

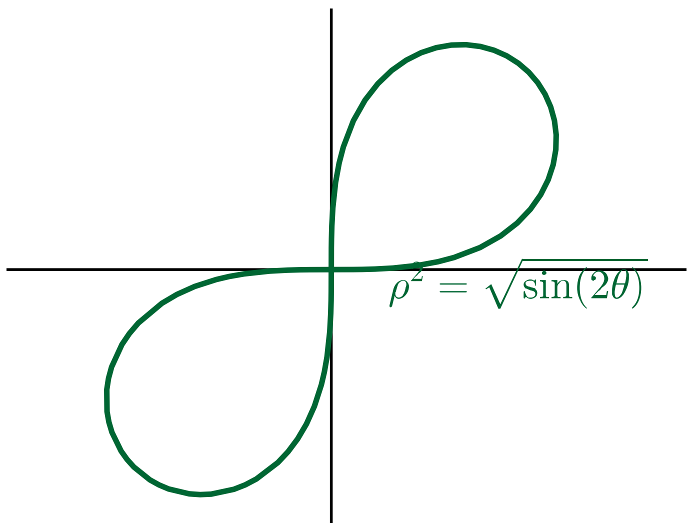
En el intervalo $[0, 2\pi]$ se puede notar fácilmente a partir de la gráfica de $\cos(2x)$ que coseno es positivo en los intervalos $[0, \pi/4]$, $[3\pi/4, 5\pi/4]$ y $[7\pi/4, 2\pi]$. Tomando algunos de los valores obtenemos finalmente la figura:



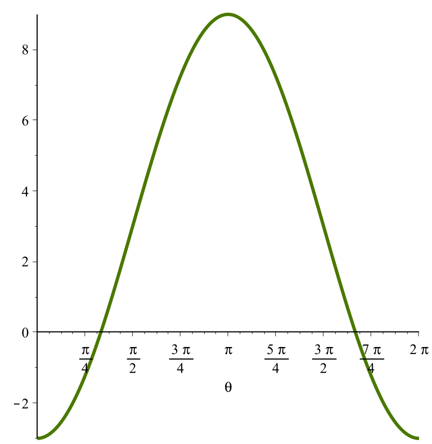
que contempla ambos casos. Debido a lo ya estudiado, es fácil notar que

$$\operatorname{sen}(2\theta) = \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

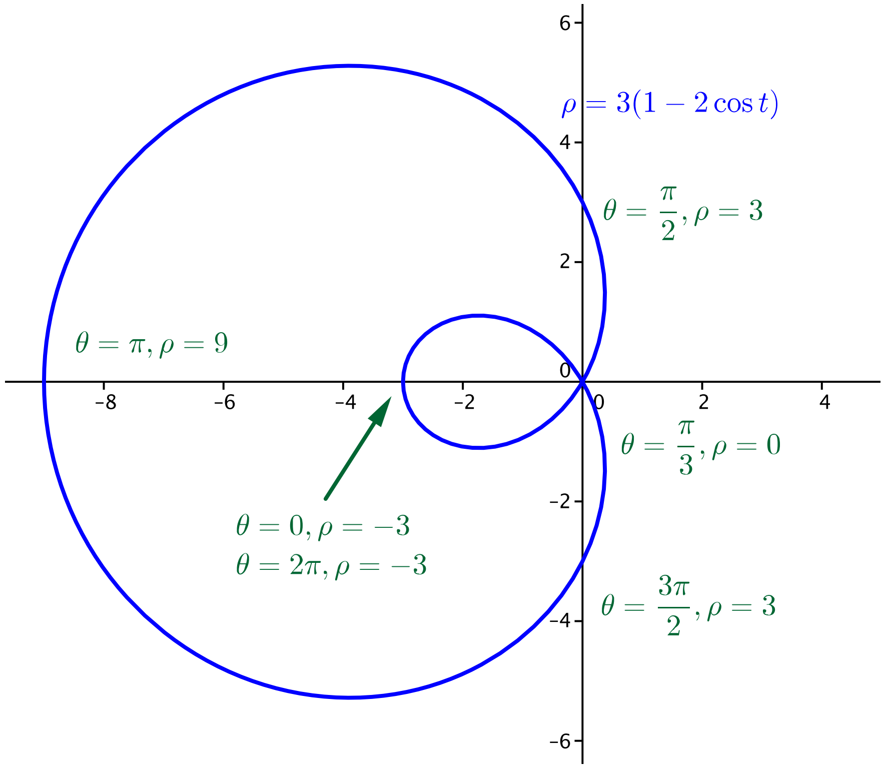
lo cual indica que la misma gráfica obtenida anteriormente debe ser rotada en $\pi/4$ en sentido antihorario, lo cual podemos comprobar en efecto de forma gráfica:



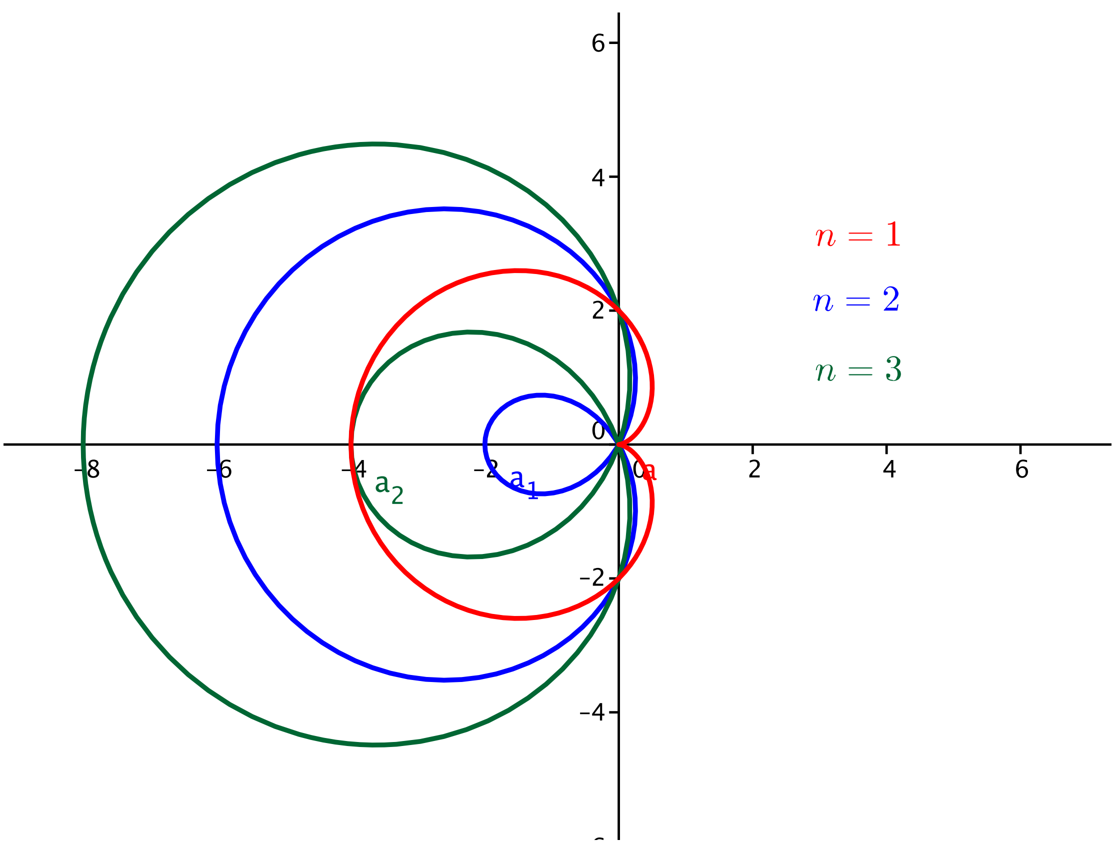
(d) Si bien se puede hacer el estudio para distintos valores de n, nos centraremos por lo interesante del resultado en el caso $a = 3$ y $n = 2$. Graficando ρ en función de θ:



Nuevamente se puede notar que $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$ por lo cual existe simetría en torno al eje x. Tomando algunos valores y uniéndolos mediante trazas continuas obtenemos una gráfica como la siguiente:



En $n = 1$ se obtiene el caso crítico de un cardioide y al aumentar n se acentúa este lazo interior. Esto se puede resumir gráficamente en la siguiente figura:

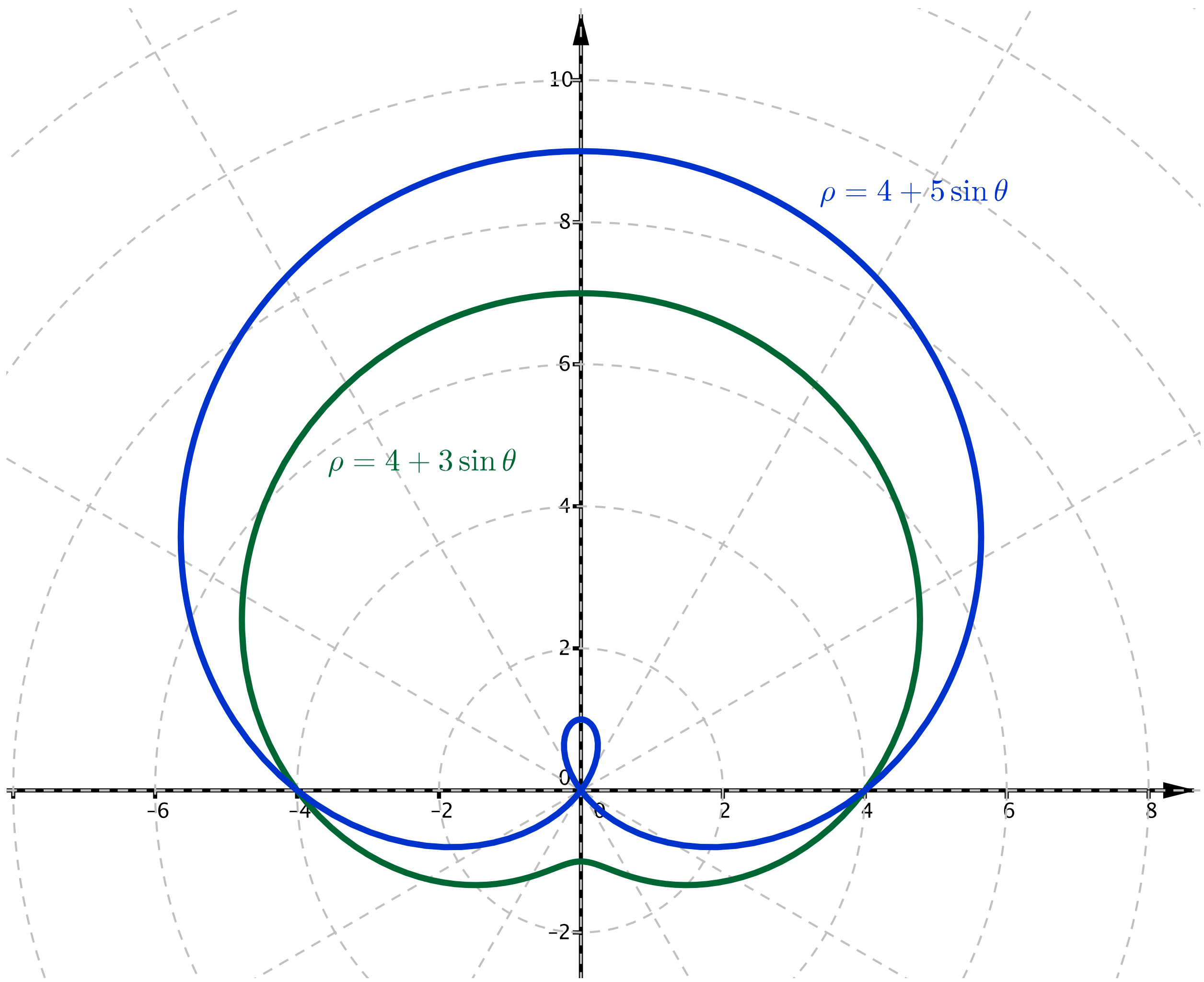


El lector no debiese tener dificultad en notar que aumentar el valor de a solo amplifica los valores de la curva tanto en el eje x y en el eje y, así como que reemplazar coseno por seno rota la figura en 90º en sentido anti horario.

Si n es negativo, lo cual también es una opción válida podemos notar que en dicho caso la componente radial nunca se anulará. En efecto,

$$\rho(\theta) = a(1 + m\cos\theta) \geq 0$$

Observe que de acuerdo a las combinaciones de los números se puede generar un lazo interno como podría no generarse. A modo de ejemplo, graficamos $\rho = 4 + 5 \operatorname{sen}\theta$ y $\rho = 4 + 3 \operatorname{sen}\theta$:

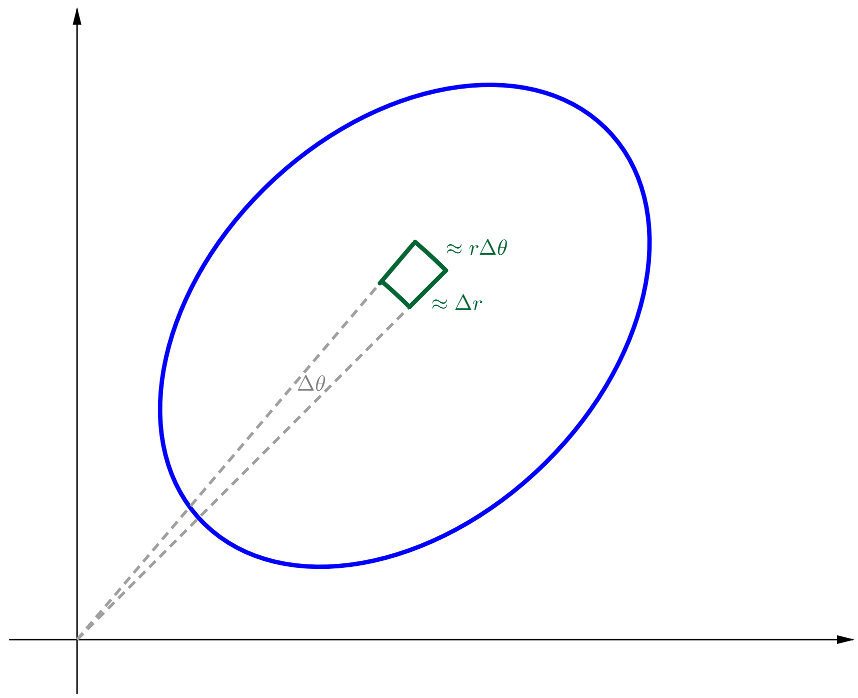


Aquí se evidencia que si $\rho = a + b \operatorname{sen}\theta$ con a, b reales positivos, entonces se producirá lazo interno si $b > a$, lo cual guarda directa relación con el hecho de que en dicho caso ρ si podrá tener valores negativos pues la amplitud de b es mayor que su componente constante.

Áreas. Se pueden demostrar diversas propiedades diferenciales en el sistema polar. A modo de ejemplo, la derivada tal como la conocemos se puede obtener en el sistema polar a partir de la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = -\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,(\theta)}{\rho\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$$

Sin embargo, son de particular las propiedades integrales. En particular, en los siguientes problemas nos centraremos en determinar áreas de figuras polares. Para ello, consideremos el objetivo de calcular el área encerrada entre dos curvas polares cualesquiera como en la figura siguiente:



La expresión simbólica para el diferencial de área es:

$$\Delta A \approx \Delta x \Delta y \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \to 0} \mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Sin embargo, los cuadraditos diferenciales en este caso pueden ser aproximados como sigue:

$$\Delta A = \underbrace{r\Delta\theta}_{(*)}\Delta r$$

En $(*)$ notar que es equivalente al largo del segmento de circunferencia de radio r y en un ángulo de barrido $\Delta\theta$, tal como en toda la circunferencia sería $r \cdot 2\pi$. Luego, tomando los deltas hacia cero:

$$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Mediante el Teorema de Sustitución para Integrales Múltiples (revisado en el curso Cálculo III) se verifica formalmente este resultado. Por ahora concentrémonos en integrar estos dA para obtener el área total, lo cual no es más que un proceso iterativo muy sencillo.

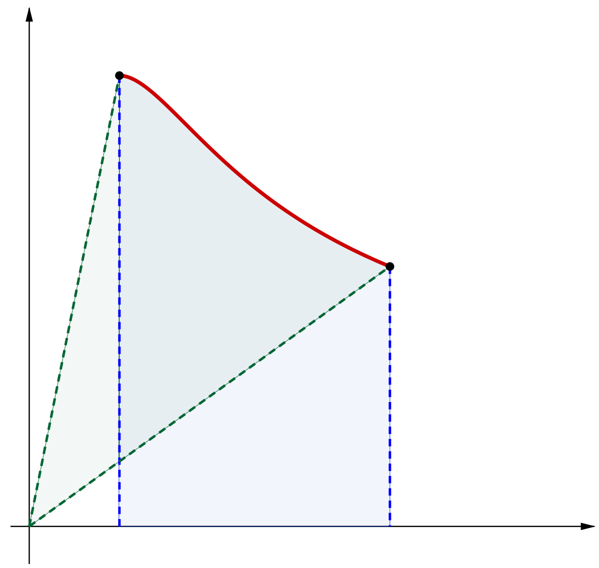
Si integramos radialmente, obtenemos todos los cuadraditos para un ángulo θ dado. Luego, tenemos que integrar desde $\rho_1(\theta)$ hasta $\rho_2(\theta)$. Luego, cada uno de estos segmentos para θ dado deben ser sumados desde θ_1 hasta θ_2. Es decir,

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

La integral de más adentro resulta muy sencilla de calcular, pues es polinomial. Así obtenemos la fórmula para el área:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)\right] \mathrm{d}\theta}$$

Observe cómo dedujimos la fórmula para el diferencial de área y cómo estamos integrando en este caso: **¡¡de forma radial!!** Esto quiere decir que podemos tener exactamente la misma curva en el plano cartesiano, y sin embargo la fórmula cartesiana y la fórmula polar generan áreas distintas, tal como se evidencia en la figura siguiente:



Luego, observamos que la forma de medir el área en coordenadas polares (entre la curva roja y los segmentos en verde) es generando una especie de "barrido" en un segmento de radio y en sentido de los punteros del reloj. Hay que tener muy clara esta idea para poder plantear correctamente las integrales que nos permiten calcular áreas en polares.

Momentos y centroides. A partir del diferencial de área resulta sencillo determinar las coordenadas del centroide. Suponiendo densidad constante tenemos que:

$$\mathrm{d}M_y = x\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Pero $x = r\cos\theta$, de modo que:

$$\mathrm{d}M_y = r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Integrando exactamente de la misma forma (r de 0 a $\rho(\theta)$ y θ de θ_1 a θ_2) obtenemos:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{3A}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}$$

Razonando de forma análoga:

$$\mathrm{d}M_x = y\,\mathrm{d}A = r^2\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{1}{3A}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3(\theta)\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta}$$

Obviamente la detección de simetrías puede resultar muy útil en varias figuras, en especial considerando que ocurren simetrías en torno a varios ejes, no solamente los coordenados.

Problema 1.47:

(a) Determine el área de la región interior a la curva $\rho(\theta) = 2a\cos 3\theta$ y exterior al círculo $r = a$.

(b) Hallar el área común entre las curvas $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ y $\rho(\theta) = 3\cos\theta$.

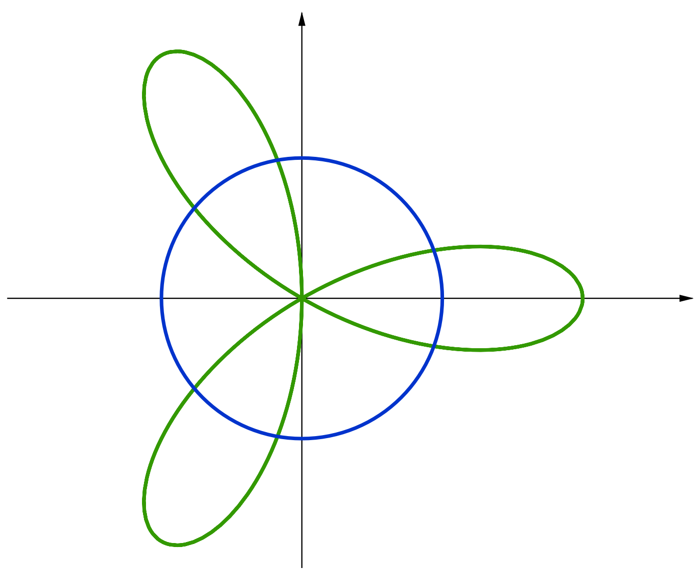
(c) Encuentre el área encerrada por los cardioides de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho_1(\theta) &= 1 + \cos(\theta) \\ \rho_2(\theta) &= 1 + \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}$$

(d) Calcule el área de la región comprendida entre las lemniscatas de ecuaciones $\rho^2 = \cos(2\theta)$ y $\rho^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$.

Solución:

(a) Por simple inspección sabemos que la primera curva es una rosa polar de 3 pétalos con el primer pétalo centrado en el eje x y de amplitud $2a$. La segunda curva se explica por sí sola. Graficando para $a = 1$:



Observe que por simple simetría el área total es equivalente al área de un solo pétalo, por lo cual

$$A_T = 3A^*,$$

donde calcularemos A^* como el área del primer lóbulo centrado en el origen. Los extremos de integración se obtienen de la intersección de ambas curvas. En dichos puntos se debe tener la misma componente radial y el mismo ángulo respecto al eje x. Es decir,

$$2a\cos 3\theta = a$$

Como $a \neq 0$ para que el problema tenga sentido, entonces podemos cancelar sin dificultad:

$$\to \cos 3\theta = \frac{1}{2} \to 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3\theta = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

Para obtener los casos deseados hacemos $k = n = 0$ con lo cual $\theta_1 = -\pi/9$ y $\theta_2 = \pi/9$. Dado que la componente radial exterior es la rosa y la interior la circunferencia, reemplazamos:

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/9}^{\pi/9} 4a^2\cos^2 3\theta - a^2\,\mathrm{d}\theta = a^2\int_{-\pi/9}^{\pi/9} 1 + \cos 6\theta\,\mathrm{d}\theta - \frac{2\pi a^2}{9} \\ &= \frac{a^2}{3}\operatorname{sen} 6\theta\Big|_0^{\pi/9} = \frac{a^2}{3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{a^2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

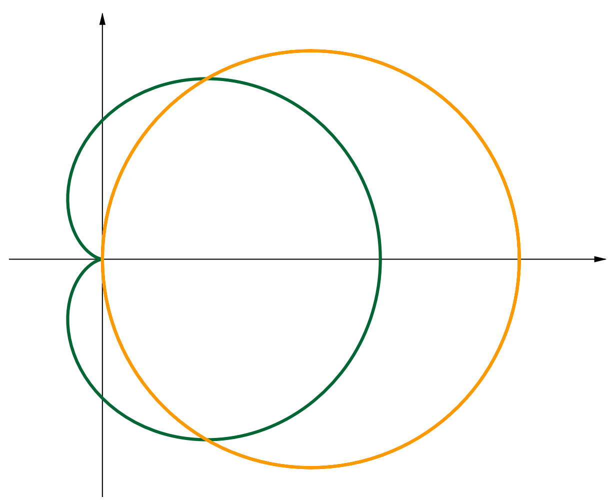
Finalmente,

$$\boxed{A_T = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}}$$

(b) La segunda curva es indiscutiblemente una circunferencia de radio 1.5 como la ya estudiada en el problema anterior. Asimismo la primera curva corresponde a un cardioide, lo cual no es tan evidente pero se puede notar como sigue:

$$1 + \cos\theta = 1 - (-\cos\theta)$$

y $-\cos\theta = \cos(\theta - \pi)$, con lo cual $1 + \cos\theta = 1 - \cos(\theta - \pi)$, por lo que es un cardioide como el ya visto en la figura anterior rotado en 180º. Luego, la situación se grafica como sigue:



y es fácil notar por inspección la intersección de las curvas en un área común. Requerimos determinar los dos puntos en $\theta \in [0, 2\pi]$ para los cuales las curvas se cortan. Para ello igualamos las componentes radiales, pues será la condición básica de intersección:

$$1 + \cos\theta = 3\cos\theta \to \cos\theta = \frac{1}{2}$$

De aquí se sigue que $\theta = \pi/3$ y $\theta = 2\pi - \pi/3$ son los ángulos buscados. O bien por simplicidad, el segundo puede escribirse como $\theta = -\pi/3$. Antes de integrar debemos tener una salvedad: al integrar en polares la figura a la cual se le calcula el área es la curva junto con los segmentos desde el origen a los extremos de integración. Por esta razón en este caso en particular, si revisamos lo que se quiere hacer al integrar, notaremos que no en este caso no deben restarse las componentes radiales, si no que integrar con esta consideración las funciones.

Observe que existe una simetría en torno al eje x, por lo cual podemos calcular el área sobre el eje x y luego multiplicarla por dos para obtener el resultado final. El barrido de área comienza con el cardioide en $\theta = 0$ y llega hasta $\theta = \pi/3$, donde se pasa a integrar la circunferencia, yendo desde $\pi/3$ hasta $\pi/2$, donde la circunferencia toca al eje y. Entonces el área puede escribirse como:

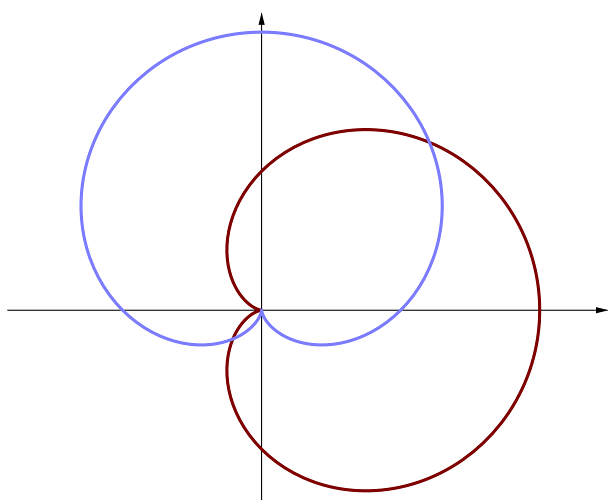
$$\begin{aligned} A &= 2 \times \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/3} (1+\cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 9\cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta\right] \\ &= \int_0^{\pi/3} 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta + 9\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Para integrar los términos al cuadrado simplemente hacemos $\cos\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$.

Evaluando se obtiene así que:

$$\boxed{A = \frac{5\pi}{4}}$$

(c) Ya conocemos la gráfica del primer cardioide. La gráfica del segundo cardioide no es más que el cardioide anterior rotado en 90º en sentido antihorario. De esta forma se obtiene una figura como la siguiente:



Observe que existe una clara simetría en torno al eje $\theta = \pi/4$, por lo cual podemos integrar a un lado del eje y multiplicar por dos. Tampoco debe ignorarse el hecho de que el lóbulo común no es solamente el grande, si no que el pequeño que se encuentra en el tercer cuadrante.

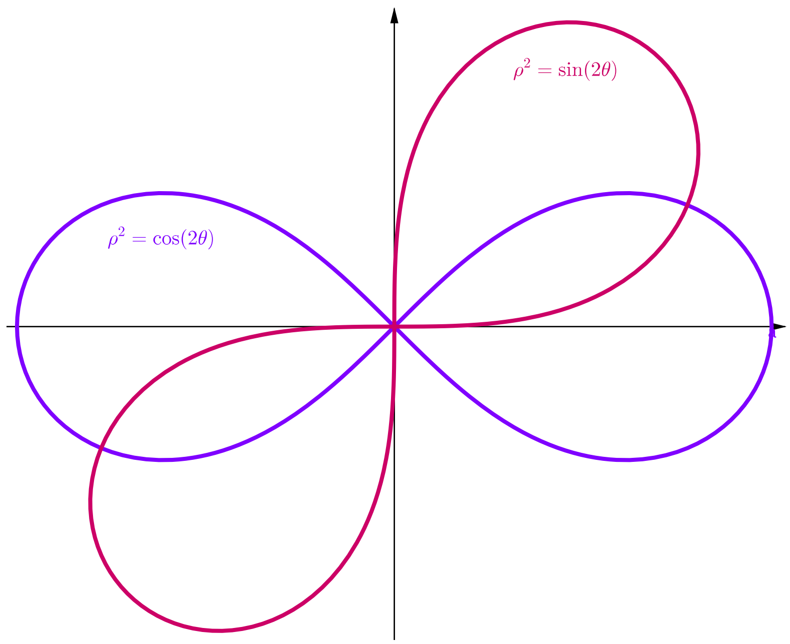
Haciendo el barrido correctamente, podemos integrar cualquiera de las dos curvas para obtener el resultado pedido. Haciéndolo con el coseno, debemos partir en $\theta = \pi/4$ y terminar en $\theta = \pi$ para obtener el área de medio lóbulo grande. Sin embargo, podemos seguir integrando hasta $\theta = \pi + \pi/4$ para obtener el área de medio lóbulo pequeño. De esta forma,

$$A = 2\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (1+\cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta = 2\int_{\pi/4}^{5\pi/4} 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta$$

Evaluando mediante las técnicas de integración habituales obtenemos así:

$$\boxed{A = 3\pi - 4\sqrt{2} \approx 3{,}77}$$

(d) Nuevamente graficamos, considerando que ambas curvas ya son más que conocidas:



La intersección de ambas se da evidentemente cuando:

$$\operatorname{sen} 2\theta = \cos 2\theta \to \tan 2\theta = 1 \to 2\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Para nuestros propósitos basta hacer $k = 0$ para obtener el $\theta = \pi/8$ que sugiere el gráfico. Nuevamente observamos una simetría en torno al eje $\theta = \pi/8$ y no solo eso, si no que también hay simetría en torno al origen. Entonces podemos calcular el área total como un cuarto del área de medio lóbulo, lo cual resulta sencillo de integrar pues significaría solo tomar una lemniscata e integrarla adecuadamente.

En este caso, tomando la lemniscata con coseno y observando la gráfica notamos que debe integrarse de $\theta = \pi/8$ hasta $\theta = \pi/4$, donde la curva obtiene radio nulo. Es decir,

$$A = 4 \times \frac{1}{2} \int_{\pi/8}^{\pi/4} \rho^2(\theta)\, \mathrm{d}\theta = 2 \int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos(2\theta)\, \mathrm{d}\theta = \operatorname{sen} 2\theta \Big|_{\pi/8}^{\pi/4}$$

Es decir,

$$\boxed{A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Problema 1.48: Sea $\mathcal{R}$ la región determinada por el lazo interior de la cariodioide $\rho(\theta) = a - 2a \operatorname{sen}\theta$ con $a > 0$. Calcule el área y el centroide de $\mathcal{R}$.

Solución:

Tenemos que $\rho = a(1 - 2\operatorname{sen}\theta)$, la cual es una cardioide cuyo lazo interior se ubica en el tercer y cuarto cuadrante, tal como vimos en el problema de gráficas. Luego, el lazo se genera entre ambos puntos donde la componente radial se anula. Resolviendo:

$$1 - 2\operatorname{sen}\theta = 0 \to \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

En este caso nuestros ángulos de interés en este caso son $\theta = \pi/6$ y $\theta = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Integrando la función en cuestión obtenemos el área del lazo:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - 2\operatorname{sen}\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 1 - 4\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta \, \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Evaluando la primitiva obtenemos así que:

$$A = \frac{a^2}{2}\left(\pi - \frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$$

Para calcular el centroide empleamos las fórmulas ya deducidas. Sin embargo, por simple inspección notamos inmediatamente que $\bar{x} = 0$ pues la figura es simétrica. Para la coordenada y calculamos:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{a^3}{3} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - 2\operatorname{sen}\theta)^3 \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^3}{3} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\operatorname{sen}\theta - 6\operatorname{sen}^2\theta + 12\operatorname{sen}^3\theta - 8\operatorname{sen}^4\theta\right) \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Dado que las función $\operatorname{sen}(x)$ es impar en torno al eje $x = \pi$, entonces integrar $\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}^3\theta$ dan cero como resultado. Para integrar $\operatorname{sen}^2\theta$ usamos la conversión trigonométrica habitual y para integrar $\operatorname{sen}^4\theta$ hacemos:

$$\operatorname{sen}^4\theta = \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)^2$$

con lo cual expandiendo e integrando se llega a primitivas sencillas. De esta forma,

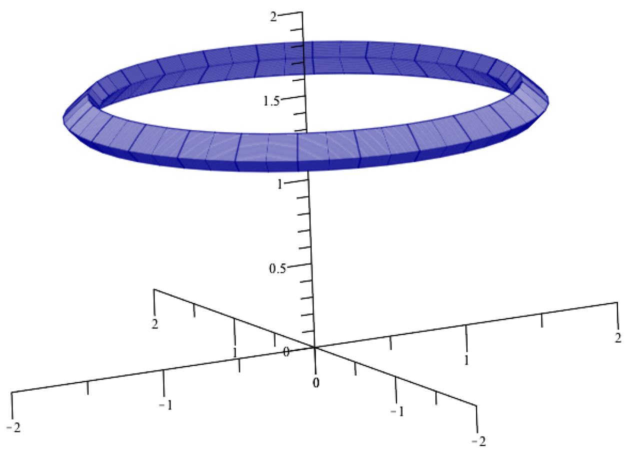
$$M_y = a^3\left(\frac{9}{4}\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right) < 0$$

El signo de M_y es efectivamente consistente si $a > 0$. Entonces, evaluando de forma simplificada:

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{A}, \frac{M_y}{A}\right) = \left(0, -\frac{2a}{3} \cdot \frac{\left(27\sqrt{3} - 16\pi\right)}{7\sqrt{3} - 4\pi}\right)}$$

Volúmenes de revolución. Ahora calculemos los volúmenes de los sólidos de revolución. Partamos pensando en el volumen del sólido de revolución generado al producir una rotación en torno al eje OX. La primera condición obvia es que toda la región se encuentre a todo un lado del eje para no generar un volumen que se superponga.

El volumen resultante se puede entender como la superposición de la rotación de cada elemento $\mathrm{d}A$ de la región en torno al eje OX. ¿Cómo calcularíamos el volumen generado por la rotación de el área $\mathrm{d}A$ en torno al eje OX? ¡Usando el Teorema de Pappus! En este caso este también resulta. Observe que al rotar un solo diferencial en torno al eje en cuestión obtenemos una figura como la siguiente:



Al integrar cada uno de estos diferenciales se obtiene el volumen total de la región revolucionada.

El área es $\mathrm{d}A$, la distancia de $\mathrm{d}A$ al eje X es aproximadamente $r \operatorname{sen} \theta$. Luego, un diferencial de volumen del sólido viene dado por:

$$\mathrm{d}V = 2\pi r \operatorname{sen} \theta \, \mathrm{d}A$$

Reemplazando con lo que obtuvimos para $\mathrm{d}A$:

$$\mathrm{d}V = 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

Integrando entre $\rho_1(\theta)$ y $\rho_2(\theta)$ y luego integrando desde θ_1 hasta θ_2:

$$V = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta$$

La integral del interior es muy sencilla de calcular, más aún considerando que $\operatorname{sen} \theta$ se puede sacar de la integral ya que no depende de r. De esta forma, integrando una simple polinomial:

$$\boxed{V_x = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\rho_2^3(\theta) - \rho_1^3(\theta) \right] \operatorname{sen} \theta \, \mathrm{d}\theta}$$

De la misma forma se puede obtener lo resultante tras rotar en torno al eje OY, donde solo cambia la distancia de $\mathrm{d}A$ al eje de rotación:

$$\boxed{V_y = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\rho_2^3(\theta) - \rho_1^3(\theta) \right] \cos \theta \, \mathrm{d}\theta}$$

Observe que la deducción de estas fórmulas está íntimamente ligada con el Teorema de Pappus, razón por la cual no existe una fórmula mediante casquetes cilíndricos. La fórmula expresada contempla todos los casos posibles para una región dada.

Adicionalmente, este último teorema también puede ser aplicado y no requiere ninguna formulación en cuanto solo exige ser capaces de determinar el área y el centroide de la figura. En muchos casos en el sistema de coordenadas polares esto resulta sencillo dadas las simetrías que se generan. Más aún, en muchas figuras el centroide resulta ser el mismo origen, tal como en el caso de una rosa polar.

Problema 1.49:

(a) Calcule el volumen del sólido generado por la rotación en torno al eje OY de la región encerrada por la curva polar $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$ para $\theta \in [0, \pi/2]$.

(b) La curva de ecuación $\rho = \cos^2 \theta$ (con $0 \leq \theta \leq \pi$) gira en torno al eje polar. Calcule el volumen del sólido de revolución así generado.

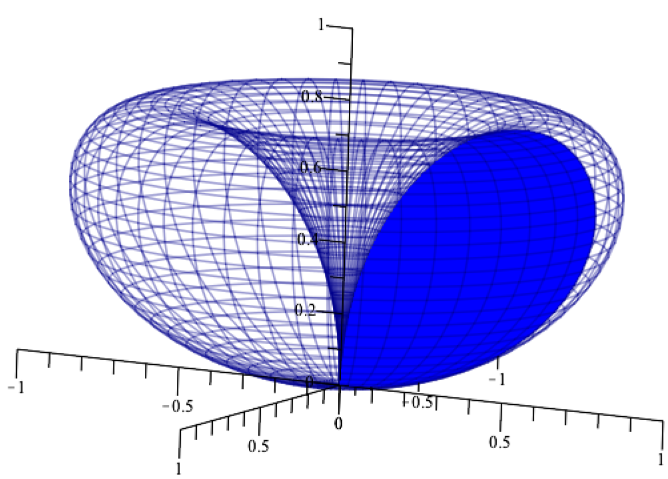
(c) Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la flor de 8 pétalos en coordenadas polares:

$$r = \operatorname{sen}(4\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

en torno a la recta $y = x - 7$ (en coordenadas cartesianas).

Solución:

(a) En este caso, podemos notar por simple inspección que corresponde a un solo pétalo de la rosa polar. En particular, el que se ubica completamente en el primer cuadrante. Realizando la rotación en torno al eje OY obtenemos una figura como la siguiente:



Usamos la fórmula del sólido de revolución, la cual en este caso es más que directa:

$$V_y = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\rho_2^3(\theta) - \rho_1^3(\theta)\right] \cos\theta \, d\theta \to V_y = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} a^3 \operatorname{sen}^3 2\theta \cos\theta \, d\theta$$

Notando que $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, entonces:

$$V_y = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} 8a^3 \operatorname{sen}^3\theta \, \cos^4\theta \, \mathrm{d}\theta$$

Estas integrales requieren integración cautelosa. Podemos por ejemplo hacer:

$$\operatorname{sen}^3\theta = \left(1 - \cos^2\theta\right) \operatorname{sen}\theta$$

con lo cual

$$V_y = \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2\theta\right) \cos^4\theta \, \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta$$

Ahora aparece una integral y su derivada. Hacemos $u = \cos\theta \to \mathrm{d}u = -\operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta$. Es decir,

$$V_y = \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^1 u^4 - u^6 \, \mathrm{d}u$$

Por integración polinomial directa concluimos que:

$$\boxed{V_y = \frac{32\pi}{105} a^3}$$

(b) En este caso el reemplazo en la ecuación es directo, pues tenemos toda la información necesaria. En este caso,

$$V_y = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} \left[\cos^2\theta\right]^3 \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} \cos^6\theta \, \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta$$

Haciendo $u = \cos\theta \to \mathrm{d}u = -\operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta$. Entonces,

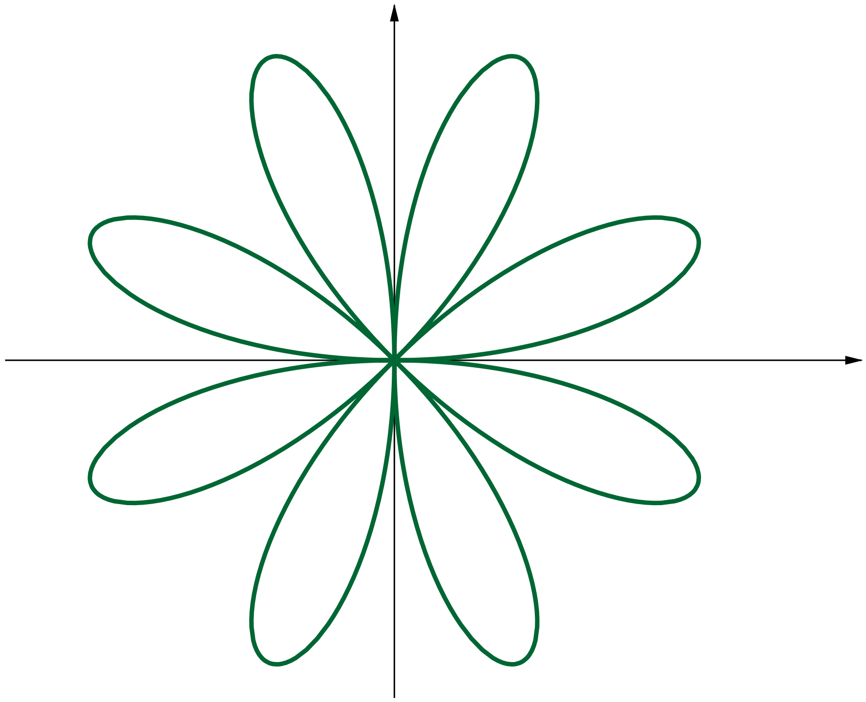
$$\boxed{V_y = \frac{2\pi}{3} \int_{-1}^{1} u^6 \mathrm{d}u = \frac{4\pi}{21}}$$

(c) Es evidente dado el eje de rotación que intentar obtener una integral por definición puede ser un proceso complejo. Más aún, notando que la gráfica es una rosa polar, con una simetría muy fácil y que la recta no intersecta a esta curva, entonces podemos hacer uso del Teorema de Pappus para obtener el volumen en cuestión.

Dada la simetría de la rosa polar no se requiere ningún trabajo para notar que el centroide se encuentra en el origen. La distancia del origen a la recta $y = x - 7 \to x - y - 7 = 0$ es:

$$d\left(\vec{0}, \ell\right) = \frac{|-7|}{\sqrt{1+1}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

Nos falta calcular el área de la rosa polar. Notando que el área de los 8 pétalos es igual, podemos calcular el área de solamente una. En este caso, considerando la gráfica:



Basta integrar de 0 a $\pi/4$ y luego multiplicar por 8 para obtener el área total. De esta forma,

$$A = 8 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2(4\theta)\, \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4} 1 - \cos(8\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

Notando que el período de $\cos 8\theta$ es $\pi/4$, entonces la integral de coseno se anula en este caso. Finalmente,

$$A = \frac{\pi}{2}$$

Luego, aplicando el teorema:

$$V = 2\pi \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2} \to \boxed{V = \frac{7\pi^2}{\sqrt{2}}}$$

Puede ser nuestra motivación también estudiar el largo de una curva en polares. Nuevamente recurrimos a las representaciones simbólicas obtenidas:

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

¿Cómo expresamos esto en el sistema polar? Probablemente obtener $\mathrm{d}x$ no sea fácil, pero podemos notar que abusando de la notación:

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\, \mathrm{d}\theta$$

Por su parte,

$$x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) \to \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \rho' \cos(\theta) - \rho \operatorname{sen}\theta$$

$$y(\theta) = \rho(\theta)\operatorname{sen}(\theta) \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \rho' \operatorname{sen}(\theta) + \rho \cos\theta$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\rho')^2 \cos^2\theta \cancel{- 2\rho'\rho \operatorname{sen}\theta \cos\theta} + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + (\rho')^2 \operatorname{sen}^2\theta \cancel{+ 2\rho'\rho \operatorname{sen}\theta \cos\theta} + \rho^2 \cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Reordenando términos:

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\rho')^2 (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \rho^2 (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\to \boxed{\mathrm{d}\ell = \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta}$$

Que es la expresión comunmente utilizada para calcular diferenciales de largo en polares. Luego el largo total se obtiene de integrar desde θ_1 hasta θ_2 según conrresponda:

$$\boxed{\ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,\mathrm{d}\theta}$$

y el problema se reduce a simplemente calcular la integral respectiva. Evidentemente este diferencial resulta útil para calcular el área de las superficies de revolución, tal como veremos más adelante.

A partir de todas estas deducciones vistas usted no debiese tener problemas para hacerlo por usted mismo. Más aún, debiese ser capaz de deducir algunas restantes. Por ejemplo: coordenadas del centroide en coordenadas polares para una curva o superficie. (Hágalo como ejercicio propuesto)

Problema 1.50:

(a) Calcule la longitud de la cardioide $\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ y el área que encierra.

(b) Calcule la longitud de la curva $\rho = \sec^2(\theta/2)$ que se encuentra en la región tal que $x \geq 0$.

Solución:

(a) Para obtener la curva completa requerimos mover θ entre 0 y 2π. Derivando,

$$\rho' = -a \operatorname{sen}\theta$$

Entonces, $\mathrm{d}\ell = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2} = a\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}$. Simplificando,

$$\mathrm{d}\ell = a\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

Para integrar esta expresión notamos que:

$$(1+\cos\theta) = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

Entonces,

$$\ell = \int_0^{2\pi} 2a \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \mathrm{d}\theta$$

donde tomamos el módulo ya que por efecto de la raíz el coseno es positivo en todo punto. Notando que entre 0 y 2π aparecen solo medio período de la función $\cos\theta/2$. Entonces, por simetría:

$$\ell = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 8a\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\bigg|_0^\pi$$

Es decir,

$$\boxed{\ell = 8a}$$

Para calcular el área encerrada también recurrimos directamente a la fórmula ya deducida e integramos de 0 a 2π para generar todo el cardioide:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\left(1+\cos\theta\right)^2\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} 1+2\cos\theta+\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

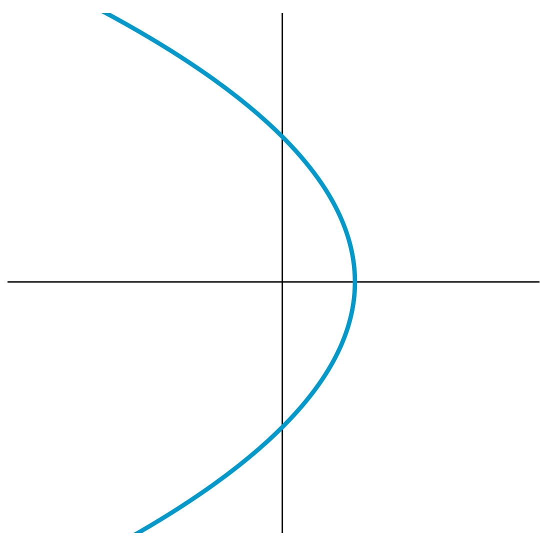
De aquí se obtiene por integración ya conocida que:

$$A = \frac{a^2}{2}\left(2\pi+\pi\right) \to \boxed{A = \frac{3\pi a^2}{2}}$$

(b) Notamos que esta curva siempre tiene componente radial positiva, y que incluso es infinita cuando

$$\cos\frac{\theta}{2} = 0 \to \theta = \pi$$

en el intervalo $[0,\pi]$. Un esbozo de la curva es el siguiente:



De aquí se sigue que la condición $x \geq 0$ se cumple para $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Derivamos:

$$\rho'\left(\theta\right) = \sec^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$$

Es decir,

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{\sec^4\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}+\sec^4\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta = \sec^3\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

La integral se escribe entonces como:

$$\ell = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^3 \frac{\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^3 u \, \mathrm{d}u$$

Ya calculamos esta integral anteriormente en los problemas de repaso de integración, pues una de las integrales básicas para el curso. Sabemos que:

$$\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{\sec x \tan x + \ln\left(\sec x + \tan x\right)}{2} + c$$

Reemplazando,

$$\boxed{\ell = 2\sqrt{2} + 2\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)}$$

Área de superficie. Recordamos que simbólicamente el área de revolución en torno al eje x y al eje y vienen dadas por:

$$A_x = 2\pi \int_a^b y \, \mathrm{d}\ell \quad ; \quad A_y = 2\pi \int_a^b x \, \mathrm{d}\ell$$

Llevando al sistema polar tenemos que $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, $x = \rho\cos\theta$, $\mathrm{d}\ell = \sqrt{\left(\rho'\right)^2 + \rho^2}\,\mathrm{d}\theta$. Es decir,

$$\boxed{A_x = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \operatorname{sen}\theta \sqrt{\left(\rho'\right)^2 + \rho^2}\,\mathrm{d}\theta}$$

$$\boxed{A_y = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \cos\theta \sqrt{\left(\rho'\right)^2 + \rho^2}\,\mathrm{d}\theta}$$

Problema 1.51: Determine el área de la superficie de rotación generada al rotar la lemniscata $\rho^2 = a^2\cos\left(2\theta\right)$ en torno al eje polar (eje X) y al eje transverso (eje Y).

Solución:

Dado que la lemniscata completa nos produciría una superposición al rotar, solo nos quedaremos con un segmento de ella. En particular, tal como ya revisamos al graficar lemniscatas, podemos aprovecharnos de la simetría y hacer las rotaciones siempre para $\theta \in [0, \pi/4]$. Luego multiplicamos el resultado por dos para obtener el resultado pedido.

Derivamos implícitamente la ecuación para obtener la derivada:

$$2\rho \cdot \rho' = -2a^2 \operatorname{sen}\left(2\theta\right) \to \rho' = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{a\sqrt{\cos 2\theta}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
A_x &= 2 \times 2\pi \int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\theta}\, \operatorname{sen}\theta \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta} + a^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta}\, \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi a^2 \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/4}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{A_x = 2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

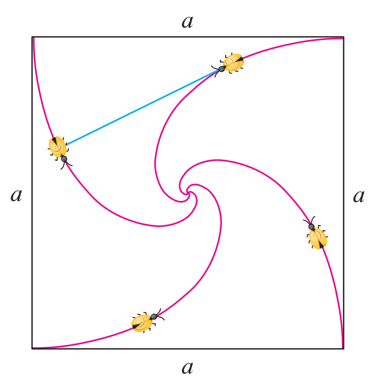
Análogamente, podemos hacer el mismo procedimiento y notamos que:

$$A_y = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = 4\pi a^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalmente,

$$\boxed{A_y = 2\pi a^2\sqrt{2}}$$

Problema 1.52: [**Propuesto**] Cuatro hormiguitas son ubicadas en las esquinas de un cuadrado de lado a. Las hormiguitas se mueven en dirección contraria al reloj a la misma velocidad cada una y cada una se mueve apuntando a la continua en cada instante, por lo cual se aproximan al origen a través de una trayectoria circular.



(a) Encuentre la ecuación polar de la trayectoria de la hormiguita que más le simpatice asumiendo que el polo está al centro del cuadrado. *Ayuda:* La dirección en que se mueve una hormiguita apunta hacia las coordenadas de la otra hormiguita.

(b) Encuentre la distancia que viaja una de ellas al momento que se encuentra con las demás en el centro.

---

2. Integrales impropias y series numéricas

2.1. Integrales impropias

Hasta ahora dominamos perfectamente bien (en teoría) las técnicas de integración básicas y somos capaces de calcular analíticamente un gran espectro de funciones suponiendo dos condiciones:

- El extremo de integración es acotado. Es decir, siempre calculamos la integral en un intervalo $[a, b]$.
- La función es continua, y en particular acotada en $[a, b]$. Esto es una hipótesis básica para poder emplear el Teorema Fundamental del Cálculo.

Sin embargo, no siempre estas condiciones se cumplen en todas las integrales, y no solo en casos meramente teóricos como podría pensarse, si no que también en la práctica de física e ingeniería, donde se modelan muchas situaciones en que ocurren estas particularidades. Entonces, el tema central de esta sección es estudiar integrales de la forma:

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (f \text{ no está acotado en algún punto})$$

las cuales se conocen como **integrales impropias**. Las primeras integrales se denominan de **tipo I** o **primera especie** y se caracterizan por uno de los dos extremos de integración fijados en infinito y las segundas son integrales tales que existe $x_0 \in [a, b]$ (en particular en los extremos) en los cuales $f(x_0)$ diverge[4]. Estas integrales se conocen como integrales de **tipo II** o de **segunda especie**.

El objetivo en particular de este capítulo es determinar si las integrales convergen o no (calcular su valor lamentablemente adquiere un carácter secundario). Formalmente, se define

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\epsilon\to\infty} \int_a^\epsilon f(x)\,\mathrm{d}x$$

y sin pérdida de generalidad en el caso de que $x_0 = a$ sea un punto no acotado de f:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\epsilon\to a} \int_\epsilon^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Es decir, al estudiar integrales impropias lo que estamos haciendo es estudiar la convergencia de la integral en alguno de los extremos. Por esta misma razón es que una de las primeras acciones que se pueden tomar es calcular la integral a partir de su primitiva como función de ϵ y luego hacer tender ϵ al punto que corresponda. El objetivo en particular de este capítulo es en efecto determinar si las integrales <u>**convergen**</u> o no. Calcular su valor (lamentablemente) adquiere un carácter secundario a pesar de que en muchos casos sí es posible realizarlo.

Partiremos en estos primeros ejercicios calculando integrales y tomando luego el límite para comprobar la efectividad de la metodología. En estos no solo determinaremos si la integral converge o

[4] **¡Ojo!** Especial énfasis en esto, no es el caso en que la función no esté definida y su límite sea finito. Tiene que ser una función en la que claramente el límite en x_0 tienda a infinito, es decir, una función no acotada.

no, si no que además calcularemos su valor, práctica que en cursos superiores se realizará de forma habitual.

Problema 2.1:

(a) Dada la integral

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x$$

Determine su especie y decida justificadamente si converge.

(b) Calcule la integral impropia mixta

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2} \mathrm{d}x$$

utilizando la sustitución $x = a^2/y$.

Solución:

(a) Observe que al evaluar en 1 la función se comporta como:

$$\ln\left(\frac{1}{1-1}\right) = \ln(\infty)$$

por lo cual se trata de una integral de **segunda especie**. Para decidir la convergencia podemos fácilmente determinar la primitiva de la función. Se tiene que:

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x)$$

Es decir, queremos integrar:

$$I = -\int \ln(1-x)\, \mathrm{d}x$$

Luego, hacemos

$$\begin{cases} u = \ln(1-x) & \to \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x-1} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \to v = x \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I &= -\left[x\ln(1-x) + \int \frac{x\mathrm{d}x}{1-x}\right] \\ &= -\left[x\ln(1-x) + \int \frac{x-1}{1-x} + \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\right] \\ &= -\left[x\ln(1-x) - \int \mathrm{d}x - \ln(1-x)\right] \end{aligned}$$

Es decir,

$$I = (1-x)\ln(1-x) + x + c$$

Luego,

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 1^-} \left[(1-x)\ln 1 - x + x\right]\Bigg|_0^{\epsilon}$$

Observe que tomamos el límite por la izquierda pues la función no existe para $x \geq 1$. Importa estudiar en particular,

$$\lim_{\epsilon\to 1} (1-x)\ln(1-x)$$

El cual es un límite de la forma $0 \cdot -\infty$. Es decir, dado que son funciones diferenciables podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 1} (1-x)\ln(1-x) &= \lim_{\epsilon\to 1} \frac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{1-x}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 1} \frac{\dfrac{1}{1-x}}{\dfrac{1}{(1-x)^2}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 1} 1-x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo cual el límite existe y la integral por lo tanto, **converge**.

(b) Observe que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{a} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x}_{(1)} + \underbrace{\int_a^{\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x}_{(2)}$$

Calculemos (1) siguiendo la indicación. Hacemos:

$$x = \frac{a^2}{y} \to \mathrm{d}x = -\frac{a^2}{y^2}\mathrm{d}y$$

Con ello, $y = a^2/x$ y con ello los límites de integración cambian de ∞ a a, i.e:

$$\begin{aligned}
\int_0^{a} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2} &= -\int_{\infty}^{a} \frac{\ln(a^2/y)}{a^2+\dfrac{a^4}{y^2}} \frac{a^2}{y^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_a^{\infty} \frac{2\ln(a)-\ln(y)}{a^2+y^2}\mathrm{d}y \\
&= 2\ln(a)\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{a^2+y^2} - \int_a^{\infty} \frac{\ln(y)}{a^2+y^2}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Calculemos (2) bajo la misma indicación. En este caso los límites de integración cambian de a a 0:

$$\begin{aligned}
\int_a^{\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{a} \frac{2\ln(a)-\ln(y)}{a^2+y^2}\mathrm{d}y \\
&= 2\ln(a)\int_0^{a} \frac{\mathrm{d}y}{a^2+y^2} - \int_0^{a} \frac{\ln(y)}{a^2+y^2}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Es decir, sumando los términos:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = 2\ln(a)\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{a^2+y^2} - \int_0^\infty \frac{\ln(y)}{a^2+y^2}\mathrm{d}y$$

Como la variable es muda, podemos sumar las integrales de la izquierda y la derecha, de modo que:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \ln(a)\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{a^2+y^2}$$

Recuerde que la primitiva de $\dfrac{1}{a^2+y^2}$ es $\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{y}{a}\right)$, con lo cual:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{y}{a}\right)\Bigg|_0^\infty$$

Se tiene que:

$$\arctan\left(\frac{\infty}{a}\right) = \lim_{\epsilon\to\infty}\arctan\left(\frac{\epsilon}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Con lo cual,

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln(a)}{2a}}$$

Vale la pena estudiar el siguiente problema breve y de carácter teórico, pues aclara conceptualmente lo que es integrar en todo $\mathbb{R}$ una función, en particular una impar.

Problema 2.2: Sea $F(t) = \displaystyle\int_{-t}^{t} x^3\mathrm{d}t$. Muestre que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$ y que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^3\mathrm{d}x$ diverge. ¿Qué puede concluir de este resultado?

Solución:

Observe que $F(t)$ es la integral de una función impar por extremos simétricos, con lo cual:

$$F(t) = 0 \to \lim_{t\to\infty} F(t) = 0$$

La integral impropia se puede escribir como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^3\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} x^3\mathrm{d}x$$

Ambas integrales claramente divergen pues no se cumple la condición necesaria de que:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = 0$$

Luego, la integral claramente **diverge**. ■

Esto deja en evidencia que esta no es la definición para la integral impropia

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^3\mathrm{d}x \neq \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x^3\mathrm{d}x}$$

En particular, lo que sí podemos concluir es que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{\phi(t)}^{\varphi(t)} x^3 \mathrm{d}x$$

con $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ y $\lim\limits_{t\to\infty} \phi(t) = -\infty$.

Comentario: Si bien acabamos de demostrar formalmente que bajo esta condición la integral **no** converge, en muchas aplicaciones prácticas se requiere de todas formas un valor por la integral, por lo cual decimos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \mathrm{d}x \overset{!}{=} \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x^3 \, \mathrm{d}x$$

Este valor se conoce como *valor principa*l y fue ampliamente estudiado por Cauchy. Se suele usar la notación:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x^3 \, \mathrm{d}x = 0$$

Partiremos ahora con la idea central de este capítulo, consistente en determinar solamente si las integrales convergen o no. Para ello haremos uso de las siguientes proposiciones:

Proposición: Si $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Resultaría una evidente contradicción si $f(x)$ no tuviera un asíntota que no fuera cero, ya que en dicho caso la integral (el área de la figura) presentaría un crecimiento no acotado. En particular, esta proposición significa que es una condición necesaria (**¡pero no suficiente!**) que la función tienda a cero para que sea convergente.

Es decir, si trabajamos con una función en la cual identificamos que en infinito la función no tiende a cero, entonces inmediatamente concluimos que diverge. Si tiende a cero, no podemos garantizar nada sobre la convergencia.

Teorema: Si $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int g(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int h(x)\mathrm{d}x$ son todas integrales de primera o segunda especie (del mismo tipo) tales que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, entonces:

$$\int g(x)\mathrm{d}x \text{ y } \int h(x)\mathrm{d}x \text{ convergen} \to \int f(x)\mathrm{d}x \text{ converge}$$

$$\int g(x)\mathrm{d}x \text{ diverge} \to \int f(x)\mathrm{d}x \text{ diverge}$$

Finalmente enunciamos los Teorema de Comparación al Límite para cada tipo de integrales, los cuales no son más que una consecuencia directa de la definición de límite y los teoremas de comparación anteriores:

Teorema: Sean f y g funciones de $[a,\infty) \to \mathbb{R}$ positivas y sea

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Entonces:

- Si $L > 0 \Longrightarrow \left[\int_n^\infty f(x)dx \text{ converge/diverge} \Longleftrightarrow \int_n^\infty g(x)\mathrm{d}x \text{ converge/diverge}\right]$.
- Si $L = 0 \Longrightarrow \left[\int_n^\infty f(x)dx \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_n^\infty g(x)\mathrm{d}x \text{ converge}\right]$.

Este mismo criterio puede ser utilizado para integrales de segunda especie, siempre que se compare con una función **no acotada** y que el punto de evaluación del límite cambie al punto donde la función es no acotada.

Es habitual utilizar como comparación funciones de la forma $1/x^p$, para las cuales la convergencia de la integral depende del valor de p. Los criterios de p en cada caso para los cuales la integral converge se conocen como **criterios de la $p-$integral** y son fáciles de determinar a partir del cálculo de las primitivas respectivas:

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \ : \ \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad a > 0$$

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \ : \ \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } p < 1 \\ \text{diverge} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego, aplicando el teorema podemos resumir que:

- $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si y solo si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p f(x) > 0$ con $p > 1$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si y solo si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p f(-x) > 0$ con $p > 1$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge (no acotada en b) si y solo si $\displaystyle\lim_{x\to b^{-1}} (b-x)^p f(x) > 0$ con $p \in (0,1)$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge (no acotada en a) si y solo si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} (x-a)^p f(x) > 0$ con $p \in (0,1)$.

De la misma forma, resulta fácil notar a partir del cálculo de la primitiva que:

$$\int_a^\infty e^{-bt}\mathrm{d}t \ : \ \begin{cases} \text{converge} & \text{ssi } b > 0 \\ \text{diverge} & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad a \geq 0$$

y utilizar esta función para comparar con otras funciones.

Utilizaremos todas estas ideas para resolver los problemas siguientes.

Problema 2.3: Decida justificadamente si las siguientes integrales convergen:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln z}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{2+e^x}\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)}.$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}.$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x-\cos x}.$

(h) $\displaystyle\int_e^\infty e^{-\operatorname{sen} x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(\ln x)^5}.$

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cosh x-1}}.$

(j) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\mathrm{d}x.$

(k) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$

(l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}+x^2}\mathrm{d}x.$

(m) $\displaystyle\int_0^\infty \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x.$

(n) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x\sqrt{2x+3}}\mathrm{d}x.$

(ñ) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x^{3/2}\,(1+\sqrt{x})}\mathrm{d}x.$

(o) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3\ln(x)}\mathrm{d}x.$

Solución:

(a) Nos efrentamos a una integral de **segunda especie** pues la función diverge en 0. En este caso, hagamos la sustitución $y=1/x\to \mathrm{d}y=-\mathrm{d}x/x^2$. Es decir,

$$\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\mathrm{d}x=\int_1^\infty ye^y\mathrm{d}y$$

¿Por qué conviene dejar la integral expresada así? En primer lugar porque puede comprenderse mejor el comportamiento de la integral. La segunda integral claramente diverge pues

$$\lim_{y\to\infty} ye^y\neq 0$$

lo cual es una condición necesaria (pero no suficiente) para que la integral con verja. Concluimos entonces que la integral **diverge**.

(b) Nuevamente estamos ante una integral de segunda especie pues la función claramente diverge en $x=0$. ¿Podemos determinar la primitiva? Integremos por partes:

$$\begin{cases} u=\ln(x) & \to \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ \\ \mathrm{d}v=x^{-1/2}\mathrm{d}x & \to v=2x^{1/2}\end{cases}$$

Entonces,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2x^{1/2}\ln(x)\Big|_0^1-2\int_0^1 x^{1/2}\mathrm{d}x$$

Tenemos por regla de L'Hôpital que:

$$\lim_{x\to 0} x^{1/2}\ln(x) = 0$$

con lo cual el primer término es cero en ambos extremos y la segunda integral es fácil calcular. Es decir,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -4$$

y por lo tanto la integral **converge**.

(c) Este problema lo podemos enfrentar desde dos enfoques. Ambos se centran en el hecho de notar que como $\arctan(x)$ no crece infinitamente entonces el término predominante es $1/e^x$ en toda la integral. Es decir,

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{2+e^x}\mathrm{d}x \sim \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x}$$

Como la segunda integral converge, podemos conjeturar que la primera también. ¿Cómo formalizamos esto? Efectivamente se cumplirá el criterio de comparación al cuociente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x)}{2+e^x}e^x = \frac{\pi}{2} > 0$$

Luego, como $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x}$ converge, entonces $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{2+e^x}\mathrm{d}x$ también **converge**.

Otra forma de hacerlo es notar que:

$$\arctan(x) \leq \frac{\pi}{2} \to \frac{\arctan(x)}{2+e^x} \leq \frac{\pi}{2(2+e^x)} \leq \frac{\pi}{2e^x}$$

Luego,

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{2+e^x}\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x}$$

Observe que esto no es más que la formalización de las ideas del teorema de comparación al límite. Como la segunda integral converge, entonces la primera también y por lo tanto verificamos así el resultado.

(d) Nos enfrentamos a una integral impropia de segunda especie pues la función no se comporta apropiadamente en el origen. Observe que al función $\operatorname{sen}^2 x$ es fácil de derivar y la función $1/\sqrt{x}$ fácil de integrar. Probablemente no podamos calcular la integral pero sí realizar integración por partes para comprender mejor la convergencia. Luego, hacemos:

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen}^2 x & \to \mathrm{d}u = 2\operatorname{sen} x\cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x^{-1/2}\mathrm{d}x & \to v = 2x^{1/2} \end{cases}$$

Es decir,

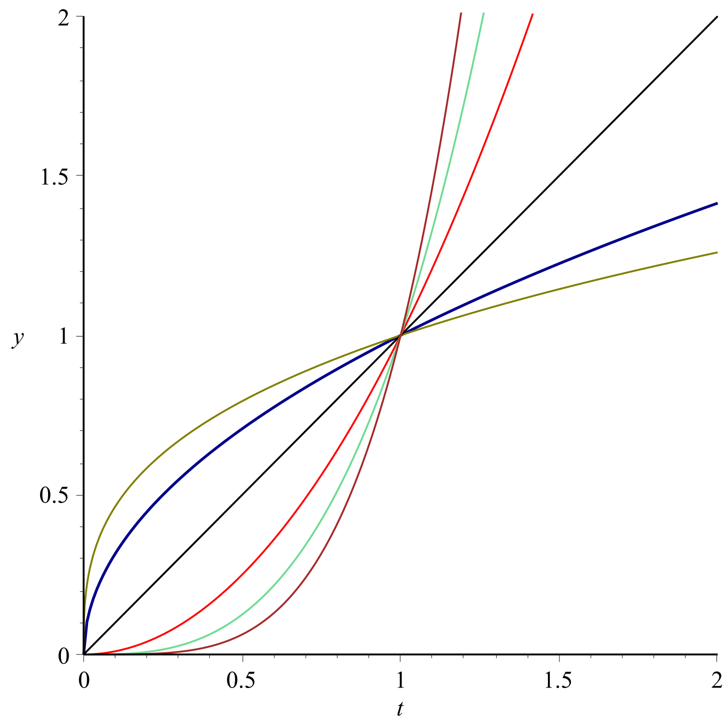
$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2x^{1/2}\operatorname{sen}^2 x\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi \sqrt{x}\operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x$$

Claramente la integral de la derecha no puede calcularse, pero converge pues la función involucrada **no** diverge. Luego, concluimos que la integral **converge**.

(e) Nos enfrentamos a una integral impropia de especie mixta ya que no solo es de tipo I, sino que también diverge en el origen. Luego, separamos arbitrariamente en cualquier punto entre medio y estudiamos la convergencia de cada integral por separado:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)}}_{(1)} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)}}_{(2)}$$

Es condición necesaria y suficiente que ambas integrales converjan. Estudiemos (1) en primer lugar. Partamos graficando la función potencia x^p para diversos valores de p:



Observe que para valores de $x \in [0,1]$ se tiene que $p < q \to x^p \geq x^q$. Esto implica que en este intervalo se cumple que:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}+x^{3/2}} \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}}$$

pues este es el término dominante en este extremo[5]. Luego, conjeturamos que la integral converge. ¿Cómo comprobamos esto? Podemos hacerlo con criterio de comparación al límite o bien comparando con integrales. Haremos lo segundo en este caso. Tenemos para $x \in (0,1)$ se cumple que:

$$x^{1/2} \leq x^{1/2} + x^{3/2} \to \frac{1}{x^{1/2}} \geq \frac{1}{x^{1/2}+x^{3/2}}$$

Integrando en $(0,1)$ la desigualdad se conserva:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}+x^{3/2}} \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}}$$

[5]Ser capaz de ver "cómo se comporta" la función cerca del origen es muy útil para decidir con qué función comparar. Se recomienda analizar siempre las funciones polinomiales de esta forma.

La integral de la derecha claramente converge pues $p = 1/2 \in (0,1)$. Luego, la integral en estudio converge.

Ahora estudiamos (2). De la figura anterior observamos que para $x \geq 1$ se cumple que $p < q \to x^p \leq x^q$. Entonces,

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2} + x^{3/2}} \sim \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$$

Conjeturamos que la integral converge pues la segunda lo hace. ¿Cómo formalizamos la idea en este caso? Siguiendo exactamente la misma idea:

$$\sqrt{x}\,(1+x) = \sqrt{x} + x^{3/2} \geq x^{3/2}$$

Luego,

$$\frac{1}{x^{1/2} + x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

Integrando de uno a infinito la desigualdad se sigue conservando:

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2} + x^{3/2}} \leq \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$$

Luego, por criterio de la $p-$integral tenemos que la integral de derecha converge y por lo tanto la integral (2) también converge. Como ambas integrales convergen, concluimos que la integral completa **converge**. De hecho, observe el lector que mediante la sustitución $u = \sqrt{x}$ se puede demostrar fácilmente que:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \pi$$

(f) Observe que este problema es exactamente igual al anterior. Solamente cambian los grados de la función. En particular por las mismas razones que antes nos estamos enfrentando a una integral impropia de segunda especie. Hacemos nuevamente la misma separación:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}}_{(1)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}}_{(2)}$$

En primer lugar estudiamos la convergencia de (1). Procedemos exactamente de la misma forma:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}} \to \text{converge}$$

Formalizamos:

$$x^2 + x^4 \geq x^2 \to \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Integrando de $(0,1)$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}}$$

Por criterio de la $p-$integral, la integral de la derecha converge. Luego, tenemos que (1) converge.

Estudiamos (2) de la misma forma:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} \sim \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{4/3}} \to \text{converge}$$

Formalizamos:

$$x^2 + x^4 \geq x^4 \to 0 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x^4}} \leq \frac{1}{x^{4/3}}$$

Integrando de 1 a ∞:

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2 + x^4}} \leq \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{4/3}}$$

Por criterio de la $p-$integral, esta última también converge. Como (1) y (2) convergen, concluimos que la integral completa **converge**.

(g) La integral se comporta inapropiadamente en $x = 0$, razón por la cual nos enfretamos a una integral de segunda especie. Si bien se pueden establecer desigualdades para realizar la comparación, esta vez utilizaremos el criterio de comparación al límite. En particular, busquemos una $p-$integral para realizar la comparación.

Observe que haciendo $p = 1$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{1} = 1$$

el cual fue calculado mediante la Regla de L'Hôpital. Esto sugiere que debemos comparar con la integral de $g(x) = 1/x$. Comparando,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - \cos x} = 1 > 0$$

Luego,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} \text{ diverge} \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x - \cos x} \textbf{ diverge}.$$

(h) Dado que no hay problemas de divergencia en el intervalo, nos enfrentamos a una integral impropia de primera especie. Podemos partir observando que el mayor valor que toma seno en el intervalo es 1, razón por la cual:

$$\frac{1}{e} \int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(\ln x)^5} \leq \int_e^\infty e^{-\operatorname{sen} x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(\ln x)^5}$$

Realizar esto siempre es una buena práctica ya que la mayoría de funciones seno y sus composiciones solo aportan comportamientos oscilatorios no significativos en la convergencia de la función.

Estudiemos entonces la convergencia de la integral de la izquierda. Para ello, podemos comprender mejor la integral haciendo la sustitución $u = \ln x \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$. Con ello,

$$\begin{aligned} \int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(\ln x)^5} &= \int_1^\infty \frac{e^u \mathrm{d}u}{e^{u/2} u^5} \\ &= \int_1^\infty \frac{e^{u/2} \mathrm{d}u}{u^5} \end{aligned}$$

Es fácil notar que:

$$\lim_{u \to \infty} \frac{e^{u/2}}{u^5} = \infty$$

pues ambas funciones son crecientes y existe u_0 tal que para $u \geq u_0$ se cumple que $e^{u_0/2} > u_0^5$. Luego, como no se cumple la condición necesaria concluimos que la integral en cuestión **diverge**.

(i) Observe el lector que esta es una integral de tipo mixto, ya que no solo es de tipo I, también es de tipo II pues $\cosh 0 = 1$ y por lo tanto la función diverge en el origen. Luego, hacemos la separación:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cosh x - 1}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cosh x - 1}}}_{(1)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cosh x - 1}}}_{(2)}$$

Partamos estudiando la segunda. Observe que:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx \frac{e^x}{2}$$

en infinito pues e^{-x} se hace despreciable para $x \gg 0$. Luego,

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cosh x - 1}} \sim \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^{x/2}}$$

lo cual nos permite conjeturar que la integral converge. Observe que para todo x se cumple que:

$$\frac{e^x}{2} \leq \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

pues las funciones exponenciales siempre son positivas. Luego, invirtiendo e integrando:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cosh x - 1}} \leq \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x/2 - 1}}$$

La función es efectivamente comparable con $g(x) = 1/\sqrt{e^x/2}$ pues:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{e^x/2}}{\sqrt{e^x/2 - 1}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x - 2}} \\
&= 1 > 0
\end{aligned}$$

Luego, como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^{x/2}}$ converge, entonces (2) converge efectivamente.

Estudiamos ahora qué ocurre con (1). A partir del límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

podemos conjeturar y comprobar fácilmente por Regla de L'Hôpital que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Esto sugiere que podemos comparar entonces con $g(x) = 1/\sqrt{x^2}$, de modo que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^2}{\cosh x - 1}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cosh x - 1}} \leftarrow \text{por teo. de continuidad} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Como $\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ claramente diverge, concluimos que:

$$
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cosh x - 1}} \text{ diverge} \to \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cosh x - 1}} \textbf{ diverge}.
$$

Observe el lector que es completamente válido solo realizar el estudio en (1) para concluir este resultado, no se requiere concentrar esfuerzos en (2). Sin embargo, por propósitos pedagógicos se dejaron ambos desarrollos para su revisión.

(j) Lo primero que debemos hacer es determinar la especie de la integral. Evidentemente será de tipo I, pero ¿es de tipo II? Notando que:

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 < \infty
$$

Entonces, descartamos que sea de tipo II. Más aún, notando que la función es par, basta entonces estudiar la convergencia de

$$
\int_\epsilon^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\mathrm{d}x \quad \text{con } \epsilon > 0
$$

para dar respuesta a esta pregunta. Para resolver esta pregunta notamos que no se puede comparar con $1/x$ pues el límite en infinito no converge. Sin embargo, se puede usar un truco habitual en expresiones de este tipo: hacemos

$$
\begin{cases}
u = \dfrac{1}{x} & \to \mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} \\[2em]
\mathrm{d}v = \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x & \to v = -\cos(x)\,\mathrm{d}x
\end{cases}
$$

Es decir,

$$
\int_\epsilon^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\mathrm{d}x = -\frac{\cos(x)}{x}\bigg|_\epsilon^\infty - \int_\epsilon^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x
$$

El primer término converge pues el límite es cero en infinito. Para la integral notamos que:

$$
-\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq \int_\epsilon^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x \leq \int_\epsilon^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}
$$

Claramente las integrales de los extremos convergen por el criterio de la $p-$integral. Luego, la integral restada converge y por lo tanto,

$$
\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\mathrm{d}x \textbf{ converge}
$$

(k) Es claro que esta integral es de tipo I. Sin embargo, dado que $1/x$ diverge en 0 podemos preguntarnos, ¿es también de tipo II? Es de tipo II también solo si el límite **diverge** en el origen. Si la función converge, no es de tipo II ya que el área también sería convergente.

Esto tendremos que comprobarlo ya que no es tan evidente. Para ello, calculamos:

$$L = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Este es un límite de la forma $0 \cdot \infty$ de dos funciones diferenciables, por lo cual aplicamos la Regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{\csc x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} \cdot -\dfrac{1}{x^2}}{-\cot x \csc x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\,(1+x) \cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{(1+x)\cos x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego, la integral **no es de segunda especie**, ya que si bien no está definida en el origen, converge. Solo debemos estudiar su comportamiento en infinito.

Observe que resulta complicado buscar comparaciones dada la naturaleza de estas dos funciones. Sin embargo, notando que $\ln(1 + 1/x)$ es relativamente fácil de derivar y $\operatorname{sen}(x)$ fácil de integrar, podemos integrar por partes para comprender mejor la integral en cuestión:

$$\begin{cases} u = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & \to \mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 + x} \\ \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x & \to v = -\cos x \end{cases}$$

Luego,

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \operatorname{sen} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x + \int_1^\infty \operatorname{sen} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

aplicaremos esto solamente a la segunda integral ya que el extremo inferior es difícil de evaluar. Luego,

$$\int_1^\infty \operatorname{sen} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = -\cos x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2 + x} \mathrm{d}x$$

El término de la izquierda claramente converge en infinito. Por lo tanto, todo el estudio se reduce a estudiar la integral impropia de primera especie de la derecha. Podemos comparar con $g(x) = 1/x^2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + x} \\
&= \lim_{x \to 0} x \frac{\cos x}{x + 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego, la integral solo heredará el comportamiento de $g(x)$ si es que la integral de esta última converge. Con ello, como

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \text{ converge} \to \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2+x}\mathrm{d}x \textbf{ converge}.$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \textbf{ converge}.$$

(l) Observe que si demostramos que $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, si notamos que:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

entonces por teorema de comparación $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ también converge.

Demostremos entonces que la integral converge absolutamente (la integral del módulo de f converge). Partamos notando que como la integral es impropia de especie mixta, debemos estudiar que ocurre tanto en el origen como en infinito:

$$\int_0^\infty \left|\frac{\cos(x)}{x^{1/2}+x^2}\right|\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \frac{|\cos(x)|}{x^{1/2}+x^2}\mathrm{d}x}_{(1)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{|\cos(x)|}{x^{1/2}+x^2}\mathrm{d}x}_{(2)}$$

Realizamos la demostración con el módulo de coseno pues queremos ilustrar que el Teorema de Comparación al Límite exige que cambias funciones a comparar sean positivas. Esto no ocurre en el caso de la primera función y probablemente sea fácil pasarlo por alto. Sin embargo, el hecho de que podemos tomar el módulo y evaluar así el comportamiento de la integral nos permite incluso olvidarnos del resquicio teórico del signo de la función al evaluar el teorema.

Para la primera integral tenemos que:

$$\int_0^1 \frac{|\cos(x)|}{x^{1/2}+x^2}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}}$$

pues $\cos x$ solo aporta un comportamiento oscilatorio. Luego, comparamos al límite con $x^{1/2}$, i.e. evaluamos:

$$\lim_{x\to 0} x^{1/2}\frac{|\cos(x)|}{x^{1/2}+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{|\cos(x)|}{1+x^{3/2}} = 1 > 0$$

Luego, como $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}}$ converge, entonces (1) converge.

Para la segunda integral hacemos exactamente lo mismo, solo que ahora comparando con $g(x) = 1/x^2$:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\frac{|\cos(x)|}{x^{1/2}+x^2} \quad \text{no existe}$$

debido al comportamiento oscilatorio de coseno. ¿Qué podemos hacer entonces? Observar que:

$$0 \leq \frac{|\cos(x)|}{x^{1/2}+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

puesto que $x^{1/2}+x^2 \geq x^2$ al tratarse de números positivos solamente. Finalmente, integrando de uno a infinito:

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{|\cos(x)|}{x^{1/2}+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Como la integral de la derecha converge por el criterio de la $p-$integral, concluimos entonces que (2) converge.

Luego, la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\cos(x)|}{x^{1/2}+x^2}\mathrm{d}x$ converge absolutamente y por lo tanto **converge**.

(m) Claramente resulta muy complicado estudiar la expresión de la integral por sí sola tal como está ya que no podemos establecer desigualdades concluyentes en esta función. Sin embargo, notamos una de las cosas que complica el análisis es la aparición de x^2, lo cual podemos simplificar haciendo:

$$u = x^2 \to \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \to \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \mathrm{d}x$$

Tomamos la raíz positiva pues estamos integrando de 0 a ∞ en x. Luego,

$$\int_0^\infty \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

Sin embargo, observe que acabamos de generar un problema adicional: la integral que obtenemos también es de tipo 2 ya que diverge en el origen. ¿Cómo solucionamos esto? Teniendo claro el hecho de que la convergencia de la integral se evalúa en infinito, i.e. si $b > a$ y

$$\int_b^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge} \to \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ también converge}$$

Por lo tanto, podemos hacer lo siguiente:

$$\int_0^\infty \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x + \underbrace{\int_1^\infty \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x}_{(*)}$$

y nos focalizamos solo en estudiar la convergencia de $(*)$ ya que la primera integral ni siquiera es impropia (a pesar de no poder obtener una primitiva). Luego,

$$\int_1^\infty \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\cos(y)}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

Estamos más que tentados a pensar que:

$$\int_1^\infty \frac{\cos(y)}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y \sim \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{y}}$$

y por lo tanto diverge por el criterio de la $p-$integral diverge. Sin embargo, ¿qué ocurre si comparamos al límite con $\sqrt{y}$? El límite claramente no existe. El argumento de acotar superiormente con $y^{-1/2}$ también se demuele pues al integrar de 1 a ∞ la integral superior claramente diverge.

Debemos hacer por lo tanto otro estudio para comprender la convergencia de la integral. Observe que $\cos(y)$ es fácil de integrar e $y^{-1/2}$ fácil de derivar. Luego, se puede hacer uso de un truco habitual en integrales impropias con funciones trigonométricas:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}y^{-1/2} & \to \mathrm{d}u = -\dfrac{1}{4}y^{-3/2} \\ \mathrm{d}v = \cos(y)\,\mathrm{d}y & \to v = \operatorname{sen}(y) \end{cases}$$

Es decir,

$$\int_1^\infty \frac{\cos(y)}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \left.\frac{\mathrm{sen}(y)}{2\sqrt{y}}\right|_1^\infty + \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\mathrm{sen}(y)}{y^{3/2}}\mathrm{d}y$$

Para $y \to \infty$ tenemos que $\dfrac{\mathrm{sen}(y)}{2\sqrt{y}} \to 0$ por efecto de la raíz. Por su parte,

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{sen}(y)}{y^{3/2}}\mathrm{d}y \leq \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^{3/2}}$$

la cual converge por el criterio de la $p-$integral ($p > 1$). Finalmente,

$$\int_1^\infty \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x \text{ converge} \to \int_0^\infty \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x \textbf{ converge}.$$

(n) Tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x\sqrt{2e^u+e}} &= \int_0^\infty \frac{u}{\sqrt{2e^u+1}}\mathrm{d}u \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{u}{e^{u/2}}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

La integral anterior es comparable con $1/e^{u/4}$:

$$\lim_{u\to\infty} e^{u/4}\frac{u}{e^{u/2}} = \lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^{u/4}} = 0$$

dado el comportamiento de la exponencial (o bien por L'Hôpital). Finalmente, como la integral de $1/e^{u/4}$ converge, la integral en cuestión **converge**.

(o) Partimos notando que la integral es tanto de primera como segunda especie (en el origen la función es claramente no acotada). Luego, hacemos la separación:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x^{3/2}\left(1+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x^{3/2}\left(1+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x}_{(1)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x^{3/2}\left(1+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x}_{(2)}$$

Para (1) podemos notar que $1-\cos(x)$ es una función conocida pues al dividirla por x^2 genera un límite conocido en el origen. Luego,

$$\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x} \to \frac{1}{2}$$

en el origen. Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x^{3/2}\left(1+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}\left(1+\sqrt{x}\right)} \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}}$$

lo cual se puede comprobar fácilmente comparando al límite. La última integral converge por criterio de la $p-$integral, con lo cual concluimos que (1) converge.

Para (2) podemos notar que:

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x^{3/2}\left(1+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{\sqrt{2}}{x^{3/2}\left(1+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x$$

Luego, notamos que:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}\left(1+\sqrt{x}\right)} \sim \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

lo cual es fácil de comprobar mediante el criterio de comparación al límite. Luego, como esta integral evidentemente converge, concluimos que la integral (2) converge. Finalmente,

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x^{3/2}\left(1+\sqrt{x}\right)}\mathrm{d}x \textbf{ converge.}$$

(p) Nuevamente, la integral es indiscutiblemente de primera especie. ¿Lo es de segunda? Tomemos el límite en $x=1$, donde el logaritmo se anula:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3 \ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)} \overset{L.H.}{=} \lim_{x\to 1} x \cdot 1 = 1$$

Por lo tanto, la integral es solamente de primera especie por definición. En infinito notamos que la integral es comparable a:

$$\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3\ln(x)}\mathrm{d}x \sim \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2\ln(x)}$$

Para $x \geq e$ se tendrá que:

$$0 \leq \int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2\ln(x)} \leq \int_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Por criterio de la $p-$serie esta integral es indiscutiblemente convergente. Luego, la integral completa **converge**. Otra forma de hacer la comparación era:

- Comparar al límite con $1/x^2$. Se genera así un límite de comparación nulo, y por lo tanto la integral hereda la convergencia de $1/x^2$.
- Haciendo $u = \ln(x)$.

Problema 2.4: Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ y sea ℓ su asíntota horizontal.

Muestre que el área entre $f(x)$ y ℓ es finita.

Solución:

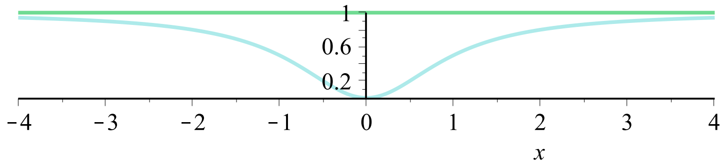
Primero observe que $0 \leq x^2 \leq 1 + x^2$ por axiomática real. Luego, dividiendo a ambos lados $1+x^2$:

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} \leq 1$$

Adicionalmente, notemos que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

y la función alcanza un mínimo $f(0) = 0$ (la función no puede tomar un valor menor). Con ello, la función junto a su asíntota son fáciles de graficar:



Debemos verificar si el área contenida en el interior es o no finita. Es decir, debemos verificar si la siguiente integral converge:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Por su parte, esta integral podemos incluso calcularla:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= 2\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\arctan(x)\Big|_{0}^{\infty}\\ &= \pi\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área **sí es finita**.

Revisemos ahora problemas de parámetros. Todo estos se desarrollan exactamente bajo la misma lógica de otros problemas de este tipo: suponer que se cumple la condición dada y a partir de ello deducir restricciones para los parámetros.

Es interesante notar en estos ejercicios que habitualmente se estudia el comportamiento de expresiones de la forma x^{p-k} con k fijo y p un parámetro a condicionar. En este caso conviene separar el estudio en dos casos: $p-k>0$ y $p-k<0$ pues según ello cambia también el comportamiento de la expresión: de polinomial a función de la forma $1/x^{k-p}$. Los criterios aplicados en cada uno son distintos.

Problema 2.5: Dada la espiral en coordenadas polares $r=f(\theta)=\theta^p$ para $\theta\in[2\pi,\infty)$, determine los valores de p de modo que dicha espiral tenga longitud finita.

Solución:

Sabemos que la longitud de curva en polares viene dada por:

$$\ell=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

Reemplazando,

$$\ell=\int_{2\pi}^{\infty}\sqrt{\theta^{2p}+p^2\theta^{2p-2}}\,\mathrm{d}\theta$$

Luego, buscamos p para que esta integral converja. Dado que $\theta>0$ en el intervalo de integración, entonces:

$$\ell=\int_{2\pi}^{\infty}\theta^p\sqrt{1+\left(\frac{p}{\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

Si $\theta \to \infty$, entonces $\theta^p \sqrt{1 + \left(\frac{p}{\theta}\right)^2} \approx \theta^p$. Es razonable entonces pensar que:

$$\int_{2\pi}^{\infty} \theta^p \sqrt{1 + \left(\frac{p}{\theta}\right)^2} \, \mathrm{d}\theta \sim \int_{2\pi}^{\infty} \theta^p \mathrm{d}\theta$$

y es muy fácil comprobarlo tomando el Criterio de Comparación al Límite. Esta última integral converge −y por lo tanto la longitud de la espiral es finita− para $\boxed{p < -1}$ por criterio de la p−integral.

Problema 2.6:

(a) Se define la función *gamma*, $\Gamma(x)$ como la integral impropia:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

cuya aplicación se extiende a diversos campos de aplicación físicos, ingenieriles y matemáticos. Determine $\mathrm{Dom}\,(\Gamma)$.

(b) Determine el valor α (si existe) de modo que la integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{\alpha}{3x+1} \right) \mathrm{d}x$$

converja. ¿Cuál es el valor de la integral en este caso?

(c) Determine condiciones sobre a y b para las cuales

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a \mathrm{d}x}{1+x^b}$$

converge.

Solución:

(a) Tenemos que $\mathrm{Dom}\,(\Gamma)$ es el conjunto de x para las cuales Γ existe, i.e.

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$

Observe que es importante notar que en $x = 1$ se tiene que $x - 1$ cambia de signo, luego resulta interesante estudiar el caso $x < 1$ y el caso $x > 1$.

- Partamos notando que para $x = 1$ se tiene que:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

la cual converge trivialmente.

- Para $x > 1$ observe que la serie se comporta predominantemente como una función exponencial pues absorbe el comportamiento polinomial. Esto se puede formalizar comparando con $g(t) = e^{-t/2}$. De esta forma,
$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = \lim_{t\to\infty} t^{x-1}e^{-t/2} = 0$$
(se puede demostrar mediante Regla de L'Hôpital). Luego, para $x > 1$ la función gamma converge.

- Para $x < 1$ tenemos que $x - 1 < 0$, con lo cual
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}\mathrm{d}t \quad \text{con } 1 - x > 0$$
Esta integral es impropia de especie mixta pues diverge cerca del origen. En este caso, separamos:
$$\Gamma(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}\mathrm{d}t$$
La segunda integral claramente converge pues es comparable con $e^{-t/2}$ al igual que en el ejercicio anterior. Para la primera integral, como la función exponencial se encuentra acotada en ese intervalo, tenemos que:
$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}\mathrm{d}t \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}}$$
i.e. comparamos al cuociente con $g(t) = 1/t^{1-x}$:
$$\lim_{t\to 0} t^{1-x}\frac{e^{-t}}{t^{1-x}} = 1$$
Luego, la integral hereda el comportamiento de la integral de $g(t)$. Esta converge solo si $p = 1 - x < 1 \to x > 0$. Con lo cual concluimos que converge para $x > 0$.

Finalmente, uniendo todos los casos concluimos que $\boxed{\mathrm{Dom}(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\}}$. Generalizando, podemos incluso concluir que $\mathrm{Dom}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ pues la parte imaginaria solo introduce un comportamiento oscilatorio.

Se puede demostrar fácilmente mediante integración por partes que:
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$
lo cual permite definir $\Gamma(n+1) = n!$ (con lo cual $n! = n \cdot (n-1)! = n\Gamma(n)$) y por lo tanto la función gamma es una extensión a dominio continuo de la función factorial.

(b) Supongamos que la integral efectivamente converge. Observe en primer lugar que la integral siempre será de primera especie puesto que no diverge en ningún punto mayor que cero y por lo tanto solo tenemos que estudiar el comportamiento de la integral en infinito.

Dado que no es una buena práctica tener las expresiones por separado ya que nosotros sabemos comparar con integrales de funciones racionales (del tipo x^q/x^p), entonces sumamos ambos términos:
$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+1} - \frac{\alpha}{3x+1} &= \frac{x(3x+1) - \alpha(x^2+1)}{(x^2+1)(3x+1)} \\ &= \frac{(3-\alpha)x^2 + x - \alpha}{3x^3 + x^2 + 3x + 1}\end{aligned}$$

Esta expresión es mucho más sencillo analizarla a través del criterio de la $p-$integral. Observe que existen dos casos interesantes: cuando $3-\alpha=0$ y cuando no. Si se cumple que $3-\alpha\neq 0$, entonces:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{\alpha}{3x+1}\right)\mathrm{d}x \sim \frac{3-\alpha}{3}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

ya que son efectivamente estos los términos dominantes de cada polinomio. Se tomó la integral desde 1 pues en caso contrario generaríamos una integral de especie mixta, y lo que realmente nos interesa estudiar es la convergencia en infinito de la integral original. Luego, podemos formalizar el resultado comparando con $g(x)=1/x$:

$$\lim_{x\to 0} x\frac{(3-\alpha)\,x^2+x-\alpha}{3x^3+x^2+3x+1}=\frac{3-\alpha}{3}\neq 0$$

Ante la eventualidad de que $3-\alpha<0$, basta observar que podemos preponderar por -1 y estudiar la convergencia de la integral negativa. Es decir, es irrelevante que el resultado de negativo: basta que el límite exista y sea distinto de cero.

Luego, como la integral de $1/x$ diverge pues $p=1$, entonces en este caso la integral también divergería.

Sin embargo, si $\alpha=3$, entonces:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{\alpha}{3x+1}\right)\mathrm{d}x \sim \frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

la cual bajo el mismo argumento anterior claramente converge pues en este caso $p=2$. Finalmente, concluimos que la integral converge si y solo si $\boxed{\alpha=3}$. Calculemos entonces la integral en este caso. Se tendrá que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{3}{3x+1}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right)\Big|_0^\infty - \log\left(3x+1\right)\Big|_0^\infty \\
&= \log\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+1}\Bigg|_0^\infty \\
&= \log\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{3}{3x+1}\right)\mathrm{d}x = -\log 3}$$

(c) Procedemos por analogía a los ejercicios anteriores. Parta por observar que x^a cambia su comportamiento en $a=0$. Si $a<0$ no nos estaríamos aplicando a una integral de primera especie, si no que a una de especie mixta pues x^a divergería en el origen. Luego, para nuestros análisis es pertinente hacer:

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^a}{1+x^b}\mathrm{d}x}_{(1)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\mathrm{d}x}_{(2)}$$

Analicemos primero el caso $a<0$, puesto que en el la primera integral requiere estudio de su convergencia. Tenemos que asintóticamente:

$$\int_0^1 \frac{x^a}{1+x^b}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 x^a\mathrm{d}x$$

Puesto que x^b se encuentra acotado inferiormente por 1 incluso para $b < 0$. En particular, dado que $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^a}{1 + x^b} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^a \mathrm{d}x$$

La primera integral converge si y solo si $0 \leq -a < 1 \rightarrow -1 < a \leq 0$. Es decir, desprendemos que $a > -1$.

Ahora estudiemos (2). Para ello, observamos que:

$$\int_1^\infty \frac{x^a}{1 + x^b} \mathrm{d}x \sim \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{b-a}}$$

Efectivamente, comparando con esta función:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} x^{b-a} \frac{x^a}{1 + x^b} &= \lim_{x \to \infty} \frac{x^b}{1 + x^b} \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

Es decir, se hereda el comportamiento de convergencia. Luego, como la integral de $1/x^{b-a}$ converge si y solo si $p = b - a > 1$, entonces concluimos que $b > a + 1 > 0$.

Finalmente, deben cumplirse tanto las condiciones de (1) como las de (2), pues si alguna de ellas no se cumple la integral completa diverge. Con ello, concluimos que deberá cumplirse que $\boxed{a > -1}$ y $\boxed{b > a + 1}$.

Elevaremos la dificultad al máximo estudiando los siguientes problemas de parámetros:

Problema 2.7:

(a) Decida para qué valor de r la siguiente integral converge:

$$\int_1^\infty \left[1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^r \mathrm{d}x$$

(b) ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ es convergente la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + x^p}{x^4 + x^{1-p}} \mathrm{d}x$$

Justifique su respuesta.

(c) Determine todos los valores de x e y de modo que la integral impropia

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right) t^{x-1} (1 - t)^{y-1} \, \mathrm{d}t$$

sea convergente.

Solución:

(a) Independiente del valor de r la integral es claramente de primera especie ya que la función no diverge en punto alguno. Ahora bien, supongamos que la integral en cuestión converge.

La función guarda similitud con el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

Si hacemos la sustitución $y = 1/x$ tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{y\to\infty} y^2 \left[1-\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Se sigue entonces por teorema de continuidad que:

$$\lim_{y\to\infty} y^{2r} \left[1-\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right]^r = 2^{-r} > 0$$

Es decir, la función de la integral en cuestión hereda la convergencia de:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^{2r}}$$

la cual converge para $2r > 1$. Concluimos entonces que la condición necesaria y suficiente es:

$$\boxed{r > \frac{1}{2}}$$

(b) Para los problemas de parámetros con funciones racionales una muy buena práctica es separar en casos las expresiones del tipo x^{1-p} a partir de los signos del exponente, como si de módulos se tratarse. Esto se debe a que según el cambio de signo tenemos un cambio en el comportamiento de x: de función potencia a función división.

De esta forma, distinguimos dos valores de p relevantes: $p = 0$ y $p = 1$. Haciendo una tabla de signos:

	$p \in (-\infty, 0)$	$p \in (0, 1)$	$p \in (1, \infty)$
x^{1-p}	$+$	$+$	$-$
x^p	$-$	$+$	$+$

Analicemos primero qué ocurre en los valores críticos. En cada uno de ellos se pueden formalizar los resultados a partir del teorema de comparación al límite. Para ahorrar espacio y no ser reiterativos, solo analizaremos el comportamiento asintótico en cada caso y a partir de ello concluiremos.

- Si $p = 0$ tenemos que:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + x^p}{x^4 + x^{1-p}} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + x} \mathrm{d}x$$

La cual es una integral de segunda especie:

$$\cdots = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+x}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+x}\mathrm{d}x$$

En la primera integral observe que el numerador está acotado (nunca se hace cero), con lo cual

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+x}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Lo cual evidentemente se puede formalizar mediante los teoremas de comparación. Como esta integral diverge, entonces no hay más trabajo que hacer: para $p=0$ la integral **diverge**.

- Si $p=1$ tenemos que:

  $$\int_0^\infty \frac{x^2+x^p}{x^4+x^{1-p}}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^2+x}{x^4+1}\mathrm{d}x$$

  la cual se una integral de primera especie (no diverge en ningún punto x positivo). Asintóticamente tenemos que:

  $$\int_0^\infty \frac{x^2+x}{x^4+1}\mathrm{d}x \approx \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

  Lo cual nuevamente se puede formalizar mediante teoremas de comparación, en particular comparación al límite. Luego, si $p=1$ la integral **converge**.

Ahora analizamos los tres casos generados.

Primer caso: Si $p<0$ entonces $1-p>0$. Luego,

$$\int_0^\infty \frac{x^2+x^p}{x^4+x^{1-p}}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^{2-p}+1}{x^{-p}\left(x^4+x^{1-p}\right)}\mathrm{d}x$$

La cual es claramente una integral impropia de especie mixta. Separando:

$$\int_0^\infty \frac{x^2+x^p}{x^4+x^{1-p}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{2-p}+1}{x^{-p}\left(x^4+x^{1-p}\right)}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{x^{2-p}+1}{x^{-p}\left(x^4+x^{1-p}\right)}\mathrm{d}x$$

Cómo se comporte la función dependerá del denominador, por lo cual distinguimos tres casos: $1-p>4$ ($p<-3$), $1-p<4$ ($p>-3$) y $1-p=4$ ($p=-3$).

- En el primero,

  $$\int_0^1 \frac{x^{2-p}+1}{x^{-p}\left(x^4+x^{1-p}\right)}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{4-p}}$$

  lo cual converge si y solo si $4-p<1 \to p>3$ lo cual es claramente una contradicción en este caso y por lo tanto **diverge**. Es decir, necesariamente $p \geq -3$ de acuerdo a lo anterior.

- En el segundo caso,

  $$\int_0^1 \frac{x^{2-p}+1}{x^{-p}\left(x^4+x^{1-p}\right)}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{-p+1-p}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-2p}}$$

  lo cual converge ssi $1-2p<1 \to p>0$ lo cual nuevamente es una contradicción pues $p<0$. Es decir, también **diverge** en este caso.

- En el tercer caso la integral se comporta exactamente igual que en el primer caso, reemplazando con $p = -3$, por lo cual también **diverge** en este caso.

Es decir, de este caso se desprende que $p \geq 0$. El primer caso queda descartado.

Segundo caso: Tenemos que $p \in (0,1) \to 1-p \in (0,1)$, de modo que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2+x^p}{x^4+x^{1-p}}\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \frac{x^p}{x^{1-p}}\cdot\frac{(x^{2-p}+1)}{(x^{3+p}+1)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x^{2p-1}\cdot\frac{(x^{2-p}+1)}{(x^{3+p}+1)}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Si $2p-1<0 \to p<1/2$ la integral es de segunda especie. Es decir, debemos separar en tres sub casos:

- $p < 1/2$. Luego,

  $$\int_0^\infty x^{2p-1}\cdot\frac{(x^{2-p}+1)}{(x^{3+p}+1)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-2p}}\cdot\frac{(x^{2-p}+1)}{(x^{3+p}+1)}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^{1-2p}}\cdot\frac{(x^{2-p}+1)}{(x^{3+p}+1)}\mathrm{d}x$$

  La primera integral se comporta cerca del orígen como:

  $$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-2p}}\cdot\frac{(x^{2-p}+1)}{(x^{3+p}+1)}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-2p}}$$

  la cual claramente converge para $1-2p<1 \to p>0$. Esto se cumple en el caso en el que estamos trabajando. La segunda integral se comporta como:

  $$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1-2p}}\cdot\frac{(x^{2-p}+1)}{(x^{3+p}+1)}\mathrm{d}x \sim \int_1^\infty \frac{x^{2-p}}{x^{4-p}}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

  el cual claramente converge. Luego, la integral **converge** si $p \in (0, 1/2)$.

- $p > 1/2$, con lo cual la integral es solamente de segunda especie y $2p-1>0$. Luego,

  $$\int_0^\infty x^{2p-1}\cdot\frac{(x^{2-p}+1)}{(x^{3+p}+1)}\mathrm{d}x \sim \int_0^\infty \frac{x^{2p-1+2-p}}{x^{3+p}}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

  el cual claramente también **converge**.

- Si $p = 1/2$ entonces:

  $$\int_0^\infty x^{2p-1}\cdot\frac{(x^{2-p}+1)}{(x^{3+p}+1)}\mathrm{d}x \sim \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{x^{7/2}}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

  lo cual también claramente converge.

Luego, la integral **converge** para todo $p \in (0,1)$.

Tercer caso: Tenemos que $p>1$ con lo cual $1-p<0$. Reescribimos la integral de una forma más fácil de entender de acuerdo a los signos:

$$\int_0^\infty \frac{x^2+x^p}{x^4+x^{1-p}}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\left(x^2+x^p\right)}{x^{3+p}+1}\mathrm{d}x$$

Como $p-1>0$ entonces solo nos enfrentamos a una integral de primera especie pues no se generan puntos divergentes en el dominio de integración. Sin embargo, el comportamiento asintótico de la función dependerá de qué número es mayor: p ó 2, de modo que debemos separar en tres subcasos:

- $p < 2$. Luego,
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\left(x^2+x^p\right)}{x^{3+p}+1}\mathrm{d}x \sim \int_0^\infty \frac{x^{p-1+2}}{x^{3+p}}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$
la cual claramente converge. Por lo tanto, la integral **converge** para $p \in (1,2)$.

- $p > 2$. Luego,
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\left(x^2+x^p\right)}{x^{3+p}+1}\mathrm{d}x \sim \int_0^\infty \frac{x^{2p-1}}{x^{3+p}}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{4-p}}$$
la cual converge para $4-p>1 \to p<3$. Luego, la integral **converge** para $p \in (2,3)$.

- $p = 2$. Con ello,
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\left(x^2+x^p\right)}{x^{3+p}+1}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x\left(2x^2\right)}{x^5+1} \sim \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$
lo cual **converge** claramente para $p = 2$.

A modo de resumen, vemos todos los casos que hemos estudiado:

Intervalo	**Resultado**
$(-\infty$,-3)	Diverge
$(-3,0)$	Diverge
$(0,1/2)$	Converge
$(1/2,1)$	Converge
$(1,2)$	Converge
$(2,3)$	Converge
$(3,\infty)$	Diverge

Verificamos además que la integral converge para $p = \{1/2, 1, 2\}$. Finalmente, concluimos que la integral converge si $\boxed{p \in (0,3)}$.

(c) Para efectos de comodidad en el análisis podemos partir por notar que:

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right) t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \ln(t)\, t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

Por comodidad y linealidad de las integrales impropias estudiaremos la segunda integral en lugar de la primera.

Lo primero que debemos observar es que según los signos de $y-1$ la función también puede ser no acotada en $t=1$. Por lo tanto, podemos separar en dos grandes casos:

Primer caso: $y < 1$. Tenemos entonces que:

$$\int_0^1 \ln(t)\, t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \ln(t)\frac{t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}}\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 \ln(t)\frac{t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}}\mathrm{d}t$$

Partimos analizando la primera integral. Para ello, observe que la integral es de segunda especie debido a la divergencia en $t=0$. Sin embargo, el comportamiento también dependerá de los signos de $x-1$, pues si este es negativo la función también puede diverger por efecto de t.

- Si $x < 1$, entonces la primera integral luce mejor como:

$$\int_0^{1/2} \ln(t) \frac{t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}} \mathrm{d}t \sim \int_0^{1/2} \frac{\ln(t)}{t^{1-x}} \mathrm{d}t$$

  donde despreciamos los efectos de $(1-t)^{1-y}$ como consecuencia de ser acotada en ese intervalo. Este resultado se formaliza en el teorema de comparación al límite.

  Luego observe que podemos comprender mejor la convergencia de la integral haciendo $u = \ln(t) \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}t/t$, de modo que:

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(t)}{t^{1-x}} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-\ln(2)} \frac{u}{e^{-ux}} \mathrm{d}u$$

  Esta última integral diverge si e^{-ux} tiende a cero en $-\infty$ y converge si es que e^{-ux} tiende a infinito en $-\infty$. Luego, deberá cumplirse que $x > 0$ para que la integral converja en este caso.

- Si $x > 1$ tenemos que:

$$\int_0^{1/2} \ln(t) \frac{t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}} \mathrm{d}t \sim \int_0^{1/2} \ln(t)\, t^{x-1} \mathrm{d}t$$

  Como $x-1 > 0$, entonces t^{x-1} es una función acotada y la integral es comparable con la integral en el mismo intervalo de $g(t) = \ln(t)$. En efecto,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to 0} t^{x-1} = 0 \quad \text{pues } x - 1 > 0$$

  Luego, como $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln(t)\, \mathrm{d}t$ converge, entonces la integral **converge** para $x > 1$.

- Si $x = 1$ tenemos que:

$$\int_0^{1/2} \ln(t) \frac{t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}} \mathrm{d}t \sim \int_0^{1/2} \ln(t)\, \mathrm{d}t$$

  la cual **converge**.

Luego, la integral **converge** para $x > 0$. Ahora analicemos la segunda integral:

$$\int_{1/2}^{1} \ln(t) \frac{t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}} \mathrm{d}t$$

Observe que t^{x-1} es una función acotada en este intervalo **independiente del valor de** x. Luego,

$$\int_{1/2}^{1} \ln(t) \frac{t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}} \mathrm{d}t \sim \int_{1/2}^{1} \frac{\ln(t)\, \mathrm{d}t}{(1-t)^{1-y}}$$

Ojo: Dado que $\ln(t) \to 0$ cuando $t \to 1$ no es prudente separar de la integral el logaritmo. De hecho, observe el lector que:

$$\lim_{t \to 1} \frac{\ln(t)}{(1-t)} = \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1-u)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{1-u} = 1$$

Esto sugiere que la integral anterior es comparable con $g(t) = 1/\left(1-t\right)^{-y}$. En efecto,

$$\lim_{t\to 1} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{\ln(t)}{1-t} = 1$$

Luego, tenemos que:

$$\int_{1/2}^{1} \ln(t) \frac{t^{x-1}}{\left(1-t\right)^{1-y}} \mathrm{d}t \sim \int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1-t\right)^{-y}}$$

la cual converge para $p = -y < 1 \to y > -1$.

Nuevamente se le reitera al lector que los comportamientos asintóticos se formalizan (pero no se incluyen para no ser reiterativos) en el teorema de comparación al límite. Concluimos que la integral **converge** si $y \in (-1, 1)$.

Segundo caso: $y \geq 1$. En este caso no se genera comportamiento divergente en $t = 1$, razón por la cual la función $(1-t)^{y-1}$ es acotada en todo el intervalo y por lo tanto la integral converge para todo valor de y. Las restricciones se imponen en la variable x, y son exactamente las mismas que las deducidas en el caso anterior.

Finalmente concluimos que la integral converge si:

$$\boxed{x > 0} \quad \text{e} \quad \boxed{y > -1}$$

Problema 2.8: [**Propuesto**] Considere la integral

$$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha\left(1-x^{\beta}\right)}}$$

con $\alpha, \beta > 0$. Determine condiciones sobre α y β para que la integral converja.

2.2. Sucesiones y límites de sucesiones

Antes de estudiar uno de los principales temas de ese capítulo, las series numéricas, se requiere un estudio adecuado de las funciones que las sustentan matemáticamente: las sucesiones.

Las **sucesiones** son funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, o en algunos casos –no de este curso– $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. El hecho de tener dominio en un conjunto discreto de puntos y no continuo nos permite evitar el estudio de muchísimos conceptos, en particular el de límite puntual. Sin embargo, sí se puede hablar de límites en infinito y salvo la salvedad del tipo de dominio se definen de forma similar a los límites de funciones en infinito, ya estudiados en el cálculo de una variable.

Se puede por lo tanto realizar una definición anexa:

Definición: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real, entonces se dice que el límite de a_n es L si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ tal que:

$$n \geq N \to |a_n - L| < \epsilon$$

A partir de esta definición se pueden demostrar prácticamente todos los lemas que son objeto de estudio en esta sección.

Problema 2.9: Calcule el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

Solución:

Una buena idea puede ser notar que es una buena idea obtener una relación recursiva para esta sucesión. ¿Por qué? Enunciemos y demostremos el siguiente teorema que es más que razonable pensando que el límite se "evalúa" en n muy grande:

Teorema: Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$.

Demostración:

Recordemos la definición formal del límite de una sucesión convergente: podemos acercarnos cuanto queramos a L tomando un n lo suficientemente grande. Es decir,

$$(\forall\epsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N}) \quad n > N \to |a_n - L| < \epsilon$$

que es exactamente lo que se cumple en esta sucesión. Luego, para ϵ_1 cualquiera tal que

$$|a_{n+1} - L| < \epsilon_1$$

basta tomar el N encontrado para ϵ y restarle una unidad, i.e. tomamos $N_1 = N - 1$ y a partir de él ya estaremos lo suficientemente cerca de ϵ, demostrando así lo pedido. ■

Luego, si $a_n = f(a_{n-1})$ para f una función continua, tendremos por teorema de composición que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = f\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\right) \to L = f(L)$$

y obtener el límite se convierte en un simple problema algebraico. Esto haremos en este caso.

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{2} \\
a_2 &= \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2a_2} \\
a_3 &= \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2a_3} \\
&\vdots \\
\to a_{n+1} &= \sqrt{2a_n}
\end{aligned}$$

Esta relación recursiva es muy sencilla de probar mediante inducción. Luego, tomando $n \to \infty$ y aplicando el teorema tenemos que:

$$L = \sqrt{2L} \to L^2 = 2L \to L\,(L-2) = 0$$

Nos quedamos con $\boxed{L = 2}$ puesto que es una sucesión creciente y de términos positivos.

Problema 2.10:

(a) Pruebe que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(b) Demuestre que si $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos tales que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Utilice este resultado para calcular:

$$a_n = \frac{n^5}{n!} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}$$

Solución:

(a) Observe que si b_n es acotada, entonces por definición existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $|b_n| \leq M \to -M \leq b_n \leq M$.

Luego, es evidente que:

$$0 \leq |a_n b_n| \leq M\,|a_n|$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \to \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. De esta forma, por teorema del sándwich se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0$$

Pero:

$$-\,|a_n b_n| \leq a_n b_n \leq |a_n b_n|$$

Como ambos límites de los extremos tienden a cero, entonces concluimos nuevamente por teorema del sándwich que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$$

demostrando así lo pedido. ■

Esto prueba que para límites de la forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}$$

basta estudiar el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ pues $\operatorname{sen}(n)$ es acotada.

(b) Tenemos por hipótesis que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$$

Entonces por definición, para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $n > N$ se cumple que:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \epsilon$$

Abriendo el módulo,

$$L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon$$

En particular, se cumple que para todo $\epsilon > 0$

$$0 < a_{n+1} < a_n (L + \epsilon)$$

Es decir, resolviendo de forma iterativa se observa que para $n > N$ ocurre que:

$$0 < a_n < a_N (L + \epsilon)^{n-N}$$

pero como esto debe cumplirse para todo ϵ, en particular para ϵ muy pequeño, entonces podemos asumir que $L + \epsilon < 1$. Haciendo $n \to \infty$ concluimos por teorema del sándwich que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

demostrando así lo pedido. ■

Para la primera sucesión:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^5} = 0 < 1$$

con lo cual concluimos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!} = 0$. De la misma forma, tenemos que.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= 0 \cdot e < 1
\end{aligned}$$

El primer límite tiende a cero bajo el mismo argumento del cuociente que vimos recién. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}} = 0$$

Utilizaremos en los próximos problemas el Teorema de las Sucesiones Monótonas, el cual no es solo un resultado importante, si no que fundamental para los desarrollos teóricos que generan los cimientos del cálculo y del análisis:

Teorema: Toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monótona y acotada es convergente.

Luego, debemos demostrar dos cosas:

- a_n es monótona. Se observa que en este caso (por simple inspección) que debe ser monótona creciente.
- a_n está acotada superiormente.

Esto es lo que generalmente se realizará en este tipo de problemas.

Problema 2.11: Dada la sucesión $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \dfrac{9\left(a_n+1\right)}{9+a_n}$.
Demuestre que es convergente y calcule su límite.

Solución:

Vamos paso a paso haciendo uso del teorema anterior.

Demostrar que es monótona creciente: Por demostrar que:

$$a_{n+1} > a_n \Longleftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0$$

Esto lo realizaremos por inducción dado que la sucesión la tenemos definida de forma recursiva (no vale la pena buscar una expresión explícita).

Primero probamos el caso base:

$$a_2 = \frac{18}{10} > a_1 = 1$$

lo cual es cierto. La hipótesis inductiva plantea que:

$$a_{n+1} > \frac{9\left(a_n+1\right)}{9+a_n}$$

Por demostrar, usando esta información, que:

$$a_{n+2} = \frac{9\left(a_{n+1}+1\right)}{9+a_{n+1}} > a_{n+1} = \frac{9\left(a_n+1\right)}{9+a_n}$$

Como esta es una sucesión de términos positivos, esto es claramente equivalente a probar que:

$$9\left(a_{n+1}+1\right)\left(9+a_n\right) > 9\left(a_n+1\right)\left(9+a_{n+1}\right)$$

O equivalentemente (expandiendo):

$$9a_{n+1}+\cancel{a_n a_{n+1}}+\cancel{9}+a_n > 9a_n+\cancel{a_n a_{n+1}}+\cancel{9}+a_{n+1}$$

$$\to 8a_{n+1} > 8a_n$$

lo cual es cierto por hipótesis inductiva. Luego, por principio de inducción hemos demostrado que a_n es monótona creciente.

Demostrar que está acotada: Ahora probaremos que la función está acotada, superiormente en este caso. La primera pregunta que debemos hacernos es: ¿cuál es la cota?

Abusemos del problema y obtengamos esa información a partir del límite, el cual podemos calcular de forma sencilla con el teorema para funciones recursivas:

$$L=\frac{9\left(L+1\right)}{9+L} \to 9L+L^2=9L+9 \to L^2=3$$

Como la sucesión es claramente positiva, entonces $\boxed{L=3}$. Por lo tanto, solo nos falta demostrar inductivamente que

$$a_n \leq 3$$

El caso base lo cumple claramente pues $a_1=1\leq 3$. La hipótesis inductiva plantea que:

$$a_n \leq 3$$

Por demostrar que:

$$a_{n+1} \leq 3$$

O equivalentemente de acuerdo a la definición:

$$\frac{9\left(a_n+1\right)}{9+a_n} \leq 3 \leftrightarrow 9a_n+9 \leq 27+3a_n$$

O bien,

$$6a_n \leq 18 \leftrightarrow a_n \leq 3$$

lo cual es la hipótesis inductiva. Luego, hemos demostrado por principio de inducción que la función está acotada superiormente.

Como la función es monótona creciente y está acotada superiormente por 3, concluimos por teorema que a_n converge. Ya calculamos su límite, y corresponde a $\boxed{L=3}$.

Problema 2.12: Sea $\left\{a_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos que es creciente. Demuestre que la sucesión $\left\{1/a_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Solución:

Podemos demostrar que es convergente a partir del teorema de las secuencias monótonas. Tenemos que demostrar entonces que:

- $1/a_n$ es monótona.
- $1/a_n$ está acotada.

Lo primero es sencillo de demostrar pues al ser a_n creciente y positiva tenemos que:

$$0 < a_n < a_{n+1} \to \frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}}$$

i.e. $1/a_n$ es monótona creciente.

Demostrar que está acotada es aún más sencillo, pues basta ver que como a_n es una sucesión de términos positivos, entonces:

$$\frac{1}{a_n} > 0$$

Luego, como la función es monótona decreciente y acotada inferiormente por cero, concluimos que $\{1/a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. ■

Problema 2.13:

(a) Sea $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}$. Demuestre que es convergente y calcule su límite. *Ayuda*: $a_n > 1/2$.

(b) Considere la sucesión dada por

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

Pruebe que converge y que su límite L es menor que $1/2$.

Solución:

(a) Utilizaremos el Teorema de las Sucesiones Monótonas. Para ello, primero demostremos que es **monótona decreciente**.

Tenemos que demostrar que:

$$a_n > a_{n+1}$$

Pero reemplazando con la definición de la sucesión:

$$\leftrightarrow \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1} > \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\sqrt{n+2}$$

Expandiendo, la expresión es equivalente a:

$$\leftrightarrow n+1-\sqrt{n\,(n+1)} > n+2-\sqrt{(n+1)\,(n+2)}$$

Reordenando:

$$\leftrightarrow \sqrt{(n+1)\,(n+2)} > 1+\sqrt{n\,(n+1)}$$

Como se trata de números positivos, podemos elevar al cuadrado y la expresión sigue siendo equivalente:

$$\leftrightarrow (n+1)(n+2) > 1 + 2\sqrt{n(n+1)} + n(n+1)$$
$$\leftrightarrow \underbrace{2(n+1)-1}_{>0} > 2\sqrt{n(n+1)}$$

O equivalentemente,

$$\begin{aligned} 4(n+1)^2 - 4(n+1) - 1 &> 2n(n+1) \\ (n+1)[4(n+1) - 4 - 2n] &> 1 \\ (n+1)(2n) &> 1 \end{aligned}$$

Esta última expresión es cierta para todos los naturales $n \geq 1$ y es fácil de probar por inducción. Demostramos así que la función es monótona decreciente.

Ahora demostremos que **está acotada inferiormente** *(de acuerdo a la ayuda)* **por 1/2**. Por demostrar que:

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1} > 2$$

Observe que podemos hacer esto "jugando" con la sucesión. Para ello, observe que:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1} &= \frac{(n+1-n)\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

Pero $0 < \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$ pues es una función creciente evaluada en los números naturales. Luego, por axiomática real,

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Demostrando así que está acotada inferiormente por $1/2$. Con esto concluimos que la función es convergente. ■

Para calcular el límite basta calcular:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + \sqrt{1}} \end{aligned}$$

Donde se multiplicó arriba y abajo por $1/n$. Por teoremas de límites concluimos que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}}$$

(b) Demostraremos que es monótona y acotada. La función es monótona decreciente pues observando la relación de recurrencia en este caso, tenemos que:

$$a_{n+1} = a_n \frac{2n+1}{2n+2}$$

Como $\dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$, entonces $a_{n+1} < a_n$ por lo cual es decreciente.

La función está acotada inferiormente por cero pues es una sucesión de términos positivos. Por lo tanto, converge.

Para demostrar que el límite es menor que 1/2 basta ver que $a_1 = 1/2$ la función es montóna decreciente. Luego,

$$a_n < a_{n-1} < \cdots < a_1 = \frac{1}{2} \rightarrow a_n \leq \frac{1}{2}$$

Es decir,

$$0 \leq L \leq \frac{1}{2}$$

y así se demuestra todo lo pedido. ■

Problema 2.14: [**Propuesto**] Sea $a > 0$. Definimos la sucesión:

$$x_n = 1 \quad , \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Demuestre que la sucesión converge y luego calcule su límite.

2.3. Series numéricas y criterios de convergencia

El objetivo de esta sección es tomar un objeto matemático ya conocido desde los cursos de precálculo como son las **series**:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

con a_k una función $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ y determinar (y calcular en algunos casos) si el límite $\lim_{n\rightarrow\infty} S_n$ existe. Se define una *serie infinita* como:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\rightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Cuando este límite existe la serie se dice **convergente**. Si $S_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces la serie se dice **divergente**.

A partir de esta definición partiremos calculando el valor de una serie como motivación.

Problema 2.15: Un pequeño divertimento. ¿Es convergente la siguiente serie? Si su respuesta es afirmativa, calcúlela. En caso contrario, explique por qué diverge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$$

Solución:

Partamos aplicando la definición de serie en infinito:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$$

Calculemos la sumatoria como función de m y luego tomemos el límite. Por propiedad de suma de logaritmos: $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$, con lo cual:

$$\sum_{n=2}^{m} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \underbrace{\ln\left(\prod_{n=2}^{m} \frac{n^2}{n^2-1}\right)}_{(1)}$$

Observe que para $n \to \infty$ tenemos que $\dfrac{n^2}{n^2-1} \to 1$, lo cual ya nos entrega una noción de que probablemente la serie converja, pues estamos multiplicando 1 al final de la serie.

Calculemos (1). Lo primero que podemos partir por notar es que debido a las propiedades del productorio (y por sobre todo, propiedades de la multiplicación), se cumple que:

$$\prod_{n=2}^{m} \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{\displaystyle\prod_{n=2}^{m} n^2}{\displaystyle\prod_{n=2}^{m} (n-1)(n+1)} = \frac{\left(\displaystyle\prod_{n=2}^{m} n\right)^2}{\left(\displaystyle\prod_{n=2}^{m} n-1\right)\left(\displaystyle\prod_{n=2}^{m} n+1\right)}$$

Observe el lector que:

$$\begin{aligned}
\prod_{n=2}^{m} n &= 2\cdot 3 \cdots n = m! \\
\prod_{n=2}^{m} (n-1) &= 1\cdot 2 \cdots (m-1) = (m-1)! \\
\prod_{n=2}^{m} (n+1) &= 3\cdot 4\cdot 5 \cdots (m+1) = (m+1)!
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\prod_{n=2}^{m} \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{2\,(m!^2)}{(m-1)!\,(m+1)!} = \frac{2m}{m+1}$$

Con ello se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) &= \lim_{m\to\infty} \ln\left(\frac{2m}{m+1}\right) \\ &= \ln\left(\lim_{m\to\infty}\frac{2m}{m+1}\right) \leftarrow \text{por continuidad de } \ln(x)\end{aligned}$$

Finalmente, la suma **converge** y su valor es:

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \ln(2)}$$

Problema 2.16: Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (1+\alpha)^{-n} = 2$

Solución:

Calculemos la serie para α cualquiera, luego igualamos a 2 y despejamos la ecuación. Se tendrá por la definición de serie que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+\alpha)^{-n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(1+\alpha)^n}$$

Pero por la propiedad telescópica sabemos que:

$$\sum_{n=2}^{N} r^n = \frac{r^2 - r^{N+1}}{1-r}$$

Es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(1+\alpha)^n} = \lim_{N\to\infty} \frac{(1+\alpha)^{-2} - (1+\alpha)^{-(N+1)}}{1-(1+\alpha)^{-1}}$$

Para que $(1+\alpha)^{N+1} < \infty$ (que sea un número finito), requerimos que $|1+\alpha|^{-1} < 1 \rightarrow \boxed{|1+\alpha| > 1}$ pues solo de esta forma tenderá a ser un número finito. Luego,

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+\alpha)^{-n} = \frac{(1+\alpha)^{-2}}{1-(1+\alpha)^{-1}} = \frac{1}{(1+\alpha)^2 - (1+\alpha)} = \frac{1}{\alpha(1+\alpha)}$$

Requerimos entonces que α sea tal que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+\alpha)^{-n} = 2 \rightarrow \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} = 2$$

O equivalentemente,

$$2\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sin embargo, no debemos olvidar que es una condición que $|1+\alpha| > 1$ para que la serie converja, razón por la cual solo nos servirá

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

como solución.

Nuestro objetivo ahora será determinar si es que la serie en cuestión converge o diverge en cada caso. Dado que en muchos casos la serie no nos permite obtener una función explícita para evaluar en el límite, debemos recurrir a criterios que si bien no nos permiten calcular la serie sí nos permiten establecer si la serie converge o no converge.

Partiremos enunciado aquellos con los cuales partiremos trabajando en los próximos ejercicios. Comencemos con un criterio básico de convergencia:

Proposición: Sea $\sum a_n$ una serie convergente. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esta no es una demostración complicada de realizar, pero es sencillo notar que si $a_n \to u \neq 0$, entonces estaríamos sumando infinitos términos no nulos, lo cual claramente es divergente. Esta es por lo tanto una **condición necesaria, pero no suficiente** para la convergencia de una serie. Ello quiere decir que si tomamos el límite en infinito y obtenemos un resultado distinto de cero, concluimos que la serie diverge. ¡Si el límite se anula cero no podemos concluir nada del comportamiento de la serie!

Un ejemplo clásico es la serie armónica, $a_n = 1/n$, la cual sí cumple la proposición pero es conocidamente divergente.

Al igual que en integrales impropias, podemos establecer criterios de comparación:

Proposición: Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ y $\sum c_n$ sumas tales que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $a_n \leq b_n \leq c_n$. Entonces,

- Si $\sum a_n$ y $\sum c_n$ convergen, entonces $\sum b_n$ converge.
- Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ converge.

Una consecuencia directa de esta proposición es, en analogía a las integrales impropias, el Criterio de Comparación al Límite:

Teorema: Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos. Si el siguiente límite existe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$$

Entonces:

- Si $\ell > 0$, entonces $\sum a_n$ hereda la convergencia de $\sum b_n$, i.e. $\sum a_n$ converge/diverge si $\sum b_n$ converge/diverge.
- Si $\ell = 0$, entonces si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge. En este caso no se puede garantizar nada sobre $\sum a_n$ si $\sum b_n$ converge.
- Si $\ell = \infty$ entonces si $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge. En este caso no se puede garantizar nada sobre $\sum a_n$ si $\sum b_n$ converge.

Por lo tanto, en muchos casos, tal como en integrales impropias, es una buena idea estudiar el comportamiento asintótico de a_n para encontrar una buena serie con la cual realizar una comparación.

El último criterio que utilizaremos en esta sección es el Criterio de la Razón o Criterio de D'Alembert:

Teorema: Sea $\sum a_n$ una serie y sea:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$$

Entonces:

- Si $\ell < 1$ entonces la serie converge absolutamente, y por lo tanto $\sum a_n$ converge.
- Si $1 < \ell \leq \infty$ (∞ incluido), entonces la serie $\sum a_n$ diverge.
- Si $\ell = 1$ el test no es concluyente y se requiere un análisis de otro tipo para concluir.

Como antecedente previo de trabajo solo disponemos de información conocida el resultado para dos series:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$. Este criterio se conoce como criterio de la p- serie.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ converge si y solo si $|r| < 1$.

Trabajaremos a partir de estos criterios en los ejercicios próximos.

Problema 2.17: Determine si las siguientes series son convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n}{3^n + n}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln n}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}+n^{2/3}}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)(n+3)}$.

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+k}{2k^4+\sqrt{k}}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \tan^3\left(\frac{1}{k}\right)$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(k) $1 + \dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$.

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si $a_1 = 1$ y $a_n = \dfrac{2+\cos n}{\sqrt{n}}$.

Solución:

(a) En funciones racionales (divisiones de polinomios) sabemos que el comportamiento asintótico lo deciden en infinito los términos de grado superior. De esta forma,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{(k+3)^2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

la cual es una serie claramente divergente. En efecto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)}{(k+3)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+k}{k^2+6k+9} = 1 \neq 0$$

con lo cual la serie es **divergente** por el criterio de la necesidad.

(b) En este caso tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$$

lo cual nos permite conjeturar que la serie es posiblemente divergente. Verificamos el criterio de la necesidad:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1-n)\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0\end{aligned}$$

i.e. la serie **diverge** por el criterio de la necesidad.

(c) Es sabido que las funciones exponenciales presentan un crecimiento mucho más abrupto que las funciones polinomiales, de modo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n}{3^n + n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

lo cual si bien podemos verificarlo con el teorema de comparación al límite, lo haremos mediante desigualdades de una forma más elegante. Observe que:

$$\begin{aligned} 2^n - n &\leq 2^n \\ 3^n + n &\geq 3^n \end{aligned}$$

de modo que:

$$2^n - n \leq 2^n \to \frac{2^n - n}{3^n + n} \leq \frac{2^n}{3^n + n}$$

Pero como $3^n + n \geq 3^n$, entonces:

$$0 \leq \frac{2^n - n}{3^n + n} \leq \frac{2^n}{3^n + n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Sumando de 1 a ∞ tenemos que:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n}{3^n + n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

como la suma de la derecha converge pues $2/3 < 1$, entonces concluimos que la serie en cuestión **converge** por comparación.

(d) Una desigualdad que el lector siempre debe recordar en estos ejercicios, y que puede comprobar incluso de forma gráfica es que:

$$\log(1 + x) \leq x \to \log(n) \leq n - 1$$

De esta forma, para hacer similar la expresión a la serie, sumamos 1:

$$\log(n) + 1 \leq n \to \frac{1}{1 + \log(n)} \geq \frac{1}{n}$$

Es decir, sumando de 1 a ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \log(n)}$$

Luego, en efecto ambas series son comparables. Como la serie armónica diverge, entonces la serie en cuestión **diverge**.

(e) A partir de las observaciones asintóticas tenemos que para $n \geq 1$ se cumple que $n^{2/3} > n^{1/2}$, con lo cual:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2} + n^{2/3}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$$

la cual sabemos a priori que diverge por el criterio de la $p-$serie, i.e. $p = 2/3 \leq 1$. En efecto,

$$n^{2/3} + n^{1/2} \leq n^{2/3} + n^{2/3} \to \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2} + n^{2/3}}$$

Como la serie de la izquierda diverge, concluimos que la serie estudiada **diverge.**

(f) Partamos observando el comportamiento asintótico de la serie. Tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)(n+3)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$$

la cual converge por el criterio de la $p-$serie ($p = 5/3 > 1$). Formalicemos esta observación mediante el criterio de comparación al límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}}{(n+1)(n+3)} \cdot n^{5/3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+4n+3} = 1 > 0$$

Luego, como la serie con la cual se converge, la serie estudiada también **converge**.

(g) Partimos observando el comportamiento asintótico:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+k}{2k^4+\sqrt{k}} \sim \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

Es decir, en efecto la serie podría converger. Podemos comparar al límite:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3k^2+k}{2k^4+\sqrt{k}} \cdot \frac{k^4}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k^6+k^5}{2k^6+k^{5/2}} = \frac{3}{2} > 0$$

con lo cual la serie estudiada **converge**.

(h) Observe que en infinito tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\right) = 0$$

por teorema de la función continua. Es decir, observe que **en infinito estamos evaluando seno en un número muy cercano a cero**. Sabemos que en el origen la función seno se comporta asintóticamente como la función x puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$$

i.e. para x cercano a cero $\operatorname{sen}(x) \approx x$. Luego, se sigue que la serie se comporta asintóticamente como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = 1 > 0$$

Luego, como la serie armónica es divergente, concluimos que la serie en cuestión **diverge**.

(i) El procedimiento es exactamente el mismo que en el ejercicio anterior. Estamos evaluando $\tan(x)$ cerca del origen al hacer tender k a infinito. Luego, observe el lector que $\tan(x) \approx x$ cerca de $x = 0$ pues

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x \cos(x)} = 1$$

Es decir, $\tan^3\left(\frac{1}{k}\right) \approx \frac{1}{k^3}$ en $k \to \infty$. Comprobamos esta idea tomando el límite:

$$\lim_{k \to \infty} k^3 \tan^3\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\tan^3(x)}{x^3} = 1$$

Luego, como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge por el criterio de la $p-$serie, entonces concluimos que la serie en cuestión **converge**.

(k) Exactamente lo mismo en este caso. Como cerca del origen se tiene que $\ln(1+x) \approx x$ pues

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

entonces $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$ cuando $n \to \infty$. En efecto,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Luego, como la serie armónica diverge, la serie estudiada **diverge**.

(l) Lo primero que debemos hacer es escribir la serie en cuestión como una sumatoria. Para esto observamos que en el término $n-$ésimo se ubica la multiplicación de los primeros n términos en el numerador y de los primeros n términos impares en el denominador, i.e.

$$1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

Por el simple hecho de que aparece un factorial, los análisis resultan en extremo sencillos utilizando el criterio de la razón. Veamos por qué. Dado a_n, luego se sigue que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n+1} \end{aligned}$$

Observe que en las expresiones factoriales se simplifica una gran cantidad de términos. Luego,

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

y por lo tanto la serie en cuestión **converge**.

(m) Nuevamente, dada la aparición de factoriales, resulta útil utilizar el criterio de la razón para analizar el límite en cuestión. Tomamos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}\cdot\frac{(n)!^2}{(2n)!} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

Luego, como $4>1$ la serie en cuestión **diverge**.

(n) Utilizando el criterio del cuociente dada la presencia de factoriales tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1} = \infty$$

razón por la cual la serie claramente **diverge**.

(o) Dado que tenemos una expresión recursiva, en la que incluso es fácil obtener el cuociente entre a_{n+1} y a_n, es sugerente utilizar el criterio del cuociente. Para $n>1$ se tiene que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}}$$

Tomando el límite del módulo cuando $n\to\infty$ se tiene que:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}}\right| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}$$

pues coseno puede tomar 1 como máximo valor. Luego, como el límite de la derecha es cero, concluimos por teorema del sándwich que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$$

Finalmente concluimos que la serie **converge**.

Problema 2.18:

(a) Demuestre que si $a_n>0$ y $\sum a_n$ es convergente entonces $\sum \ln(1+a_n)$ también es convergente. ¿Se cumple la expresión recíproca?

(b) Si $\sum a_n$ es una serie convergente con $a_n\neq 0$, ¿qué puede decir de la convergencia de $\sum 1/a_n$? Justifique.

Solución:

(a) Lo primero que podemos rescatar a partir del hecho de que $\sum a_n$ sea convergente es el hecho de que por criterio de la necesidad

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Luego, como logaritmo es una función continua:

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1+a_n) = 0$$

lo que descarta la posibilidad de que diverja mediante este criterio. Adicionalmente, tenemos que $\ln(1+a_n) \approx a_n$ pues a_n es una expresión que tiende a cero y ya estudiamos el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1 > 0$$

De modo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

y por lo tanto ambas series son comparables. Luego, tenemos que $\sum \ln(1+a_n)$ hereda el comportamiento de $\sum a_n$. Como $\sum a_n$ es convergente, concluimos entonces que $\sum \ln(1+a_n)$ converge. $\blacksquare$

Observe que el recíproco también se cumple, puesto que si $\sum \ln(1+a_n)$ es convergente, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1+a_n) = \ln\left(1 + \lim_{n\to\infty} a_n\right) = 0$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Adicionalmente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln(1+a_n)} = 1 > 0$$

por lo cual $\sum a_n$ hereda la convergencia de $\sum \ln(1+a_n)$.

(b) En primer lugar, observemos que dado que $a_n \neq 0$ entonces $1/a_n$ no diverge para ningún n en particular. Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

razón por la cual la serie $\sum 1/a_n$ **diverge**. En efecto, como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la sucesión está acotada y existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$a_n \leq c \to \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{c}$$

Sumando de 1 a ∞:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

con lo cual concluimos nuevamente que la serie en cuestión diverge.

Estudiemos algunos problemas de parámetros. En estos casos seguiremos utilizando los criterios de convergencia, ya que a partir de ellos sí podemos deducir características de la función y por lo tanto de los parámetros.

Problema 2.19:

(a) Encuentre los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

es convergente.

(b) Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{N}$ para los cuales la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

es convergente.

(c) Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}$$

Solución:

(a) Bajo la lógica de los problemas de parámetros, supongamos que la serie converge. Dado que la expresión resultante en la serie es polinomial, estamos más que tentados a trabajar con la expresión asintótica. En efecto, trabajemos la expresión para comprender mejor lo que tenemos:

$$\begin{aligned} k^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) &= k^{\alpha} \left(\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \right) \\ &= k^{\alpha} \frac{k+1-k}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)} \\ &= \frac{k^{\alpha}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)} \end{aligned}$$

De aquí ya resulta sencillo deducir el comportamiento asintótico. Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2-\alpha}}$$

Por criterio de la $p-$serie tenemos que la condición necesaria y suficiente es que $p = 3/2 - \alpha > 1$. Es decir,

$$\boxed{\alpha < \frac{1}{2}}$$

es la condición buscada. Comprobamos la validez de la comparación asintótica a partir del Criterio de Comparación al Límite. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} k^{3/2-\alpha}k^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) &= \lim_{k\to\infty}\frac{k^{3/2}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}\\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{1+\dfrac{1}{k}}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{k}}+\sqrt{1}\right)}\\
&= \frac{1}{2}>0
\end{aligned}$$

lo cual comprueba la validez de la comparación realizada.

(b) Nuevamente asumamos que la serie converge. Luego, como la serie involucra factoriales, una buena forma de analizarla es a través del Criterio de la Razón. Tomamos entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!^2}{[k\,(n+1)]!}\frac{(kn)!}{(n!)^2}$$

Para realizar las simplificaciones respectivas observamos que:

$$\begin{aligned}
[k\,(n+1)]! &= (kn+k)!\\
&= 1\cdot 2\cdot 3\cdots kn\cdot(kn+1)\cdot(kn+2)\cdots(kn+k)
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(kn+1)\,(kn+2)\cdots(kn+k)}$$

Ahora vamos analizando según los valores de k:

- Si $k=1$ nos queda el límite

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)}=\infty$$

  por lo cual la serie **diverge**.

- Si $k=2$ nos queda el límite

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)\,(2n+2)}=\frac{1}{4}<1$$

  por lo cual la serie **converge**.

- Si $k\geq 3$ tendremos en el numerador un polinomio de grado 2 y abajo un polinomio grado mayor o igual a 3, razón por la cual

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(kn+1)\,(kn+2)\cdots(kn+k)}=0<1$$

  razón por la cual la serie **converge**.

Concluimos entonces que la serie converge para $k \in \mathbb{N}$ tal que $\boxed{k \geq 2}$.

(c) Seguimos la misma idea que la parte anterior y evaluamos la convergencia según el Criterio del Cuociente dada la presencia de factoriales. Se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)!}}{(n+1)^{(n+1)\alpha}} \frac{n^{n\alpha}}{\sqrt{n!}}$$

Aplicando las simplificaciones respectivas:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n\alpha}(n+1)^{\alpha}} \\
&= e^{-\alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1/2}}
\end{aligned}$$

Para que el límite de la derecha no diverja tiene que cumplirse que $\alpha - 1/2 \geq 0 \to \alpha \geq 1/2$. En dicho caso el límite tiende a cero en todos los casos. Por lo tanto, no es necesario analizar los valores de α en la exponencial. Incluso observe el lector que si $\alpha = 1/2$ el límite de la derecha vale 1 y $e^{-1/2} < 1$ por lo cual el límite es menor a 1 y también converge.

Luego, la serie converge para $\boxed{\alpha \geq \dfrac{1}{2}}$.

Problema 2.20: Estudie para qué valores de $p > 0$ la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^p}\right)}{\log(n)}$$

es convergente.

Solución:

Evidentemente según el valor de p la fracción $1/n^p$ puede convertirse en una expresión polinomial. Como se descarta el caso $p \leq 0$, la función siempre será polinomial. Partamos buscando algún comportamiento asintóico.

Tenemos que $1/n^p$ tiende a cero en infinito y por lo tanto $\operatorname{sen}(1/n^p)$ es comparable a $1/n^p$ por Teorema de Comparación al Límite. Es decir,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^p}\right)}{\log(n)} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log(n)}$$

pues $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^p \log(n) \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^p}\right)}{\log(n)} = 1 > 0$. Es decir, estudiamos el comportamiento de la segunda serie.

Es evidente que la tentación es a comparar con $\sum 1/n^p$, y para evitar todas las eventualidades que se puedan generar, escribiremos una desigualdad para realizar la comparación. Parta por observar el lector que para $n \geq 3$:

$$n^p \log(n) \geq n^p \to \frac{1}{n^p \log(n)} \leq \frac{1}{n^p}$$

Es decir, siempre ocurre que

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log(n)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

La serie de la derecha **siempre convergerá** para $p > 1$ por criterio de la $p-$serie. Sin embargo, ¿qué ocurre para $p \leq 1$? Esta desigualdad no dice nada al respecto. Requerimos hacer otro tipo de análisis en este caso.

Veamos primero qué ocurre para $p = 1$. En este caso tenemos la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$$

Si $f(x) = 1/[x \log(x)]$, observe que para $x \geq 2$ esta función es positiva, continua (pues es una composición de funciones continuas no divergentes en el dominio) y decreciente pues $x \log(x)$ es creciente (y por lo tanto el cuociente decreciente) al ser un producto de funciones crecientes. Luego, podemos aplicar el Criterio de la Integral, y así tenemos que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} \text{ converge} \longleftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \log(x)} \text{ converge}$$

Para estudiar la integral basta notar que aparece una función ($\log(x)$) y su derivada ($1/x$). Es decir, hacemos $u = \log(x) \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$ y con ello

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \log(x)} = \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

la cual es una integral que diverge por el criterio de la $p-$integral ($p = 1$). Es decir, por criterio de la integral para $p = 1$ la serie **diverge**.

Si $p < 1$ tenemos que $n^p < n$ (haga un gráfico para comprobarlo). Luego,

$$n^p \log(n) < n \log(n) \to \frac{1}{n^p \log(n)} > \frac{1}{n \log(n)}$$

Luego,

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log(n)}$$

Como la serie de al medio diverge, entonces la serie estudiada también diverge. Es decir, la serie diverge para $p \in (0, 1)$.

Finalmente, concluimos que la serie **converge** para $p > 1$.

Problema 2.21: [**Propuesto**] Sean (a_n) y (b_n) sucesiones tales que $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

$$\sum a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum \frac{b_n}{a_n} \text{ converge}$$

Analizaremos ahora la convergencia de series mediante otro juego de criterios adicionales. Revisemos brevemente algunos de ellos.

El primero de ellos guarda relación directa con el criterio del cuociente dados los planteamientos y la naturaleza de las series involucradas en su estudio. Se conoce como Criterio de la Raíz:

Teorema: Sea la serie infinita $\sum a_k$. Consideramos el límite (si existe):

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{|a_k|} = \ell > 0$$

- Si $\ell < 1$ la serie converge.
- Si $\ell > 1$ la serie diverge.
- Si $\ell = 1$ el criterio de la raíz **no** es concluyente.

Este criterio resulta en extremo útil para estudiar expresiones en las cuales aparecen involucradas funciones exponenciales. **No** se recomienda el uso de este criterio cuando aparecen involucrados factoriales, puesto que el cálculo de límites como $\sqrt[n]{n!}$ no ha sido estudiado.

Utilizaremos también un importante resultado, conocido como Criterio de la Integral, el cual nos permite comparar el estudio de las series infinitas con integrales impropias de primera especie.

Teorema: Sea $f : [n, \infty) \to [0, \infty)$ una función:

- Continua (o integrable en su defecto).
- Decreciente.
- Positiva en todo su dominio.
- Tal que $a_i = f(i)$.

Entonces:

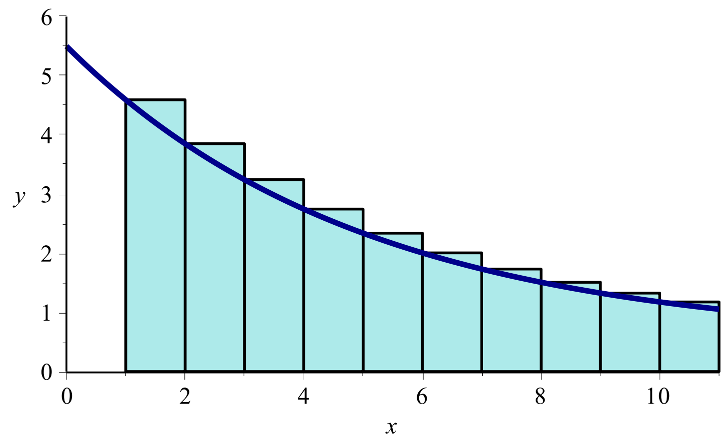
$$\int_n^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x \text{ es convergente} \Longleftrightarrow \sum_{i=n}^{\infty} a_i \text{ es convergente}$$

Observe que para poder hacer uso de este criterio todas las condiciones para f **deben verificarse y demostrarse** antes de utilizarlo.

Revisaremos la demostración de este teorema pues existe una conexión conceptual muy importante que debe realizarse.

Demostración:

Consideremos la gráfica de una función positiva y decreciente como la siguiente. Marcaremos adicionalmente rectángulos de ancho 1 en que tomamos como altura el extremo de la izquierda del rectángulo evaluado en la función:



Dado que la función es claramente decreciente, se sigue que:

$$\int_n^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=n}^{m} f(i) \cdot 1 = \sum_{i=n}^{m} a_i$$

No sumamos hasta $m+1$ puesto que con basta para ser mayor considerar el rectángulo de altura m. Por lo tanto, bajo esa misma idea se sigue que si ahora tomamos la altura de los rectángulos en el lado derecho, entonces

$$\sum_{i=n+1}^{m+1} a_i \leq \int_n^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=n}^{m} a_i$$

Ahora a partir de esto demostremos ambos lados de la implicancia.

($\rightarrow$) Observe que de la desigualdad izquierda:

$$0 \leq \sum_{i=n+1}^{m} a_i \leq \int_n^{m} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Luego, como el límite de la derecha existe, entonces la sucesión converge.

($\leftarrow$) De la desigualdad derecha:

$$0 \leq \int_n^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=n}^{m} a_i$$

con lo cual la integral impropia converge al tomar $m \to \infty$.

Finalmente, se verifica la relación de equivalencia y se demuestra así el teorema. ■

Observación: Tomando el lado izquierdo de la desigualdad:

$$\sum_{i=n+1}^{m+1} a_i \leq \int_n^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Entonces,

$$\sum_{i=n+1}^{m} a_i \leq \int_n^{m} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sumando a ambos lados a_n :

$$\to \sum_{i=n}^{m} a_i \leq \int_n^{m} f(x)\,\mathrm{d}x + a_n$$

Pero del lado derecho de la desigualdad:

$$\int_n^{m+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{i=n}^{m} a_i \leq \int_n^{m} f(x)\,\mathrm{d}x + a_n$$

Tomando $m \to \infty$:

$$\boxed{\int_n^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i \leq \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + a_n}$$

la cual es una muy buena forma de acotar el valor de la serie a un intervalo si es que podemos calcular la integral en cuestión. Se puede demostrar de forma análoga que:

$$\boxed{\int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i \leq \int_{n-1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x} \quad \square$$

Estudiaremos adicionalmente las **series alternantes**. Partiremos haciendo énfasis en la definición de serie alternante. Una serie infinita $\sum a_i$ se dice *alternante* si:

$$a_i \cdot a_{i+1} < 0 \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

Es decir, si sea por la razón que sea esta cambia de signo término a término. Para series alternantes disponemos del siguiente criterio, conocido como Criterio de Leibniz:

Teorema: Si para $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se verifica que:

(a) $a_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

(b) Es decreciente para todo $i \in \mathbb{N}$.

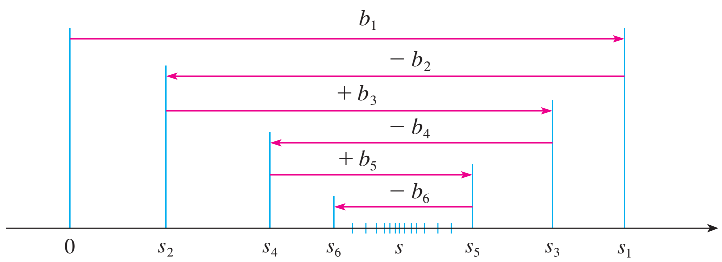
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces $\sum (-1)^i a_i$ es convergente.

Observación: La idea detrás de la demostración es que si

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i b_i \quad \text{y} \quad s = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i b_i$$

Entonces se observa un comportamiento oscilatorio como el siguiente:



Y por lo tanto s está contenida entre s_n y s_{n+1}, i.e.

$$\boxed{|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}}$$

Esta es una buena forma de encontrar el error máximo obtenido al estimar s por su suma parcial s_n. $\square$

El análisis de las series alternantes plantea la necesidad de establecer una nueva clasificación para las series. De esta forma introducimos el concepto de *convergencia absoluta* y *convergencia condicional*:

Definición: Sea $\sum a_i$ una serie infinita, entonces:

- $\sum a_i$ se dice *absolutamente convergente* si $\sum |a_i|$ converge.
- $\sum a_i$ se dice *condicionalmente convergente* si converge, pero no $\sum |a_i|$.

Se puede desprender inmediatamente de la convergencia absoluta de una serie que la serie también converge, pues:

$$-\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

Como los extremos convergen dada la definición, entonces la serie en cuestión también. Resulta por lo tanto interesante en varios casos simplemente tomar el módulo (lo cual puede simplificar los cálculos) y estudiar así la convergencia de una serie. $\square$

Mediante todos estos desarrollos teóricos trabajaremos en los próximos problemas.

Problema 2.22: Estudie la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\arctan(k)}}{1+k^2}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)\left[1+\ln(n)\right]}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\ln(n)}{n}\right]^n$.

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left\{k^2\left[\cos\left(\frac{1}{k}\right)-1\right]\right\}^k$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$.

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k^k}$.

(k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$.

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1+(-1)^n\frac{\sqrt{n+3}}{n+1}\right]$.

Solución:

(a) Observe que si bien resulta sencillo notar que $e^{-\arctan(k)} \leq e^{\arctan(0)} = 1$, de modo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\arctan(k)}}{1+k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

(y por lo tanto la serie converge), también se puede aprovechar el hecho de que aparece una serie con una composición de funciones "extraña" y utilizar así el Criterio de la Integral para analizar la serie. Observe que:

- $1+k^2$ y $e^{-\arctan(k)}$ son ambas una composición de funciones continuas y por lo tanto son continuas. Luego, como $1+k^2>0$ para todo k por axiomática real, entonces

  $$f(x) = \frac{e^{-\arctan(x)}}{1+x^2}$$

  es una función **continua** para todo $\mathbb{R}$, y en particular para $x \geq 1$.

- $f(x)$ es una función **positiva** pues e^x es una función positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. El cuociente de funciones positivas es siempre positivo.

- $f(x)$ es **decreciente** pues $\arctan(x)$ es una función creciente y e^{-x} una función decreciente. Luego, $e^{-\arctan(x)}$ es decreciente, y como $1/\left(1+x^2\right)$ es decreciente, entonces al ser ambas funciones positivas y decrecientes, entonces $f(x)$ también es decreciente. Esto se puede verificar en efecto tomando $f'(x)$ y viendo que su signo es negativo. Sin embargo, esto se deja propuesto al lector dado lo complicado que puede resultar obtener la derivada de esta función.

Luego, se sigue que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\arctan(k)}}{1+k^2} \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} \frac{e^{-\arctan(x)}}{1+x^2}\mathrm{d}x \text{ converge}$$

Para analizar la integral en cuestión basta notar que aparece una función y su derivada. En este caso hacemos:

$$u = \arctan(x) \to \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Luego,

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\arctan(x)}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-u}\mathrm{d}u$$

La cual no solo converge, si no que incluso puede fácilmente calcularse. Luego, la serie estudiada **converge**.

(b) Dada la naturaleza de la función, podemos proceder exactamente de la misma forma. Diremos que la serie es comparable a la integral de

$$f(x) = \frac{1}{x\ln(x)\left[1+\ln(x)\right]}$$

Para ello, demostramos las tres condiciones necesarias:

- Tanto x, como $\ln(x)$ y $1+\ln(x)$ son funciones continuas no nulas para $x \geq 1$. Luego, por teorema $f(x)$ es **continua**.
- Para $x \geq 1$ se tiene que $x > 0$ y $\ln(x) > 0 \to 1+\ln(x) > 0$. Luego, la función es **positiva** en el intervalo de interés y nunca diverge entre medio.
- Para $x \geq 1$ se tiene que x, $\ln(x)$ y $1+\ln(x)$ son funciones evidentemente crecientes y positivas, razón por la cual su producto también es creciente y positivo. Luego, $f(x)$ es **decreciente**.

A partir de lo anterior, es válido el criterio que utilizaremos y se sigue que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\left[1+\ln(n)\right]} \text{ converge} \iff \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)\left[1+\ln(x)\right]} \text{ converge}$$

Esta integral puede parecer complicada de estudiar. Pero no lo es tanto si pensamos que antes de estudiar cualquier integral impropia es oportuno detectar si existe una expresión simplificada (ya sea por integración por partes o simplificación) de la misma integral. En particular, observe que aparece la función logaritmo y su derivada, razón por la cual hacemos

$$u = \ln(x) \to \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Entonces,

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)\left[1+\ln(x)\right]} = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)} = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+u} \leq \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

Observe que también era válido hacer esta comparación a partir del criterio de comparación al límite. Luego, como por criterio de la $p-$integral la integral de la derecha converge, entonces la integral en cuestión también. Finalmente, la serie estudiada **converge**.

(c) Observaremos el comportamiento de esta serie a la luz de dos criterios. En primer lugar, observe que estudiar la convergencia de la serie en cuestión puede resultar sencillo si estudiamos la integral impropia. Utilizando el Criterio de la Integral, partimos por demostrar las hipótesis involucradas en la función

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

- Se trata de un producto de funciones continuas. La exponencial nunca se anula. Por lo tanto, la función en cuestión es **continua**.
- Para $x \geq 1$ se tiene que $x > 0$ y $e^{-x^2} > 0$ por el simple hecho de tratarse de una función exponencial. Luego, $f(x)$ es **positiva**.
- Para analizar el decrecimiento de la función podemos tomar la derivada en este caso:

  $$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2}$$

  Como $e^{-x^2} > 0$, basta analizar el signo de $(1 - 2x^2)$, una parábola que se abre hacia abajo con raíces en $\pm 1/\sqrt{2}$. Se sigue que para $x \geq 1$ la derivada es negativa y por lo tanto la función **decreciente**.

Luego, se sigue que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2} \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} xe^{-x^2} \mathrm{d}x \text{ converge}$$

Observe que en la integral aparece la función x^2 y una expresión proporcional a su derivada, x. Luego, hacemos:

$$u = x^2 \to \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$$

Con ello,

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-u} \mathrm{d}u$$

La cual es una integral claramente converge (e incluso es trivial su cálculo). Por lo tanto, la serie estudiada **converge.**

Sin embargo, ¿es este el único criterio mediante el cual podemos estudiar la convergencia de la integral? Podemos, de hecho, aplicar el Criterio de la Raíz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{ne^{-n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{-n^2/n} \\
&= 1 \cdot 0 \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

Luego, la serie **converge**.

Y de hecho, incluso podemos aplicar el Criterio del Cuociente:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} e^{-(n+1)^2 + n^2} \\
&= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} e^{-2n-2} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

por lo cual la serie **converge**.

(d) Por el simple hecho de que aparece un término elevado a la potencia $n-$ésima, sabemos que este puede ser simplificado mediante el Criterio de la Raíz. Utilizando este criterio tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

Luego, la serie **converge**. Observe como en este tipo de problemas la mayoría de las veces basta calcular un límite para obtener la respuesta.

(e) Nuevamente, aparece un término a la potencia $n-$ésima, lo cual sugiere de inmediato utilizar el Criterio de la Raíz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\
&= e > 1
\end{aligned}$$

Luego, se sigue que la serie **diverge**. Era incluso posible notar que la serie divergía por efecto del Criterio de la Necesidad.

(f) Bajo el mismo argumento anterior,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[\frac{\ln(n)}{n}\right]^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} \leftarrow \text{L'Hôpital} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1
\end{aligned}$$

Luego, se sigue que la serie **converge**.

(g) Nuevamente aparece una expresión en la cual aparece la potencia $k-$ésima. Se hace evidente la necesidad de utilizar el Criterio de la Raíz. Sin embargo, note el lector que para todo x se tiene que $\cos(x) \leq 1$, con lo cual

$$\cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1 \leq 0$$

Esto efectivamente justifica la necesidad de tomar el módulo en la raíz. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^2 \left\{k^2 \left|\cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right|\right\}^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} k^{2/k} k^2 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} k^{2/k} \lim_{k\to\infty} k^2 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right] \leftarrow x = \frac{1}{k} \\
&= 1 \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

Luego, la serie **converge**. Este ejercicio sugiere claramente el nivel de cuidado que hay que tener al momento de evaluar el límite en este criterio, ya que esto puede no resultar del todo sencillo.

(h) Nos enfrentamos ahora a una serie alternante producto de la expresión $(-1)^n$. En muchos casos puede resultar más cómodo preguntarse si es que la serie involucrada converge absolutamente (pues en dicho caso claramente converge), en muchos otros casos se requerirá clasificar la convergencia de la serie en cuestión.

Para los propósitos de este ejercicio, estudiemos en primer lugar la convergencia absoluta de la serie. Es decir, decidamos si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{\sqrt{n}}$$

es convergente o no converge. Basta observar que para $n \geq 3$ se tiene que $\log(n) \geq 1$. Luego, sumando desde 3 hasta infinito:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Como esta última serie diverge por el criterio de la $p-$serie, entonces la serie diverge (y por lo tanto la que inicia en $n=1$ también). Se sigue luego que la serie en estudio **no converge absolutamente**.

Estudiemos luego la convergencia condicional de la serie. En este caso, tenemos la serie alternante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{\sqrt{n}}$$

Tenemos una serie alternante que sí satisface el Criterio de la Necesidad, i.e. usando la Regla de L'Hôpital se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0 \to \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} = 0$$

La única forma conocida (en este curso) para garantizar la convergencia en este caso es mediante el Criterio de Leibniz. Sea

$$b_n = \frac{\log(n)}{\sqrt{n}}$$

Luego, notamos adicionalmente que:

- Para $n \geq 1$ tanto $\log(n)$ como $\sqrt{n}$ son funciones por positivas y por lo tanto el término b_n también es **positivo**.
- Tenemos que b_n es siempre decreciente puesto que dada

  $$f(x) = \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} \to f'(x) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\log x}{2\sqrt{x}}}{|x|} = \frac{1 - \frac{1}{2}\log(x)}{x^{3/2}} \text{ para } x \geq 1$$

  Como $x^{3/2} > 0$ para todo $x \geq 1$, basta analizar el comportamiento del numerador. Se tiene que:

  $$1 - \frac{1}{2}\log(x) < 0 \leftrightarrow \log(x) > 2 \leftrightarrow x > e^2$$

Es decir, si decimos $b_n = f(n)$, entonces la función solo es decreciente si $n \geq 9$. Sin embargo, como la convergencia de la serie se estudia en el infinito, y no en el origen, podemos estudiar la serie que parte en $n = 9$ (bajo los mismos criterios), deducir que esta converge y luego concluir que la serie que comienza en $n = 1$ también converge. Es decir, es argumento suficiente demostrar aquí que existe x_0 para el cual $f(x)$ es decreciente de x_0 en adelante. Por lo tanto, la función es **decreciente**.

- Ya vimos que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Se sigue entonces por el Criterio de Leibniz que la serie **converge**.

(i) La idea aquí es proceder de forma exactamente igual que en el punto anterior. Primero estudiamos la convergencia absoluta de la serie, i.e. estudiamos la convergencia de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{k^2+1}} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

En efecto,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{k}\sqrt{\frac{k}{k^2+1}} = 1 > 0$$

Luego, como la serie asintótica converge por el criterio de la $p-$serie, entonces la serie absoluta también lo hace. Por lo tanto, la serie no converge absolutamente. Debemos entonces estudiar la convergencia de la serie alternante. Para ello, requerimos el uso del Criterio de Leibniz. Sea

$$b_k = \sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$$

Entonces,

- Por el simple que hecho de que $k \geq 0$, lo contenido dentro de la serie nunca se hace negativo. Una raíz por definición es siempre positiva, razón por la cual $b_k \geq 0$ para todo k en el dominio de la serie.

- Para demostrar que b_k es decreciente observamos que si

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \to f'(x) = \frac{1-x^2}{2\sqrt{x}\left(x^2+1\right)^{3/2}}$$

  Observe que del denominador siempre es positivo para $x > 0$. El numerador es una parábola que se abre hacia abajo y que se hace negativo para $x > 1$. Luego, $f'(x)$ es siempre decreciente para $x > 1$, lo cual es más que suficiente para nuestros propósitos.

- Es muy sencillo notar que como el grado del denominador es mayor al del numerador, entonces

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

Luego, mediante el Criterio de Leibniz concluimos que la serie **converge condicionalmente**.

(j) Nos enfrentamos a una serie alternante nuevamente. Partimos preguntándonos: ¿converge absolutamente? Estudiemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

Dada la presencia de factoriales, utilizamos el Criterio del Cuociente para estudiar la serie:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k (k+1)} = e^{-1} < 1$$

Luego, la serie converge y por lo tanto la serie estudiada **converge absolutamente**. Como converge absolutamente, entonces la serie converge.

(k) La primera pregunta que hay que realizarse es: ¿a qué tipo de serie nos estamos enfrentando? Observe que $\cos(k\pi) = (-1)^k$, por lo que en realidad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Es decir, nos enfrentamos en realidad a una serie alternante. Estudiamos en primer lugar su convergencia absoluta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

lo cual ya vimos en un problema anterior. Por lo tanto la serie diverge y la serie estudiada **no converge absolutamente**. Estudiamos ahora la serie alternante involucrada. Demostraremos su convergencia utilizando el Criterio de Leibniz:

- Como $\dfrac{1}{k} \leq 1$ para $k \geq 1$, entonces $0 < \dfrac{1}{k} \leq \pi$, razón por la cual $b_k = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ es positivo para todo $k \geq 1$.

- La serie es decreciente pues si $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, entonces

  $$f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} < 0$$

  para todo $x \geq 1$ puesto que $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ para $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Por lo tanto, en particular b_k es decreciente.

- Se tiene que

  $$\lim_{k\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\right) \leftarrow \text{por continuidad}$$

  Luego, el límite es cero.

Concluimos entonces que la serie alternante converge y por lo tanto la serie **converge condicionalmente**.

(l) No podemos decir que a priori la serie en cuestión es alternante pues el $(-1)^n$ al interior del factor puede hacer que la serie en cuestión no cambie de signo. Una buena idea puede ser separar la expresión en dos, siempre con teniendo en mente que si ambas series divergen, nuestro análisis no será concluyente[6].

Entonces, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 + (-1)^n \frac{\sqrt{n+3}}{n+1}\right] = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} \sqrt{n+3}}{\sqrt{n}\,(n+1)}}_{(2)}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia de (1). Esta es una serie alternante, de término positivo $(1/\sqrt{n})$, indiscutiblemente decreciente y con límite en infinito nulo. Luego, por Criterio de Leibniz necesariamente **converge**.

Para estudiar la convergencia de (2) partamos por notar que que $(-1)^{2n} = 1$ pues $2n$ es siempre un número par. Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} \sqrt{n+3}}{\sqrt{n}\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}\,(n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}\,(n+1)} = 1 > 0$$

Luego, como la serie armónica diverge, (2) también diverge. Observe que obtuvimos la suma de una serie convergente con la suma de una serie divergente. La pregunta es entonces, la serie total, ¿converge o diverge? Estamos tentados a pensar que diverge. Confirmemos esto por contradicción.

Supongamos que la serie en cuestión convergiera. Luego, la resta de series convergentes es también convergente. Por lo tanto, podemos restar a ambos lados de la primera ecuación una serie convergente, en particular la serie (1). Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 + (-1)^n \frac{\sqrt{n+3}}{n+1}\right] - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{(1)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} \sqrt{n+3}}{\sqrt{n}\,(n+1)}}_{(2)}$$

La expresión del lado derecho sería claramente convergente pues es una resta de series convergentes. Sin embargo, el lado del término derecho sabemos que es divergente. Esto es una evidente contradicción, razón por la cual concluimos que la serie estudiada **diverge**.

Problema 2.23: Demuestre que:

$$\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

[6] Pues la suma de términos puede hacer que el término completo se reduzca y de esta forma tienda a cero con la velocidad suficiente como para converger.

Solución:

La serie sugiere inmediatamente que consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

para realizar los análisis. En particular, este tipo de desigualdades pueden deducirse directamente del Criterio de la Integral.

Por axiomática real la función es siempre positiva ($x^2+1>0$) y continua al tratarse de una composición de funciones continuas. Adicionalmente, para $x \geq 1$ se tiene que:

$$x^2 \text{ es creciente} \to x^2+1 \text{ es creciente} \to \frac{1}{1+x^2} \text{ es decreciente}$$

Luego, analizar la convergencia de la serie es equivalente a estudiar la convergencia de la integral

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x)\bigg|_1^\infty = \frac{\pi}{4}$$

la cual es evidentemente convergente y por lo tanto la serie en cuestión converge. Esto último era un desarrollo mínimo para poder utilizar las ideas que utilizaremos a continuación.

Ahora bien, para demostrar la desigualdad previamente generada no tenemos más que hacer que repetir el desarrollo teórico visto previamente, i.e. generar la desigualdad:

$$\int_n^\infty f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{i=n}^\infty a_i \leq \int_n^\infty f(x)\,\mathrm{d}x + a_n$$

En este caso, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $n=1$, de modo que $a_n = \dfrac{1}{2}$ y por lo tanto llegamos a lo pedido:

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1+n^2} \leq \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$, demostramos así lo pedido. ■

Problema 2.24: Demuestre que la serie siguiente es convergente y determine el número de términos a sumar para que el error sea menor a 10^{-3}.

$$S = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Solución:

Evidentemente dada la presencia de $(-1)^{n+1}$ nos enfrentamos a una serie alternante. Sea

$$b_n = \frac{1}{2n-1}$$

Es evidente que para $n > 2 \to 2n-1 > 3 > 0$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

Aplicamos entonces el Criterio de Leibniz y deducimos que la serie converge. ■ Ya observamos que:

$$|S - S_n| < |S_{n+1} - S_n| = b_{n+1}$$

Luego, para cometer un error menor a 10^{-3} con toda seguridad, basta hacer

$$b_{n+1} < 10^{-3}$$

De esta forma tendremos garantizado que si tomamos S_n para ese valor de n obtenido, obtendremos el valor de S con una precisión segura de 3 decimales. Por lo tanto, no hay que hacer más que despejar desde ahí la inecuación para un n natural. Tenemos que:

$$b_{n+1} = \frac{1}{2n+1} < 10^{-3} \to 2n+1 > 10^3 = 1000$$

Despejando,

$$2n > 999 \to n > \frac{999}{2} = 499,5 \to \boxed{n = 500}$$

Es decir, tomando los primeros **500 términos** de la serie tendremos con toda seguridad un error menor a 10^{-3}.

Problema 2.25:

(a) Indique para qué valores de $p > 0$ la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^p(k)}$$

converge.

(b) ¿Para qué valores de p converge la serie $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln^p[\ln(n)]}$?

(c) Indique para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^p}$$

es convergente, absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

Solución:

(a) A diferencia de un problema anterior, donde p se ubicaba en n, aquí podemos recurrir inmediatamente al Criterio de la Integral para analizar la convergencia. ¿Por qué? Primero demostremos que en efecto se puede utilizar dicho criterio.

- Para $x \geq 2$ x y $\ln^p(x)$ $(p > 0)$ son funciones positivas no nulas. Luego,
$$\frac{1}{x\ln^p(x)} > 0$$
- Se trata de un producto de funciones conocidamente continuas y no nulas. Luego,
$$\frac{1}{x\ln^p(x)} \text{ es continua para todo } x \geq 2$$
- Finalmente, el producto de funciones crecientes es creciente, i.e. $x\ln^p(x)$ es creciente y por lo tanto
$$\frac{1}{x\ln^p(x)} \text{ es decreciente para todo } x \geq 2$$

Luego, tenemos que:
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln^p(k)} \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p(x)} \text{ converge}$$
Analizamos entonces la convergencia de la integral en cuestión. Observe que en esta integral se puede hacer inmediatamente la sustitución
$$u = \ln(x) \to \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
Con lo cual,
$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p(x)} = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^p}$$
la cual converge por criterio de la $p-$integral para $p > 1$. Es decir, la serie estudiada converge si y solo si $\boxed{p > 1}$.

(b) Los argumentos utilizados en este caso son exactamente los mismos que aquellos utilizados en la parte anterior, por lo cual no es necesario repetirlos.

Antes de ello, observemos que para $p \leq 0$ la serie diverge. En primer lugar, si $p = 0$, entonces se tiene la serie
$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \sim \int_{10}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$$
y esta integral claramente diverge, tal como se vio en la parte anterior. Si $p < 0$, entonces
$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln^p[\ln(n)]} = \underbrace{\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\ln^q[\ln(n)]}{n\ln(n)}}_{\text{con } q=-p} \geq \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$$

Como la integral de la derecha diverge, y en particular $\ln(10) > 3 \to \ln(\ln(10)) > 1$ (lo cual valida la comparación para $q > 0$ cualquiera) entonces para $p < 0$ la integral **diverge**.

Nos quedamos entonces solo con el caso $p > 0$. Tenemos que:

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln^p[\ln(n)]} \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_{10}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln(x) \ln^p[\ln(x)]} \text{ converge}$$

Observe que para tratar la integral podemos hacer una sustitución, pero no tan evidente. La derivada de $\ln[\ln(x)]$ es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln[\ln(x)] = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

Entonces aparece una función y su derivada. Hagamos $u = \ln[\ln(x)] \to \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x \ln(x)}$, con lo cual:

$$\int_{10}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln(x) \ln^p[\ln(x)]} = \int_{\ln[\ln(10)]}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^p}$$

la cual claramente converge para $p > 1$. Luego, la serie estudiada converge para $\boxed{p > 1}$.

(c) El parámetro produce una variación de comportamiento significativa al cambiar de signo. En efecto, podemos separar en los casos p negativo, $p = 0$ y p positivo. Sin embargo, note el lector que si $p \leq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^p} \neq 0$$

pues n^p se comportaría como función polinomial. Por lo tanto, en dicho caso la función claramente diverge y es por esta razón que solo analizaremos la serie para $p > 0$.

Partamos viendo para qué valores es absolutamente convergente. Tomando el módulo tenemos que analizar la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$$

Luego, esta serie es pertinente separarla por casos a partir de $p = 1$. En el caso $p = 1$ tenemos la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

y por lo tanto diverge. Ahora bien, para $p < 1$ se tiene que $n^p < n$ pues $n > 1$. Luego,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p}$$

y como la serie de la izquierda claramente diverge, entonces la serie no converge absolutamente para $p \leq 1$. Por otra parte, para $p > 1$ consideramos la función

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^p}$$

la cual es:

- Positiva pues $x \geq 2$ y se trataría de un cuociente de funciones positivas. x^p nunca se anula.

- Continua pues es una división de funciones claramente continuas tal que el denominador nunca se anula.

- Decreciente pues:
$$f'(x) = \frac{x^{p-1} - p\ln(x)\, x^{p-1}}{x^{2p}} = \frac{[1 - p\ln(x)]\, x^{p-1}}{x^{2p}}$$
Ambas funciones potencia son positivas y $1 - p\ln(x) < 0$ para $x \geq e$ (lo cual es suficiente para aplicar el criterio). Luego $f'(x) < 0$ y por lo tanto la función decreciente.

Luego, evaluamos según el Criterio de la Integral la integral impropia:

$$\int_2^\infty \frac{\ln(x)}{x^p} \mathrm{d}x = \int_2^\infty \frac{\ln(x)}{x} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p-1}}$$

para $p > 1$. Hacemos $u = \ln(x) \to \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ y con ello,

$$\int_2^\infty \frac{\ln(x)}{x^p} \mathrm{d}x = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{u\mathrm{d}u}{e^{(p-1)u}}$$

la cual es conocidamente convergente (e incluso, integrando por partes, fácilmente calculable) pues es comparable a la integral de $e^{(p-1)u/2}$, que es convergente. Por lo tanto, para $p > 1$ la integral converge absolutamente.

Ahora analicemos la convergencia condicional de la serie. Observe que al estudiar la serie

$$\sum_{n=2}^\infty (-1)^n \frac{\ln n}{n^p} \quad \text{con } p > 0 \text{ necesariamente}$$

tenemos una serie alternante. Sea $b_n = \dfrac{\ln(n)}{n^p}$. Entonces,

- Para $n \geq 2$ la serie es siempre positiva por ser un cuociente de funciones positivas en dicho intervalo.

- Tenemos que si $p > 0$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{pn^p} = 0$$
haciendo uso de la Regla de L'Hôpital (expresión de la forma ∞/∞).

Por lo tanto, según el Criterio de Leibniz la serie converge condicionalmente para $p > 0$. En resumen,

- Si $p \leq 0$ la serie **diverge**.

- Si $p \in (0, 1]$ la serie **converge condicionalmente**.

- Si $p > 1$ la serie **converge absolutamente**.

Se sigue entonces que converge para $\boxed{p > 0}$.

Problema 2.26: ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ la siguiente serie converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left[\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right] x^n$$

Solución:

Notemos en primer lugar que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left[\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right] &= \operatorname{sen}\left(\pi n+\frac{\pi}{n}\right) = \cancel{\operatorname{sen}(\pi n)} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos(\pi n) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
&= (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left[\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)\right] x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) x^n$$

Tomando el criterio del cuociente:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)} \frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{n}{n} \\
&= |x|
\end{aligned}$$

Luego, si $|x| < 1$ la serie siempre convergerá. Si $|x| > 1$ la serie diverge. Sin embargo, si $|x| = 1$ el test no es concluyente, razón por la cual se requiere de otro tipo de análisis. Por lo tanto, requerimos analizar con calma el caso $x = -1$ y el caso $x = 1$.

Caso 1: Para $x = 1$ se tiene la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Esta serie es comparable a la serie armónica alternante y a su vez es una serie alternante. Analicemos la convergencia a partir de lo segundo[7]:

- Para $n \geq 1$ se tiene que $0 < \dfrac{\pi}{n} \leq \pi$ y por lo tanto $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \geq 0$ pues $\operatorname{sen}(x)$ es positivo en el intervalo $(0, \pi)$.
- Se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\right) \leftarrow \text{continuidad} \\
&= 0
\end{aligned}$$

[7] Compararlo con la serie armónica también es un argumento válido.

Luego, se cumple el Criterio de Leibniz y la serie converge.

Caso 2: Para $x = -1$ se tiene la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Tal como hemos visto en un ejercicios anterior,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$$

pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 1 > 0$$

Luego, para $x = -1$ la serie **diverge** pues la serie armónica diverge.

Concluimos que la serie converge para $\boxed{x \in (-1, 1]}$.

Problema 2.27: Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, creciente con $g(0) = 0$. Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{k}\right) \text{ converge} \longleftrightarrow \int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} \mathrm{d}x \text{ converge.}$$

Solución:

Dado que tenemos que establecer una relación serie−integral, utilizamos el Criterio de la Integral. Notamos que:

- $\displaystyle\lim_{k\to\infty} g\left(\frac{1}{k}\right) = g\left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\right)$ por continuidad. Luego,

  $$\lim_{k\to\infty} g\left(\frac{1}{k}\right) = g(0) = 0$$

  por enunciado.

- g es continua por enunciado, y por lo tanto lo es $g\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

- Si bien por composición de funciones es fácil notar que $g(1/k)$ es decreciente, podemos hacerlo tomando su derivada (si es que es diferenciable):

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g\left(\frac{1}{x}\right) = -\underbrace{g'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}}_{>0} < 0$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{k}\right) \text{ converge} \longleftrightarrow \int_{1}^{\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \text{ converge}$$

Podemos llegar a la integral que se desea haciendo

$$u = \frac{1}{x} \to \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \to \mathrm{d}x = -x^2 \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

En este caso los extremos de integración cambian de 1 a 0. En otras palabras,

$$\int_{1}^{\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = -\int_{1}^{0} \frac{g(u)}{u^2} \mathrm{d}u = \int_{0}^{1} \frac{g(x)}{x^2} \mathrm{d}x \text{ (la variable de integración es muda)}$$

Es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{k}\right) \text{ converge} \longleftrightarrow \int_{0}^{1} \frac{g(x)}{x^2} \mathrm{d}x \text{ converge,}$$

demostrando así lo pedido. ■

Problema 2.28: Sea $\sum a_n$ una serie infinita cualquiera. Se define la serie $\sum a_n^+$ como la suma de todos los términos positivos de $\sum a_n$ y $\sum a_n^-$ como la suma de todos los términos negativos de la misma serie.

(a) Escriba a_n^+ y a_n^- en términos de a_n. *Ayuda:* Recuerde la definición de $|a_n|$.

(b) Demuestre que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ convergen.

(c) Demuestre que si $\sum a_n$ converge condicionalmente, entonces ambas $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ divergen.

(d) [**Propuesto**] A partir de lo anterior demuestre que si $\sum a_n$ converge condicionalmente entonces existe un reordenamiento de $\sum a_n$ tal que su suma es r. ¿Por qué esto no se cumple si $\sum a_n$ converge absolutamente?

Solución:

(a) Tenemos que dado que se trata de una suma, podemos aprovecharnos y asignarle cero a los términos que no sean positivos de a_n en a_n^+. Es decir:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Observe que esta definición es muy similar a lo que sugiere la ayuda,

$$|a_n| = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

¿Cómo generamos el cero entonces? Sumando a_n y dividiendo por dos. En efecto,

$$\boxed{a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}}$$

Basta reemplazar con un número negativo dicha fórmula para ver que resulta. De forma análoga obtenemos que

$$\boxed{a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}}$$

Si reemplazamos con un número negativo, por ejemplo -3, obtenemos el número esperable. Al reemplazar con un número positivo los términos se cancelan y se hacen cero.

Utilizaremos estas expresiones en las próximas sub partes del problema.

(b) Por Criterio de la Necesidad, tenemos que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \to \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Luego tanto a_n^+ y a_n^- tienden a cero en infinito. Por su parte,

$$\sum a_n^+ = \frac{1}{2}\left(\sum a_n + \sum |a_n|\right)$$

Como ambas series son convergentes pues $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^+$ converge (y de hecho absolutamente). Análogamente,

$$\sum a_n^- = \frac{1}{2}\left(\sum a_n - \sum |a_n|\right)$$

razón por la cual también converge absolutamente, demostrando así lo pedido. ■

(c) Nuevamente escribamos:

$$\sum a_n^+ = \frac{1}{2}\left(\sum a_n + \sum |a_n|\right)$$

Como la serie converge condicionalmente, entonces por definición $\sum |a_n|$ diverge y $\sum a_n$ converge. Realicemos la demostración por contradicción: supongamos que $\sum a_n^+$ converge, entonces la resta (tal como la suma) de series convergentes converge y por lo tanto podemos restar a ambos lados $\frac{1}{2}\sum a_n$, una serie convergente. Es decir,

$$\sum a_n^+ - \frac{1}{2}\sum a_n = \sum |a_n|$$

Pero $\sum |a_n|$ diverge por hipótesis. Luego, se generó una contradicción y por lo tanto $\sum a_n^+$ **diverge**. Se demuestra con exactamente el mismo procedimiento para $\sum a_n^-$. Con esto demostramos lo pedido. ■

Problema 2.29: [**Propuesto**] Considere la integral impropia

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{donde } f(x) = \frac{e^x}{x^x}$$

Utilice el criterio de la integral para demostrar que esta integral impropia converge.
Ayuda: $f'(x) = -f(x)\ln(x)$.

2.4. Series de potencias y aplicaciones

Realizaremos una generalización del estudio de series numéricas y estudiaremos las **series de potencias**, las cuales son funciones $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que se definen como la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

En este caso, se dice que la serie es una serie de potencias para $f(x)$ centrada en $x = x_0$. La idea detrás de descomponer las series de esta forma consiste en que muchas funciones analíticas conocidas, tales como las trigonométricas y logarítmicas, tienen expansión en series de potencia. Esto nos permite representar exactamente la misma función como una combinación lineal de la base de potencias de $x - x_0$: $\left\{1, x - x_0, (x - x_0)^2, \ldots, (x - x_0)^n\right\}$.

Las ventajas de representar funciones de esta forma son innumerables en la práctica, puesto que permiten darle otro enfoque u otra mirada a un mismo problema de tal forma que resulta mucho más sencillo resolverlo desde esta nueva óptica.

Más aún, una representación en series de potencias no es la única forma de representar una función. A modo de ejemplo, para las funciones periódicas existe una representación en **series trigonométricas** (series de Fourier), mediante la cual

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_f x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_f x)$$

Esta representación presenta diversas ventajas para el estudio de los innumerables fenómenos periódicos que ocurren tanto en física como en ingeniería.

Una de las primeras motivaciones para el estudio de las series de potencias consiste en determinar $I = \operatorname{Dom}(f)$, que en este caso no viene a ser otra cosa que el conjunto de x para los cuales la serie en cuestión converge. Dado que aparecen reiterativamente potencias de n, resulta razonable estudiar estas series mediante el Criterio del Cuociente o el Criterio de la Raíz. De esta forma, la serie converge si

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} \stackrel{!}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} < 1$$

O bien,

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r$$

r se define como el **radio de convergencia** de la serie de potencias y es por definición el promedio entre los valores extremos del intervalo. Observe que en el caso $|x - x_0| = r$, i.e. la distancia de x a x_0 es igual al radio de convergencia, el test no es concluyente, razón por la cual para analizar la serie converge o diverge en estos casos se requiere el análisis mediante otro tipo de criterios, ya sea comparación, criterios de convergencia absoluta, etc.

Luego, se define el **intervalo de convergencia** (I) como todos aquellos puntos para los cuales la serie converge, incluyendo eventualmente a aquellos puntos para los cuales $|x - x_0| = r$. Mediante el Criterio de la Razón se puede determinar análogamente que

$$r = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \stackrel{!}{=} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Cuál de los dos criterios usar depende del contexto del problema, donde es sabido que el Criterio de la Razón tiene evidente ventaja en expresiones de naturaleza factorial. Observe que:

- Si $r = 0$ (el límite de la raíz da infinito), entonces la serie solo converge para $|x - x_0| = 0$, por lo que ese viene a ser su intervalo de convergencia.
- Si $r = \infty$ (el límite de la raíz da cero), entonces el Criterio del Cuociente o de la Raíz siempre entregará el límite $0 < 1$ independiente del valor de $|x - x_0|$, razón por la cual podemos decir que la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Utilizando todas estas ideas, procederemos a determinar intervalos de convergencia en los problemas siguientes.

Problema 2.30: Determine el **intervalo** de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n10^{n-1}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^{(k+1)n}$, $k \in \mathbb{N}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\sqrt{n+1}} x^n$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) x^n$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(2x-1)^n$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n$, para cada valor de a.

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-3)^k}{k \cdot 9^k}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} x^n$.

(i) $\displaystyle x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{(x-3)^{2k+1}}{2k+1}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{n^2 + 5^n} (1+2x)^n$.

Solución:

(a) Dado que aparecen funciones exponenciales, es prudente utilizar el Criterio de la Raíz. Así se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n10^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|\sqrt[n]{10}}{\sqrt[n]{n}\,10} \\ &= \frac{|x|}{10}\end{aligned}$$

Luego, debemos imponer que

$$\frac{|x|}{10} < 1 \to |x| < 10.$$

Es decir, el **radio de convergencia** es 10. Para determinar el intervalo de convergencia debemos evaluar los puntos en los extremos, pues en estos casos el criterio es inconcluyente.

- Para $x = 10$ tenemos la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n}$$
la cual es la serie armónica ponderada por 10. Luego, **diverge**.

- Para $x = -10$ tenemos la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{10}{n}$$
la cual se comporta como la serie armónica alternante, razón por la cual **converge**.

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$\boxed{I = [-10, 10)}$$

(b) Dada la presencia de factoriales, en este caso es sugerente utilizar el Criterio de la Razón. Hay que tener mucho cuidado en los cálculos, pues la variable involucrada es n, en cambio k es un parámetro fijo que podemos considerar constante. Tomamos entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!^k}{(kn+k)!} \cdot \frac{(kn)!}{(n!)^k} \left|x\right|^{(k+1)n+(k+1)-(k+1)n} \\
&= |x|^{k+1} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots kn}\cdot(kn+1)\cdots(kn+k)} \cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots kn} \\
&= |x|^{k+1} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(kn+1)\cdots(kn+k)}
\end{aligned}$$

El límite que falta por evaluar consiste en el cuociente de polinomios de grado k ambos. Tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(kn+1)\cdots(kn+k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{kn+1} \cdot \frac{n+1}{kn+2} \cdots \frac{n+1}{kn+k}$$

Como cada uno de los límites por separado converge a $1/k$, entonces concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|^{k+1} \frac{1}{k^k}$$

Imponiendo la condición del criterio, y considerando que trabajamos con k positivo, entonces

$$|x| < k^{k/(k+1)}$$

i.e. el radio de convergencia es $k^{k/(k+1)}$. Ahora evaluamos en los extremos para determinar el intervalo de convergencia:

- Para $x = k^{k/(k+1)}$ tenemos la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} k^{kn}$$

Nos preguntamos entonces, ¿converge o diverge esta serie? No es evidente, pero se trata de una serie de términos positivos y **monótona creciente**. Esto incluso podemos demostrarlo. Si queremos demostrar para todo n se cumple que

$$\frac{(n+1)!^k}{(kn+k)!}k^{k(n+1)} > \frac{(n!)^k}{(kn)!}k^{kn}$$

Entonces basta simplificar términos y llegar a una expresión sencilla, equivalente y fácil de verificar:

$$\leftrightarrow \frac{(n+1)^k\, k^k}{(kn+1)\cdots(kn+k)} > 1$$

Pero observe que

$$\frac{(n+1)^k\, k^k}{(kn+1)\cdots(kn+k)} = \frac{(kn+k)^k}{(kn+1)\cdots(kn+k)} = \frac{(kn+k)\,(kn+k)\cdots(kn+k)}{(kn+1)\,(kn+2)\cdots(kn+k)}$$

Se trata de un producto de términos positivos, todos mayores o iguales que uno. Luego, el producto en su totalidad es mayor que 1, por lo cual se sigue que la sucesión es positiva y monótona creciente. Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

y por lo tanto no se satisface el Criterio de la Necesidad. Es decir, la serie **diverge**.

- Si $x = -k^{k/(k+1)}$, en este caso tenemos la misma serie en su versión alternante. Sigue sin satisfacerse el Criterio de la Necesidad por el mismo argumento visto en el punto anterior. Luego, la serie también diverge en este caso.

Finalmente, el intervalo de convergencia de la serie en cuestión es:

$$\boxed{I = \left(-k^{k/(k+1)}, k^{k/(k+1)}\right)}$$

(c) Dada la aparición de funciones potencia, aplicamos el Criterio de la Raíz. Tomamos el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{\sqrt{n+1}}\,|x|^n} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)^{1/2n}} \\
&= 3\,|x|
\end{aligned}$$

Imponemos que

$$3\,|x| < 1 \rightarrow |x| < \frac{1}{3}$$

Luego, el radio de convergencia es $1/3$. Para el intervalo de convergencia evaluamos en los extremos.

- Si $x = 1/3$ tenemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

La cual es alternante, decreciente, positiva y con límite cero. Luego, por Criterio de Leibniz la serie **converge**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\sqrt{n+1}} x^n$$

- Si $x = -1/3$ tenemos ahora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  por lo cual **diverge**.

Finalmente,

$$\boxed{I = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]}$$

(d) En este caso tomar la raíz no nos generaría un límite fácil de evaluar. Más aún, tomando el Criterio de la Razón generamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[1 + \dfrac{1}{(n+1)^2}\right]}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[1 + (n+1)^2\right] - 2\ln(n+1)}{\ln(1+n^2) - 2\ln(n)}$$

El límite de la derecha en efecto puede ser calculado utilizando la Regla de L'Hôpital y obtendríamos 1 como resultado, obteniendo el valor correcto para este caso. Sin embargo, esto resulta tedioso y complicado. Por esta razón, es prudente realizar la siguiente observación asintótica vista en ejercicios anteriores:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) x^n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) x^n}{\dfrac{x^n}{n^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Luego, la serie en cuestión hereda la convergencia de la segunda serie, la cual es muchísimo más sencillo estudiarla. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = |x|$$

Imponemos que $|x| < 1$. Luego, el radio de convergencia de la serie es 1. Ahora evaluamos la serie en los extremos:

- Para $x = 1$ tenemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

  la cual converge por el criterio de la $p-$serie.

- Para $x = -1$ tenemos la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$
la cual es alternante y de hecho no solo converge, si no que tal como vimos anteriormente lo hace absolutamente.

Finalmente,
$$\boxed{I = [-1, 1]}$$
y hubiésemos obtenido exactamente el mismo desarrollo calculando el límite del cuociente con los términos logarítmicos.

(e) Dada la presencia de factoriales, estudiamos la serie de potencias utilizando el Criterio de la Razón:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= |2x - 1| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \\
&= |2x - 1| \cdot \infty \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Es decir, el límite diverge indistintamente para todo x tal que $2x - 1 \neq 0$. Luego, el radio de convergencia es cero y el "intervalo de convergencia" es:

$$\boxed{I = \left\{ \frac{1}{2} \right\}}$$

(f) Dado que aparece una función potencia, es pertinente en este caso utilizar el Criterio de la Raíz. De esta forma, evaluamos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} |a|^{n^2/n} |x| \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} |a|^n
\end{aligned}$$

Sin embargo, el comportamiento del límite de la derecha depende del valor que a tome. De esta forma,

- Si $|a| = 1$, el límite vale $|x|$, razón por la cual imponemos que $|x| < 1$ y por lo tanto el radio de convergencia es 1. Para los extremos evaluamos. Sin embargo, observamos que en ambos casos generaríamos la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \quad \text{o bien} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$
las cuales ambas divergen.

- Si $|a| < 1$, entonces el límite vale cero (< 1) indistintamente del valor de x. Luego, el radio de convergencia sería infinito y el intervalo de convergencia toda la recta real.

- Si $|a| > 1$ el límite diverge para todo $x \neq 0$. Luego, el radio de convergencia es cero y por lo tanto el intervalo de convergencia en este caso es solo el punto $x = 0$.

De esta forma, concluimos que:

$$\boxed{I = \begin{cases} (-1,1) & \text{si } |a| = 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } |a| < 1 \\ \{0\} & \text{si } |a| > 1 \end{cases}}$$

(g) En este caso, dado que aparece k en el denominador, comparamos tomando el cuociente:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}(x-3)^{k+1}}{(k+1)\,9^{k+1}} \frac{k \cdot 9^k}{(-1)^k (x-3)^k} \right| \\ &= \frac{|x-3|}{9} \end{aligned}$$

Requerimos entonces que $\dfrac{|x-3|}{9} < 1$. Es decir, el radio de convergencia es 9. Tomando los casos límite,

- Si $x - 3 = 9 \to x = 12$, nos queda la serie

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

  La cual es la serie armónica alternante, convergente como ya es sabido.

- Si $3 - x = 9 \to x = -6$ nos queda la serie

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

  la cual es divergente, como ya es sabido.

Finalmente, el intervalo de convergencia es:

$$\boxed{I = (-6, 12]}$$

(h) Dada la presencia de factoriales, aplicamos el Criterio de la Razón:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}$$

Mucho cuidado al realizar la simplificación. El denominador consiste en el producto de impares consecutivos, por lo cual al simplificarse con el numerador solo nos genera $2n+1$ y no $2n \cdot (2n+1)$. De esta forma,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{|x|}{2}$$

Luego, imponemos que

$$\frac{|x|}{2} < 1 \to |x| < 2$$

y por lo tanto el radio de convergencia es 2. Evaluamos ahora los extremos:

- Si $x = 2$ tenemos la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$
Observe que esta es una serie creciente, pues
$$\frac{(n+1)!2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} > \frac{n!\,2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \leftrightarrow \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$
lo cual es evidentemente cierto para todo n natural. Luego, como se trata de una serie de términos positivos y creciente, entonces la serie **diverge** pues no cumple con el Criterio de la Necesidad.

- Si $x = -2$ tenemos la misma versión de la serie anterior ahora de forma alternante. En este caso, por el mismo argumento anterior, la serie **diverge**.

Finalmente,
$$\boxed{I = (-2, 2)}$$

(i) Nuevamente comparamos al cuociente dada la naturaleza de la expresión:
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= |x-3|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k+2)\,(2k+3)}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k\cdot(2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)} \\
&= |x-3|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{2k\,(2k+1)}{(2k+1)\,(2k+2)}\,\frac{2k+1}{2k+3} \\
&= |x-3|^2
\end{aligned}$$
Entonces, requerimos que:
$$|x-3|^2 < 1 \to |x-3| < 1$$
El radio de convergencia es 1. Evaluamos los casos extremos.

- Si $x - 3 = 1 \to x = 4$ tenemos la serie
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$
Observe que por ensayo y error se puede establecer que:
$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} = \frac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2} \leq 1$$
para todo k natural. Por lo tanto,
$$0 \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \cdot \frac{1}{2k+1} = \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$$
El argumento del porqué de esta igualdad se revisará cuando expresemos la función $\operatorname{arcsen}(x)$ como serie de potencias. Luego, esta serie converge.

- Si $3-x=1 \to x=2$, entonces tendremos la serie

$$-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\cdot\frac{1}{2k+1} = -\frac{\pi}{2}$$

Finalmente, el intervalo de convergencia es $\boxed{I=[2,4]}$.

(j) En este caso lo más pertinente es utilizar el Criterio del Cuociente dado que el uso del Criterio de la Raíz no es concluyente. Sin embargo, se obtendrá una expresión inherentemente difícil de calcular. Sin embargo, para $n\to\infty$ observamos que los términos $(-1)^n$ y n^2 son despreciables al lado de las expresiones exponenciales. De esta forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2^n}{n^2+5^n}(1+2x)^n \sim \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n(1+2x)^n$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{n^2+5^n}\left(\frac{2}{5}\right)^{-n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{n^2+5^n}\frac{(1/2)^n}{(1/5)^n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(-1)^n}{2^n}+1}{\dfrac{n^2}{5^n}+1}\\
&= 1>0
\end{aligned}$$

Luego la segunda serie, **muchísimo** más sencilla de estudiar que la primera, tendrá exactamente el mismo comportamiento en cuanto a convergencia que la serie a estudiar. Por lo tanto, estudiamos la segunda. En este caso, tomamos el Criterio de la Raíz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|} &= |1+2x|\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5}\\
&= \frac{2}{5}|1+2x|
\end{aligned}$$

Ahora imponemos la condición

$$\frac{2}{5}|1+2x|<1 \to |1+2x|<\frac{5}{2}\to -\frac{5}{2}<1+2x<\frac{5}{2}$$

Es decir,

$$-\frac{7}{4}<x<\frac{3}{4}$$

con lo cual el radio de convergencia es (el promedio de la distancia entre extremos)

$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}--\frac{7}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

Para obtener el intervalo de convergencia evaluamos la serie en los extremos. Recuerde que en ambos casos $|1+2x|=\frac{5}{2}$.

- Si $x = \dfrac{3}{4}$ tenemos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1$, la cual evidentemente diverge por Criterio de la Necesidad.
- Si $x = -\dfrac{7}{4}$ tenemos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, la cual diverge bajo el mismo argumento.

Finalmente,

$$\boxed{I = \left(-\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)}$$

Una buena idea también es lograr la capacidad de abstraer estos resultados para aplicarlos en problemas más generales en los cuales no conozcamos una expresión explícita para la serie. Esto lograr medir efectivamente la capacidad de aplicar correctamente los resultados obtenidos. Revisemos entonces el siguiente problema:

Problema 2.31: Si se sabe que $\lim_{n\to\infty} a_n \left(n^3 - n + 1\right) = 1$, determine el radio e intervalo de convergencia de la serie $\sum n a_n x^n$.

Solución:

La serie a estudiar, sin preocuparse de los extremos (pues la convergencia se evalúa en infinito), es

$$\sum \underbrace{n a_n}_{b_n} x^n$$

Luego, podemos utilizar, por ejemplo, el Criterio de la Raíz para determinar el radio de convergencia:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n a_n \, |x|^n} \\ &= |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n a_n} \end{aligned}$$

A priori no sabemos nada de por sí respecto al límite en cuestión. Sin embargo, sí sabemos información sobre el límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n \left(n^3 - n + 1\right) = 1$$

Hagamos "aparecer" entonces dicha información:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^3 - n + 1}} \cdot \sqrt[n]{a_n \left(n^3 - n + 1\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^3 - n + 1}} \cdot \sqrt[n]{a_n \left(n^3 - n + 1\right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = |x|$$

Imponemos que $|x| < 1$ y por lo tanto la serie de potencias tiene radio de convergencia 1. Ahora evaluamos en los extremos, $x = 1$ y $x = -1$:

- Para $x = 1$ se tiene la serie
$$\sum n a_n$$
O bien, podemos aplicar la información que ya conocemos:
$$\sum \frac{n}{n^3 - n + 1} a_n \left(n^3 - n + 1\right) \sim \sum \frac{1}{n^2}$$
Esto último lo deducimos puesto que para $n \to \infty$ se tiene que $a_n \left(n^3 - n + 1\right) \approx 1$ y por lo tanto el comportamiento asintótico se deduce solamente del cuociente de la izquierda. En efecto, aplicando el Criterio de Comparación:
$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{n}{n^3 - n + 1} = 1 > 0$$
y por lo tanto las series se comparables. Como la $p-$serie con la cual se compara converge, entonces la serie en cuestión también.

- Para $x = -1$ tenemos la versión alternante de la serie anterior, para la cual acabamos de observar que converge absolutamente. Luego, la serie también converge para $x = -1$.

Finalmente,
$$\boxed{I = [-1, 1]}$$

El siguiente ejercicios que realizaremos será efectivamente lograr observar expresiones analíticas mediante el prisma de las series de potencias. Por lo tanto, nuestro objetivo ahora es, dada una función analítica conocida, encontrar su representación en series de potencias y el posible intervalo en el cual la serie converge (y por lo tanto coincide con la función).

Para este nivel de problemas propuestos, se trabajará habitualmente con la **serie geométrica**:
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
la cual como ya sabemos converge para todo $|x| < 1$. En algunos casos puede utilizarse también la **serie binomial**: sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$
donde se extiende la definición del coeficiente binomial a todos lo reales de una forma análoga a la forma de evaluar los coeficientes binomiales para números naturales:
$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\cdots\left(\alpha-n+1\right)}{n!}$$
A partir de transformaciones algebraicas a estas series podremos obtener la representación en series de potencias de muchas funciones fraccionales. Por su parte, muchas funciones inversas (trigonométricas inversas, exponencial inversa) tienen como derivada una función fraccional que puede ser expresada en términos de la serie geométrica.

De aquí surge la necesidad de notar que si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{con } |x - x_0| < a$$

Entonces, se puede demostrar de acuerdo a los contenidos del curso que:

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^n$. El primer término de $f(x)$ era a_0, el cual se anula en la derivación.
- $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + c$. La constante se determina de diversas formas.

En ambos casos el **radio** de convergencia es el mismo, a. Sin embargo, **no** se puede garantizar que el intervalo de convergencia permanezca inalterado. En dicho caso es necesario reevaluar la serie en los extremos del radio de convergencia para determinar el intervalo de convergencia respectivo.

Haremos concreto el uso de estos resultados en los próximos problemas planteados a continuación.

Problema 2.32: Encuentre un desarrollo en serie de potencias para las siguientes siguiente funciones, en torno a los puntos dados. Señale su **intervalo** de convergencia.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$ en $x_0 = 0$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ en $x_0 = 1$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$ en $x_0 = 0$.

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x)^3}$ en $x_0 = 0$.

(e) $f(x) = \log(1+x^2)$ en $x_0 = 0$.

(f) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $x_0 = 0$.

(g) $f(x) = \arctan(x)$ en $x_0 = 0$.

(h) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$ en $x_0 = 0$.

Solución:

(a) Partamos de la única información de la cual disponemos:

$$\frac{1}{1-\square} = \sum_{n=0}^{\infty} \square^n$$

La serie que queremos obtener debemos dejarla en términos de esta expresión. En efecto

$$\frac{1}{1+9x^2} = \frac{1}{1-\underbrace{(-9x^2)}_{\square}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-9x^2\right)^n$$

Reordenando términos,

$$\rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, 9^n x^{2n}}$$

Se puede obtener incluso por inspección que el intervalo de convergencia es

$$\boxed{I = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$$

(b) En este caso lo que realmente deseamos es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x-1)^n$$

Sin embargo, bajo la misma lógica, de la expresión conocida, si reemplazamos por ejemplo con $\square = x - 1$, entonces obtenemos que

$$\frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$$

Utilizaremos esto en este desarrollo. En primer lugar,

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+(x-1)}$$

para que en efecto quede centrada en torno a $x = 1$. Sin embargo, el hecho de que haya un 3 ponderando complica nuestros cálculos, ya que no conocemos una expansión en series de potencias para esto. Sin embargo, podemos factorizar:

$$\frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{(x-1)}{3}}$$

Ahora $\square = \dfrac{x-1}{3}$, con lo cual:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}}$$

Nuevamente, por simple inspección observamos que la serie converge si y solo si

$$\boxed{I = (-2, 4)}$$

(c) Existen muchas formas de generar esta serie. Sin embargo, partiremos nuevamente desde lo que conocemos:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

¿Cómo podemos generar potencias de $1-x$? Una de las muchas formas posibles (si es que no la más habitual) es **derivando**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Por lo tanto, también derivamos la serie de potencias término a término. Se sigue que:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Derivando nuevamente obtenemos lo pedido:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, x^{n-2}$$

Reacomodando los subíndices obtenemos que:

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n}$$

Por teorema, el radio de convergencia sigue siendo 1. Es fácil evaluar por Criterio de la Necesidad que la serie en los extremos diverge. Así,

$$\boxed{I = (-1, 1)}$$

(d) Partimos nuevamente de la información conocida:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Para generar $\dfrac{1}{1+x}$ reemplazamos la serie anterior con $-x$, de modo que:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Generamos las potencias de $(1+x)$ derivando dos veces:

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}$$

$$\rightarrow \frac{2}{(1+x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1)\, x^{n-2}$$

Entonces,

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$$

¿Cómo agregamos el x^2 en el numerador? Multiplicándolo a ambos lados:

$$\boxed{\frac{x^2}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^{2n+2}}$$

El intervalo de convergencia puede ser nuevamente determinado por simple inspección con el Criterio del Cuociente y el Criterio de la Necesidad en los extremos:

$$\boxed{I = (-1, 1)}$$

(e) Existen muchos caminos para resolver esta serie de potencias. En primer lugar, no tenemos como asociar la expresión de la función con su serie geométrica. En cambio, sabemos algo muy certero respecto a la derivada de logaritmo:

$$f(x) = \log\left(1+x^2\right) \to f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \to \frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2x^{2n+1}$$

Integrando a ambos lados de la ecuación volvemos a la función original, i.e.

$$\begin{aligned} \log\left(1+x^2\right) &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2x^{2n+1}\right) \mathrm{d}x + c \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2\frac{x^{2n+2}}{2n+2} + c \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2} + c \end{aligned}$$

Sabemos que $f(0) = 0$. Esta información nos permite determinar el valor de la constante, pues la serie de potencias evaluada en cero anula a todos los términos (todas las potencias de x son mayores o iguales a 2). De esta forma,

$$0 = 0 + c \to c = 0$$

Finalmente,

$$\boxed{\log\left(1+x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2}}$$

Se podría haber llegado exactamente al mismo resultado a partir de $\log(1+u)$ y luego habiendo reemplazado con $u = x^2$. Nuevamente, se puede determinar con relativa facilidad que

$$\boxed{I = [-1, 1]}$$

(f) En este caso, utilizamos la ya conocida serie binomial, puesto que:

$$\sqrt{1-x^2} = \left(1-x^2\right)^{1/2}$$

Sabemos que:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{con} \binom{\alpha}{n} \triangleq \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Esta definición de coeficiente binomial para $\mathbb{R}$ permite en efecto extender el concepto para los números naturales a los números reales. En este caso, se tiene que $\alpha = 1/2$, por lo que trabajemos entonces un poco el coeficiente binomial para manipularlo mejor:

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2} \cdot \cdots -\frac{2n-1}{2} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!} \end{aligned}$$

Reordenando términos notamos que:

$$2^n n! = 2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$$

Por lo tanto, para $\boxed{n \geq 2}$

$$\binom{1/2}{n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

pues

$$\binom{1/2}{0} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

Se sigue que

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^n$$

Finalmente, evaluamos esta misma serie en $-x^2$:

$$\boxed{\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^{2n}}$$

El estudio de esta serie es sencillo haciendo uso del Criterio del Cuociente. La determinación del intervalo de convergencia se deja propuesto al lector.

(g) Nuevamente, es complicado relacionar esta expresión con la serie geométrica. Sin embargo, sabemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Integrando a ambos lados:

$$f(x) = \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + c$$

Como $f(0) = \arctan(0) = 0$, entonces evaluando en la serie de potencias:

$$0 = 0 + c \to c = 0$$

Con lo cual,

$$\boxed{\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}}$$

Nuevamente, resulta sencillo determinar que

$$\boxed{I = [-1, 1]}$$

(h) Nada sabemos de cómo relacionar $\operatorname{arcsen}(x)$ con una serie conocida. Sin embargo, sí sabemos que la derivada de $\operatorname{arcsen}(x)$ viene dada por

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$$

Expandimos nuevamente la serie binomial, ahora para $\alpha = -1/2$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\binom{-1/2}{n} &= \frac{1}{n!} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) \\
&= \frac{1}{n!} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2} \cdot -\frac{7}{2} \cdots \frac{1-2n}{2} \\
&= \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n}{2^n} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)
\end{aligned}$$

salvo para:

$$\binom{-1/2}{0} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}$$

Entonces,

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \left[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\right] x^n$$

Evaluando en $-x^2$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} x^{2n}$$

Integrando:

$$f(x) = x + \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c$$

Como $f(0) = 0$ y en la serie de potencias se anulan todos los términos, entonces $0 = 0 + c \to c = 0$. Finamente,

$$\boxed{\operatorname{arcsen}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

El intervalo de convergencia de la serie de potencias se deja propuesto como ejercicio al lector.

Problema 2.33: Considere la serie de potencias

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n}$$

(a) Demuestre que si una serie de potencias $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia r, entonces $\sum a_n x^{2n}$ tiene radio de convergencia $\sqrt{r}$.

(b) Use este resultado para calcular el radio de convergencia de S y su intervalo de convergencia.

(c) Determine la función f asociada a la serie.

Solución:

(a) Si la serie de potencias tiene radio de convergencia r, entonces

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)|x|<1\to|x|<r$$

Para la segunda serie de potencias la condición de convergencia será

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)|x|^2<1\to|x|^2<1\bigg/\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

Pero $1\bigg/\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=r$, por lo que $|x|^2<r$. Como $r\geq 0$, entonces podemos tomar raíz a ambos lados sin miedo, con lo cual en este caso

$$|x|<\sqrt{r}$$

y por lo tanto el radio de convergencia es $\sqrt{r}$, que es lo que se quería demostrar. $\blacksquare$

(b) Para determinar el radio de convergencia de la serie, tomamos primero la serie

$$S^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{2n}$$

Calculamos el radio de convergencia usando el Criterio del Cuociente,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{2n+2}\frac{2n}{(-1)^{n+1}}\right||x|<1$$

Es decir,

$$|x|<1$$

Por lo tanto, para S^* el radio de convergencia es 1. Por lo tanto, usando el teorema anteriormente demostrado el radio de convergencia de S es 1.

Para determinar el intervalo de convergencia evaluamos el caso $|x|=1$. Es fácil notar que por estar elevando a $2n$ la potencia de x, entonces tanto si evaluamos en $x=1$ como en $x=-1$ la serie es la misma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

La cual es claramente alternante, monótona decreciente y tiende a cero en infinito. Luego, por Criterio de Leibniz tenemos que la serie converge para $|x|=1$. Finalmente,

$$\boxed{I=[-1,1]}$$

(c) Si derivamos la serie cancelaremos el $2n$ del denominador. Luego,

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}$$

Notando que en términos de signo $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$, entonces,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

La serie de la derecha es claramente asociable a una serie geométrica, i.e.

$$S'(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Para obtener $S(x)$ integramos:

$$S(x) = \int \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x + c = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} + c$$

Luego,

$$S(x) = \frac{1}{2} \log\left(1+x^2\right) + c$$

Sabemos que $S(0) = 0$ por simple inspección de la serie. Es decir, $c = 0$. Concluimos así que:

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{2} \log\left(1+x^2\right)} \quad \text{con } |x| \leq 1$$

Ahora veremos en la práctica con diversos tipos de ejercicios las ventajas de poder estudiar las funciones analíticas comunes y corrientes "desde otra perspectiva". Podemos resolver problema como evaluar integrales per se complicadas, obtener aproximaciones numéricas para números trascendentes como e ó π (algo muy útil en aplicaciones computacionales), calcular el valor de series obtenidas a partir de modelos matemáticos reales o incluso resolver ecuaciones diferenciales.

Problema 2.34: Utilizando la expansión obtenida para $\arctan(x)$ en el problema anterior, demuestre que

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, 3^n}$$

Solución:

La expansión en serie de potencias obtenida consistía en

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Observe que de por sí la expresión en series de potencias de la demostración es muy parecida a la expansión en series de potencias de $\arctan(x)$. En particular, aparece en el denominador una potencia de 3^n. ¿Cómo podríamos lograr esto en la serie de potencias que conocemos, si esta está elevada a x^{2n+1}? ¡Evaluando en $x = 1/\sqrt{3}$! En efecto,

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{\sqrt{3}^{2n}}$$

Luego, como $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, entonces

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n} \to \boxed{\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}}$$

demostrando así lo pedido. ■

Tal como veremos en el siguiente problema, pueden obtenerse expansiones en series de potencias incluso más complicadas a partir de los conocimientos básicos empleados en problemas anteriores.

Problema 2.35: Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

(a) Determine I, el intervalo de convergencia de la serie de potencias anterior.

(b) Calcule una expresión analítica para $f'(x)$ de la forma lo más simplificada posible.

(c) Integrando, encuentre una expresión explícita para $f(x)$.
Ayuda: Defina $u(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

Solución:

(a) Sigamos al pie de la letra las instrucciones, y en particular la ayuda. De esta forma, tenemos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}u(x)^n$$

En particular, digamos $u = u(x)$ es una parámetro cualquiera y con ello el problema simplemente se reduce a calcular la convergencia de una serie cualquiera, lo cual resulta más sencillo que trabajar con la expresión tal como se presenta. En este caso, podemos utilizar el Criterio del Cuociente, obteniendo así

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |u(x)|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |u(x)|$$

Luego, imponemos que $|u(x)| < 1$. Evaluamos los casos extremos:

- Si $u(x) = 1$, entonces tenemos la serie de potencias armónica, la cual **diverge**.
- Si $u(x) = -1$, entonces tenemos la serie de potencias armónica alternante, la cual **converge**.

Es decir, la serie converge si y solo si

$$-1 \leq u\left(x\right) < 1 \leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{1-x} < 1$$

Debemos resolver esta inecuación. Resolvemos primero

$$\frac{x}{1-x} < 1 \leftrightarrow \frac{x-1+x}{1-x} < 0 \leftrightarrow \frac{2x-1}{1-x} < 0$$

El comportamiento en signos es análogo a la parábola $\left(2x-1\right)\left(1-x\right)$. Esta es una parábola que se abre hacia abajo, con raíces en $1/2$ y 1. Luego, la solución es $\left(-\infty, 1/2\right)$ y $\left(1, \infty\right)$.

Luego, resolvemos

$$\frac{x}{1-x} \geq -1 \rightarrow \frac{x+1-x}{1-x} \geq 0 \rightarrow \frac{1}{1-x} \geq 0$$

cuyo conjunto solución es evidentemente $x < 1$ (en $x = 1$ se indetermina). De esta forma, la solución total viene dada por la intersección de ambos conjuntos, i.e. el intervalo de convergencia como función de x es:

$$\boxed{I = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)}$$

(b) Tomemos la forma compacta y derivemos, haciendo uso de la regla de la cadena:

$$f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} u\left(x\right)^{n} \rightarrow f'(x) = u'(x) \sum_{n=1}^{\infty} u\left(x\right)^{n-1}$$

La serie de la izquierda es casi la serie geométrica salvo por el subíndice de inicio. Sin embargo, podemos cambiar subíndices y solucionar así el problema:

$$f'\left(x\right) = u'\left(x\right) \sum_{n=0}^{\infty} u\left(x\right)^{n} \rightarrow f'(x) = \frac{u'\left(x\right)}{1-u\left(x\right)}$$

Donde $u'\left(x\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{x}{1-x} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{x-1+1}{x-1} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{\left(x-1\right)^{2}}$. Es decir,

$$f'(x) = \frac{1}{\left(x-1\right)^{2}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{x}{1-x}}$$

$$\rightarrow \boxed{f'\left(x\right) = \frac{1}{\left(1-x\right)\left(1-2x\right)}}$$

(c) Tomemos la siguiente expresión de $f'\left(x\right)$, ya que resulta por lejos la más sencilla de integrar en este problema dado que aparece la función $u\left(x\right)$ y su derivada:

$$f'(x) = \frac{u'\left(x\right)}{1-u\left(x\right)} \rightarrow f(x) = \int \frac{u'\left(x\right)}{1-u\left(x\right)} \mathrm{d}x + c$$

Hacemos lo evidente de la expresión: $u = u\left(x\right) \rightarrow \mathrm{d}u = u'\left(x\right)\mathrm{d}x$, de modo tal que

$$f\left(x\right) = \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u} + c \rightarrow f(x) = \ln\left|1-u\right| + c$$

Volviendo a las variables originales,

$$f(x) = \ln\left|1 - \frac{x}{1-x}\right| + c = \ln\left|\frac{1-2x}{1-x}\right| + c$$

Observe que si evaluamos en $x = 0$ la expresión original para $f(x)$, todos los términos en la serie de potencias se anulan pues $u(0) = 0$ Entonces,

$$f(0) = 0 = \ln(1-0) + c \to c = 0$$

Finalmente,

$$\boxed{f(x) = \ln|2x-1| + \ln|1-x|}$$

La expansión en serie de potencias de una función cualquiera genera una expresión del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Perfectamente podemos tomar un x en el intervalo de convergencia y, si conocemos una expresión cerrada para la función, podemos obtener así el valor de una serie infinita. A modo de ejemplo, si $1 \in I$, entonces

$$\text{conocido} \to f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leftarrow \text{por calcular}$$

En los siguientes problemas calcularemos el valor de series numéricas utilizando esta idea. El principal problema será entonces identificar la serie de potencias de la cual deriva la serie a calcular, y luego obtener una expresión cerrada a partir de las modificaciones respectivas a la ya conocida serie geométrica.

Problema 2.36: Calcule el valor exacto de las siguientes series. Justifique sus resultados.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n n(n-1)}$. (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Adicionalmente, considerando la serie $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ y la integral $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t^2)\,\mathrm{d}t$, calcule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}$$

Solución:

(a) Esta expresión recuerda demasiado a la realizada para arcotangente en un problema anterior. En efecto,

$$\arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

lo cual se obtiene derivando arcotangente, obteniendo la expresión en series de potencia y luego integrando. Dada que la serie a calcular no considera el término x^{2n+1}, simplemente evaluamos en $x = 1$ y obtenemos el resultado:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$$

(b) Observe que la potencia que aparece aparece en el denominador. Se sigue que podemos definir la serie

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

y lo que buscamos evaluar es $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Observe que derivando dos veces la expresión se simplifica significativamente:

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \to f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2}$$

El subíndice permanece inalterado pues la serie comenzaba ya en x^2. Más aún, podemos realizar un cambio de subíndice pues la serie comienza en $n = 2$. La hacemos entonces comenzar en el origen:

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \to f''(x) = \frac{1}{1-x}$$

Esta expresión analítica podemos integrarla dos veces para obtener una expresión cerrada para f. Luego,

$$f'(x) = -\log(1-x) + c$$

Observe que de la definición en series de potencias se observa que $f(0) = 0$. Es decir,

$$f'(0) = -\log 1 + c = 0 \to c = 0$$

Entonces $f'(x) = -\log|x-1|$. Integramos nuevamente, considerando que la integración de logaritmo se hace por partes y tiene primitiva conocida:

$$\int \log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - x$$

Se sigue entonces que

$$f(x) = -\left[(1-x)\log(1-x) - (1-x)\right] + c$$

Sabemos, dada la serie, que $f(0) = 0$. Luego,

$$f(0) = -1\log(1) - 1 + c = 0 \to c = 1$$

Es decir,

$$f(x) = -\left[(1-x)\log(1-x) + x\right]$$

Evaluando en $x = \dfrac{1}{2}$, concluimos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \to f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \log(2)\right]$$

Es decir,

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n n\,(n-1)} = \frac{1}{2}\left[\log(2) - 1\right]}$$

(c) Seguimos las mismas ideas que en el ejercicio anterior. Dado que no aparece ninguna potencia salvo el -1, evaluamos entonces la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

en $x = -1$. Derivando,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Luego,

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} \to f(x) = -\log(1-x) + c$$

Pero $f(0) = 0$ al evaluar en la serie de potencias, luego $c = 0$ y por lo tanto

$$f(x) = -\log(1-x) \to \boxed{f(-1) = -\log(2)}\ \square$$

Ahora revisaremos el ejercicio adicional. En primer lugar, dada la definición de $f(x)$ tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Por lo tanto, $f\left(x^2\right) = \dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$.

La serie que queremos calcular tiene una potencia de n en su denominador. Si buscamos hacer una relación con la serie de potencias de $f\left(x^2\right)$, podemos notar que $4^n = 2^{2n}$, razón por la cual estamos evaluando la serie de potencias

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Y el valor que buscamos es $2g\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Ahora bien, integrando $f\left(x^2\right)$, tenemos que:

$$\int_0^{1/2} f\left(t^2\right) \mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

Haciendo la separación en fracciones parciales:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} f\left(t^2\right) \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\ln(1+t)\Big|_0^{1/2} - \frac{1}{2}\ln(1-t)\Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(3) \end{aligned}$$

Sin embargo, también podemos realizar la integración de la serie de potencias. Es decir,

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} f\left(t^2\right) \mathrm{d}t &= \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right) \Bigg|_0^{1/2} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n+1)}
\end{aligned}$$

Es decir, se cumple que ambas integrales resultantes son iguales, i.e.:

$$\frac{1}{2} \ln(3) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n+1)}$$

con lo cual

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n+1)} = \ln(3)}$$

Problema 2.37:

(a) Probar que para $a \in [-1, 1)$ se tiene que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1 - a \operatorname{sen}^2(t)} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{2k+1}.$$

(b) Considere la serie de potencias $f(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \cdots$.
Demuestre que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \frac{1}{2^7 \cdot 7} + \cdots = \frac{1}{2} \ln(3)$$

Solución:

(a) Este ejercicio vuelve a insistir en el hecho de que para trabajar en series de potencias siempre hay que partir de los conocimientos más básicos y luego aplicar las modificaciones para obtener lo buscado.

Parta en primer lugar observando que al lado derecho encontramos una serie de potencias para a, no para t. Por lo tanto, lo prudente es partir de la serie de potencias conocida para a:

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \quad \text{con } |a| < 1$$

A esta serie le aplicaremos transformaciones reiterativas a ambos lados hasta obtener la integral en cuestión y en lo posible la serie de potencias en cuestión al extremo derecho. Partamos sustituyendo a por $a\,\mathrm{sen}^2(t)$. De esta forma,

$$\frac{1}{1-a\,\mathrm{sen}^2(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\,\mathrm{sen}^{2k}(t)\quad \text{con } |a|\,\mathrm{sen}^2(t)<1$$

Ahora multiplicamos por coseno a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{\cos(t)}{1-a\,\mathrm{sen}^2(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\,\mathrm{sen}^{2k}(t)\cos(t)\quad \text{con } |a|\,\mathrm{sen}^2(t)<1$$

Ahora integramos de 0 a $\pi/2$, obteniendo así

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1-a\,\mathrm{sen}^2(t)}=\int_0^{\pi/2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a^k\,\mathrm{sen}^{2k}(t)\cos(t)\right]\mathrm{d}t\quad \text{con } |a|\,\mathrm{sen}^2(t)<1$$

Como la serie de potencias en este caso converge uniformemente, entonces podemos alternar el operador serie con el operador integral (ambas expresiones representadas por límites). De esta forma,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1-a\,\mathrm{sen}^2(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[a^k\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^{2k}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

Para calcular la integral que aparece, notamos que aparece en efecto la función seno y su derivada, de modo que

$$u=\mathrm{sen}(t)\to \mathrm{d}u=\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Con ello,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1-a\,\mathrm{sen}^2(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[a^k\int_0^{1}u^{2k}\mathrm{d}u\right]$$

La primitiva es en efecto muy sencilla de calcular, de modo que

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1-a\,\mathrm{sen}^2(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{2k+1}$$

demostrando así lo pedido. El intervalo de convergencia viene dado por el hecho de que la serie obtenida en la derecha debe ser convergente. Utilizando el Criterio del Cuociente se obtiene que $|a|<1$ y luego evaluando en los extremos ($a=1$ y $a=-1$), se observa que en efecto $|a|<1$ ó $a=-1$. ■

(b) Comparando $f(x)$ con lo que se pide calcular, observe que en el fondo lo único que están pidiendo es determinar el valor de

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^5\cdot 5}+\frac{1}{2^7\cdot 7}+\cdots$$

y más aún, nos dicen que la respuesta a eso es $\dfrac{1}{2}\ln(3)$. ¿Cómo lo resolvemos?

En este caso lo que deberíamos lograr hacer es encontrar una expresión cerrada para

$$f(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots$$

La primera buena idea es parametrizarlo como una sumatoria, de modo tal que

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

No conocemos a priori ninguna expresión para esto. Sin embargo, notamos que el denominador se cancela al derivar, de modo que:

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

Observe que el numerador no se altera puesto que la serie para $f\left(x\right)$ tenía como primer término a x, cuya derivada es 1 y está contemplado en la suma de la derivada en el caso $n=0$. Ahora bien, a partir de lo que sabemos para la serie geométrica:

$$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$$

Esta expresión analítica la podemos integrar y obtenemos así una expresión cerrada para $f(x)$. Se tiene entones que

$$f(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}+c$$

Esta es una función racional con un polinomio de grado 2 cuyas raíces son reales. Ya sea por método de las fracciones parciales o por simple inspección se puede notar que

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Entonces, integrando:

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1-x\right)+c$$

Para determinar la constante c, observamos que de la serie de potencias es trivial evaluarla en $x=0$, pues:

$$f(0)=0\to f(0)=\ln\left(1\right)+c=0\to c=0$$

Por lo tanto,

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1-x\right)$$

Evaluando en $x=\dfrac{1}{2}$, para conseguir el objetivo de la demostración,

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(3\right)}$$

demostrando así lo pedido. ■

Estos desarrollos para calcular series numéricas permiten incluso hacer desarrollos numéricos más elaborados, tal como el siguiente:

Problema 2.38: En el siguiente problema demostraremos que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{7\cdot 8}+\cdots=\ln\left(2\right)$$

Para ello, trabaje con los siguientes pasos:

(a) Encuentre una expresión analítica para

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n-2}-x^{2n-1}$$

(b) Integre este resultado desde 0 a 1 para obtener una expresión para

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

como una integral.

(c) Deduzca que

$$\left|\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right|<\int_0^1 x^{2n-1}\mathrm{d}x.$$

(d) Con todos los resultados anteriores, concluya.

Solución:

(a) Esta es una serie alternante. Lo primero que podemos hacer es modelar la situación con una sumatoria. De esta forma,

$$\boxed{1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n-2}-x^{2n-1}=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x^k}$$

Sin embargo, esta es una serie de potencias geométrica alternante, para la cual sí conocemos una expresión analítica. En efecto,

$$\sum_{n=0}^{n} r^n=\frac{1-r^n}{1-r}$$

Reemplazando con esto,

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n-2}-x^{2n-1}=\frac{1-(-1)^{2n-1}x^{2n-1}}{1+x}=\frac{1+x^{2n-1}}{1+x}$$

(b) Integramos de cero a uno a ambos lados la expresión anterior:

$$\int_0^1\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{d}x-\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\cdots+\int_0^1 x^{2n-2}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{2n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1+x^{2n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

Evaluando las integrales de al lado derecho:

$$\boxed{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}=\int_0^1\frac{1+x^{2n-1}}{1+x}\mathrm{d}x}$$

(c) Observe que la expresión de la izquierda la podemos agrupar en parejas de términos:

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1} &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)\\ &= \frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2n-1-2n+2}{(2n-2)(2n-1)}\end{aligned}$$

Es decir, se tiene que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-2)\,(2n-1)}=\int_0^1\frac{1+x^{2n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

Para obtener el lado derecho de la desigualdad, podemos notar que

$$\int_0^1\frac{1+x^{2n-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}+\int_0^1\frac{x^{2n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

Luego, podemos restar la primera integral a ambos lados de la desigualdad, obteniendo así

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-2)\,(2n-1)}-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\int_0^1\frac{x^{2n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

Como $1+x>1$ por axiomática real, entonces para

$$\frac{x^{2n-1}}{1+x}<x^{2n-1}\to\int_0^1\frac{x^{2n-1}}{1+x}\mathrm{d}x<\int_0^1 x^{2n-1}\mathrm{d}x$$

Se sigue que:

$$-\int_0^1 x^{2n-1}\mathrm{d}x<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-2)\,(2n-1)}-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}<\int_0^1 x^{2n-1}\mathrm{d}x$$

Concluimos que:

$$\left|\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-2)\,(2n-1)}-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right|<\int_0^1 x^{2n-1}\mathrm{d}x\ \square$$

(d) Partiremos haciendo dos cosas sencillas. La primera es que definiremos

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-2)\,(2n-1)}$$

La segunda es que calcularemos la primitiva del lado derecho. De esta forma,

$$0\leq\left|\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-2)\,(2n-1)}-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right|<\frac{1}{2n-1}$$

Ambos límites tienden a cero en $n\to\infty$. Se sigue entonces del Teorema del Sándwich:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-2)\,(2n-1)}-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right|=0$$

Entonces, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-2)\,(2n-1)}-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=0$$

$$\to S=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1$$

Evaluando la primitiva, concluimos que:

$$\boxed{S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots = \ln(2)} \quad \blacksquare$$

Finalmente, revisaremos una última aplicación de las series de potencias: estas pueden ser utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales. En efecto, basta considerar una ecuación diferencial que cumpla ciertas condiciones (no adentraremos aquí en ello) y asumir que la solución puede ser expresada en efecto como una serie de potencias e la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Luego, reemplazamos donde aparezcan f y sus derivadas con la serie de potencias, aplicando correctamente el Teorema de Derivación. Finalmente, se agrupan las sumatorias de acuerdo a las potencias de n respectivas y se establecen condiciones para a_n de acuerdo a ambos lados de la igualdad. Con ello se pueden establecer diversos tipos de expresiones en series de potencias, tal como revisaremos en los siguientes problemas.

Problema 2.39:

(a) Determine una serie de potencias para f si se sabe que $xf'(x) + f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

(b) Encuentre una expansión en series de potencias, indicando su intervalo de convergencia, que verifique las relaciones:

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f'(0) = 1$$
$$f''(x) + f(x) = 0$$

para todo x en su intervalo de convergencia.

Solución:

(a) Siguiendo las indicaciones, supongamos que en efecto la solución de la ecuación diferencial es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Entonces, nuestro problema consiste ahora en encontrar el valor de los coeficientes de a_n para todo n. ¿Cómo logramos esto? Imponiendo las restricciones propias de la ecuación diferencial. En este caso, tenemos que:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

De esta forma, en términos de la serie de potencias se cumple para f que

$$x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Dado que esto es una suma de infinitos términos, podemos refactorizar para cada potencia de n:

$$n = 0 \quad \rightarrow \quad a_0 = 1$$

$$n = 1 \quad \rightarrow \quad (a_1 + a_1)\, x = x$$

Observe que esta es una igualdad de polinomios, que debe cumplirse para todo valor de x, razón por la cual los coeficientes necesariamente deben ser iguales, i.e.

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Para n general tenemos que

$$(n a_n + a_n)\, x^n = x^n \rightarrow (n+1)\, a_n = 1 \rightarrow a_n = \frac{1}{n+1}$$

Se sigue entonces que la serie de potencias en cuestión es

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}}$$

Haciendo el análisis de convergencia, se deduce inmediatamente que el intervalo de convergencia es $[-1, 1)$.

(b) Supongamos nuevamente la misma expresión para $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Imponemos condiciones para a_n de acuerdo a las tres condiciones dadas:

$$f(0) = a_0 = 0 \rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Derivando,

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Entonces,

$$f'(0) = 1 \cdot a_1 = 1 \rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación diferencial. Para ello requerimos calcular la segunda derivada de f:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2}$$

Entonces, términos de las series de potencias debe cumplirse que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0$$

Dado que al otro lado tenemos 0, entonces cada coeficiente debe ser de por sí cero para cumplir la igualdad:

$$\to a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$$

Ahora bien, iterando es sencillo encontrar una expresión general para esta sucesión recursiva. Partimos en $n = 0$:

$$\to a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1} = 0$$

$$\to a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{3!}$$

$$\to a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = 0$$

$$\to a_5 = -\frac{a_1}{5 \cdot 4} = \frac{1}{5!}$$

Se puede demostrar fácilmente mediante principio de inducción que

$$a_{2n} = 0 \quad \text{y} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

Dado que los términos pares se anulan, seguimos pudiendo expresar la serie de potencias en términos de n, puesto que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Como $a_{2n} = 0$, estos términos simplemente no aportan a la sumatoria, de forma que

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

Observe que para hacer coincidir las potencias con el subíndice en cuestión sin alterar n fue necesario alterar el exponen a $2n+1$. De esta forma, a a_3 efectivamente le corresponde x^3 y no x^1. Mas adelante veremos que dada la expansión en series de potencias obtenida, tenemos que:

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen}(x)}$$

En efecto, $f(0) = \operatorname{sen}(0)$, $f'(0) = \cos(0) = 1$ y $f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$, de modo que la ecuación diferencial se satisface para todo x, pues $-\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x) = 0$.

En efecto respecto a lo anterior, se deja un ejercicio propuesto para revisar una ecuación diferencial presente en muchos modelos físicos y matemáticos con geometría radial. Su solución se realiza efectivamente utilizando series de potencias. Estas funciones se conocen como Funciones de Bessel y han sido ampliamente estudiadas y aplicadas en muchos campos de la física, ingeniería, química, etc.

Problema 2.40: [**Propuesto**] Considere la ecuación diferencial

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2y = 0.$$

Considere inicialmente que la solución se puede expresar como la serie de potencias $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$.

(a) Reemplazando en la ecuación diferencial, usted podrá imponer condiciones para a_m. Siguiendo este procedimiento, demuestre que una solución a la ecuación diferencial viene dada por la Función de Bessel, $J_0(x)$:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

(b) Calcule el intervalo de convergencia de esta serie de potencias.

2.5. Series de Taylor y de Maclaurin

Problema 2.41: Sea la función $f(x) = (1+x)^{1/3}$.

(a) Calcule los primeros tres términos de su serie de Maclaurin.

(b) Determine una aproximación de $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)}$ con un error menor o igual a 0,07.

Solución:

(a) Tenemos que la serie de Maclaurin por definición viene dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Observe que coincide en este caso con su serie binomial pues $x_0 = 0$. De esta forma, requerimos calcular la primera y la segunda derivada en $x = 0$. De esta forma,

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} \to f'(0) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3} \to f''(0) = -\frac{2}{9}$$

De esta forma,

$$\boxed{(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + R_3(x)}$$

(b) Es sugerente utilizar la expansión anterior, de modo que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{47}{36}$$

Es decir,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} = \frac{47}{36} + R_3\left(\frac{1}{2}\right)$$

Para determinar el error de esta aproximación utilizamos el error de Taylor. En este caso, tenemos que existe $\xi \in (-x, x)$ tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n \to R_3(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}x^3$$

Calculamos la tercera derivada:

$$f^{(3)}(\xi) = \frac{10}{27}(1+\xi)^{-8/3}$$

Nada sabemos sobre cuál es el valor de ξ en cuestión, pero como buscamos un error menor a 0,07, razón por la cual podemos decir que al trabajar con la función racional $(1+\xi)^{-8/3}$ se cumple la desigualdad:

$$f^{(3)}(\xi) \leq \frac{10}{27}$$

Es decir,

$$R_3(x) \leq \frac{10}{26\cdot 6}x^3$$

Como trabajamos con $x = \dfrac{1}{2} < 1$, entonces

$$R_3(x) \leq \frac{10}{26\cdot 6} \approx 0{,}064$$

Es decir,

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \approx \frac{47}{36} \pm 0{,}064}$$

Lo cual efectivamente es una aproximación con error menor a 0,07, encontrando así lo pedido.

Problema 2.42: Encuentre una expresión en Series de Taylor para las siguientes funciones en torno al punto indicado:

(a) $\ln(x)$ en $x_0 = 1$.

(b) $\cosh(x)$ en $x_0 = 0$.

(c) $\dfrac{1}{3x+5}$ en $x_0 = 1$.

(d) $\operatorname{sen}^2(x)$ en $x_0 = 0$.

(e) $g(x) = \dfrac{9x}{x^2 - 4x + 13}$ en torno a $x_0 = 2$.

(f) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$.

(g) $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ en $x_0 = 0$.

Solución:

(a) Si bien podemos obtener la expresión en serie de potencias a partir de la derivación y expresión en términos de la serie geométrica, esta vez derivaremos de forma sistemática para obtener la expresión. Se tiene que:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \quad ; \quad f^{(5)}(x) = \frac{4!}{x^5} \quad ; \quad f^{(6)}(x) = -\frac{6!}{x^6}$$

Se sigue que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n} \to f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Entonces,

$$\ln(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots$$

Generalizando como sumatoria:

$$\boxed{\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}}$$

(b) En vez de aplicar derivación sistemática, aprovechemos las propiedades de las Series de Taylor. En primer lugar recordemos que:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

Ya sabemos que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \to e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Luego,

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1+(-1)^n]}{2} \frac{x^n}{n!}$$

Ya sea expandiendo un par de términos de la serie o viéndolo de forma sistemática, podemos notar que:

$$\frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, solo debemos considerar los múltiplos pares de n, i.e. $n = 2k$ lo cual se puede expresar en la serie de potencias como:

$$\boxed{\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}}$$

(c) Si bien podemos utilizar la serie de Taylor derivando de forma sistemática, en este problema veremos que también se pueden aplicar las transformaciones necesarias a la serie geométrica para obtener lo pedido. ¿Por qué esto es cierto? Porque la representación en serie de potencias para una función es única. Supongamos que esto no es así, entonces existirían $a_n \neq b_n$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(x - x_0)^n = 0.$$

Entonces para todo n debe cumplirse que $a_n = b_n$ lo cual es una contradicción. Entonces, nos concentramos en realizar este trabajo utilizando la serie geométrica en vez de una derivación sistemática de la función (algo que eventualmente podría resultar complicado).

Aplicamos lo que ya sabemos sobre esta serie para expandir en torno a $x_0 = 1$:

$$\frac{1}{3x+5} = \frac{1}{8 + 3(x-1)}$$

Este primer paso nos permite dejar la serie geométrica expresada en torno a potencias de $(x-1)$. Luego,

$$\frac{1}{3x+5} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \left[-\frac{3}{8}(x-1)\right]} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{8}\right)^n (x-1)^n$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{1}{3x+5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{8^{n+1}} (x-1)^n}$$

(d) Observe qué ocurriría si derivamos término a término:

$$f'(x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x) \to f''(x) = 2\cos^2(x) - 2\,\text{sen}^2(x)$$

lo cual evidencia que la derivación haría cada vez más complicado el proceso. Por esta razón, es necesario encontrar una representación de $\text{sen}^2(x)$ en términos de potencias más sencillas y luego aplicar las transformaciones necesarias. Observe que sabemos que:

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Calcular la serie de potencias de $\cos(2x)$ es en efecto muy sencillo puesto que:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Entonces,

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Por lo tanto:

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$$

Como en la serie $n = 0$ genera el término 1, simplemente comenzamos la serie en $n = 1$ para generalizar:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 2^{2n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

(e) Completando cuadrados tenemos que:

$$g(x) = \frac{9x - 18}{(x-2)^2 + 9} = (x-2) \cdot \frac{1}{\dfrac{(x-2)^2}{9} + 1}$$

Llevando a series de potencias mediante la ya estudiada serie geométrica el miembro derecho,

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-2)^{2k}}{9^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-2)^{2k+1}}{9^k} \end{aligned}$$

Como la representación en serie de potencias en torno a un punto es única, concluimos que esta es la serie buscada, i.e.

$$\boxed{g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-2)^{2k+1}}{9^k}}$$

(e) La forma más sencilla de realizar esto es calcular la serie de potencias de $f(x)$ y luego realizar una integración término a término en la serie. Luego, tomemos:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Se tiene que $f(0) = 1$ y se puede demostrar de forma sencilla que la función es diferenciable en el origen mediante esta definición a tramos para la función. Para obtener las derivadas de f resulta más sencillo partir de una serie ya conocida:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \to \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Entonces efectivamente,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Integramos ahora término a término, de forma que

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t \to \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Como se realizó integración definida, en este caso **n**o se incluye una constante c, pues los efectos de esta quedan absorbidos por la primitiva de f en $t = 0$. Concluimos entonces que:

$$\boxed{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)} x^{2n+1}}$$

(f) Al igual que en el ejercicio anterior calculamos primero la serie para lo que se encuentra en el interior de la integral. Esto no es complicado pues ya sabemos que:

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \to 1 - \cos(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1-\cos(t)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n)!}$$

Integrando término a término:

$$\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \int_0^x t^{2n-1}\mathrm{d}t$$

Con ello, tenemos que:

$$\boxed{\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!\,(2n)} x^{2n}}$$

Problema 2.43:

(a) Sea la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

Determine una aproximación I_0 de I tal que $|I - I_0| < 10^{-1}$.

(b) Muestre que

$$\int_0^1 \frac{x^{7/2}}{\cosh(x) - 1 - x^2/2}\mathrm{d}x \leq 48.$$

(c) Calcule una expansión en serie de potencias para

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

y úsela para calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

Solución:

(a) Encontrar el error de la estimación es algo en cierto sentido secundario en comparación a lo primero que se necesita, que es obtener una aproximación para I_0. Esto lo podemos lograr aproximando e^{-x^2} mediante series de potencias y luego realizando la integración.

Para calcular la serie de potencias de e^{-x^2} partimos de una serie de potencias conocida:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \to e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Integrando de cero a uno:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}
\end{aligned}$$

Observe que a partir de la serie de potencias generamos una serie. Para obtener I_0 basta truncar la serie en algún valor pertinente de modo que se cumpla lo pedido. Sea:

$$I_{0,n} = \sum_{n=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} \quad ; \quad I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}$$

la cual es una **serie alternante**. Sabemos entonces que:

$$|I - I_{0,n}| < |I_{0,n+1} - I_{0,n}| = a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!\,(2n+3)}$$

Luego, es suficiente encontrar n tal que:

$$\frac{1}{(n+1)!\,(2n+3)} < 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

o bien, equivalentemente: (dado que trabajamos con números positivos no nulos)

$$(n+1)!\,(2n+3) > 10$$

Esta inecuación no tiene solución analítica, debe ser solucionada por inspección.

- Si $n = 1$ tenemos la serie $2 \cdot 5 = 10$, por lo cual no se cumple.
- Si $n = 2$ tenemos la serie $6 \cdot 7 = 42$, la cual si lo cumple.

Por lo tanto, para cumplir con la condición del error truncamos la serie en $n = 2$. Concluimos que:

$$I_0 = 1 - \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{30 - 10 + 3}{30}$$

$$\therefore \boxed{I_0 = \frac{23}{30}}$$

(b) No es materia de discusión el hecho de que resulta prácticamente imposible evaluar la primitiva de la integral. Es por esta razón que una de las pocas posibilidades que quedan para establecer esta cota es trabajar con seria de potencias. Esto en efecto es posible realizarlo, pues ya vimos en un problema anterior que:

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Observe que para todo x real al desarrollar la serie, tenemos una sucesión monótona creciente pues cada término que agregamos a la suma en la expansión estamos agregando un número positivo. Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden n es siempre menor a la serie de Taylor de $\cosh(x)$:

$$\sum_{n=0}^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Si truncamos el polinomio de Taylor en $n = 1$ generamos la serie $1 + \frac{x^2}{2}$, lo cual genera una división por cero en el denominador de la integral. Entonces, por simplicidad evaluamos en el menor n posible, el cual es evidentemente $n = 2$. Por lo tanto,

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh(x)$$

Se sigue que:

$$\frac{x^4}{24} < \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \to \frac{24}{x^4} > \frac{1}{\cosh(x) - 1 - x^2/2}$$

Multiplicamos por un término siempre positivo: $x^{7/2}$ en integramos de cero a 1, obteniendo así que:

$$\int_0^1 \frac{x^{7/2}}{\cosh(x) - 1 - x^2/2} \mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{24x^{7/2}}{x^4} \mathrm{d}x = \int_0^1 24x^{-1/2} \mathrm{d}x$$

Si se cumple a desigualdad estricta, entonces también se cumple la desigualdad estricta (ej: $3 < 4 \to 3 \leq 4$), por lo tanto:

$$\int_0^1 \frac{x^{7/2}}{\cosh(x) - 1 - x^2/2} \mathrm{d}x < 24 \cdot 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 48$$

demostrando así lo pedido. ■

(c) Realizaremos la primera indicación. Observe que no resulta para nada sencillo derivar la función reiteradas veces para generar el polinomio, razón por la cual aplicamos las transformaciones pertinentes a la conocida serie de e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \to e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \to \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

Dado que la serie comienza expandiéndose en $n = 1$ con la potencia x^0, puede resultar pertinente expresar la serie también como aquella que comienza en $n = 0$, i.e.

$$\boxed{\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}}$$

Queremos calcular la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$, pero en la serie anterior no disponemos del término n.

Este problema podemos solucionarlo derivando la función y luego posteriormente evaluándola en $x = 1$. Realizamos esto derivando la igualdad obtenida a ambos lados:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{(x-1)\,e^x + 1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)!}$$

Evaluando en $x = 1$ concluimos que:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1}$$

Esto pudo haber sido calculado y/o corroborado incluso utilizando la propiedad telescópica, pues:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \\
&= \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{(N+1)!} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Problema 2.44:

(a) Demuestre que:

$$1 - \ln(2) + \frac{\ln^2(2)}{2!} - \frac{\ln^3(2)}{3!} + \cdots = \frac{1}{2}$$

(b) Sea la función $f(x) = x^x$. Asuma que $f(0) = 1$ y demuestre mediante series de potencias que

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

Solución:

(a) Digamos $u = \ln(2)$. Entonces la serie a evaluar es:

$$S = 1 - u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \cdots$$

Esta serie guarda relación con la serie de MacLaurin de la exponencial. En efecto,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} u^k = e^{-u} \to S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \ln^k(2) = e^{-\ln(2)}$$

Aplicando propiedades algebraicas básicas:

$$\boxed{S = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}} \quad \blacksquare$$

(b) Partamos tomando la serie de potencias de x^x, luego la integramos entre 0 y 1 y así llegamos al resultado pedido. Tenemos que:

$$x^x = \left[e^{\ln(x)}\right]^x = e^{x\ln(x)}$$

Usando la serie de potencias de la exponencial,

$$x^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \ln^k(x)}{k!}$$

Ahora integramos de 0 a 1, lo que es posible de realizar pues la exponencial converge para todo número real:

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k(x)\, \mathrm{d}x$$

Por calcular para k cualquiera, $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k \ln^k(x)\, \mathrm{d}x$. Podemos hacer:

$$u = \ln(x) \to \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \to e^u \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

Es decir,

$$I_k = \int_{-\infty}^{0} e^{u(k+1)} u^k \mathrm{d}u \overset{v=(k+1)u}{=} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \int_0^{\infty} v^k e^{-v} \mathrm{d}v$$

Se puede demostrar fácilmente mediante integración por partes y recursividad que:

$$\int_0^{\infty} v^k e^{-v} \mathrm{d}v = k \int_0^{\infty} v^{k-1} e^{-v} \mathrm{d}v$$

Es decir, aplicándolo reiteradas veces concluimos que:

$$\int_0^{\infty} v^k e^{-v} \mathrm{d}v = k! \int_0^{\infty} e^{-v} \mathrm{d}v = k! \left(-e^{-v}\right)\Big|_0^{\infty} = k!$$

Por lo tanto,

$$I_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} k!$$

Reemplazando,

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{k!}} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \cancel{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$$

Comenzando a sumar desde $k = 1$:

$$\boxed{\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}}$$

demostrando así lo pedido. ■

Utilizaremos ahora las Series de Taylor para evaluar el valor de límites que resultaría en extremo tediosos mediante el uso de la Regla de L'Hôpital. Para ello, no utilizaremos la expresión completa de la serie, si no que truncaremos la serie a conveniencia para obtener un polinomio de Taylor. De esta forma, para una función analítica cuya serie resulte sencilla de calcular haremos:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

donde el n se escoge a conveniencia según el contexto del problema. Luego, podemos utilizar el hecho de que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}} = 0$$

Es decir, dividiendo inteligentemente por la potencia de n adecuada y utilizando álgebra de límites podemos incluso olvidarnos de la presencia de los residuos de los polinomios de Taylor.

Para comprender mejor estas ideas, revisemos los siguientes ejercicios concretos:

Problema 2.45: Evalúe los siguientes límites utilizando Series de Taylor:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1 + x)}{x^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\left[x - \ln(1 + x)\right]}{\arctan(x) - x\cos(x)}$.

[**Propuesto**] Calcule bajo el mismo procedimiento:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}\left[\operatorname{sen}(x)\right] - \operatorname{sen}^2(x)}{x^6}$$

Solución:

(a) Expandamos la única serie analítica que requiere expansión: $\ln(1 + x)$. Mediante la expansión en la serie geométrica, resulta sencillo observar que:

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n + 1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Dado que en el primer término se cancelan los numeradores, es suficiente considerar el polinomio de Taylor hasta $n = 1$, momento en el cual tendríamos el término de orden dos. De esta forma,

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - x + \dfrac{x^2}{2} - R_2(x)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} - \frac{R_2(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

(b) No resulta sencillo determinar una expansión en series de potencias para $\tan(x)$. Sin embargo, observamos que solo bastaría los cuantos términos de la serie de tangente puesto que debería ocurrir una simplificación con x. En efecto,

$$f'(x) = \sec^2(x) \to f''(x) = 2\tan(x)\sec^2(x) \to f'''(x) = 2\sec^4(x) + 4\tan^2(x)\sec^2(x)$$

con lo cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ y $f'''(0) = 2$, con lo cual expandimos hasta $n = 3$:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + R_4(x)$$

Reeemplazando,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} + \frac{R_4(x)}{x^3} = \frac{1}{3} + \lim_{x\to 0} \frac{R_4(x)}{x^3}$$

Observe que aunque la potencia del denominador es menor al orden del resto, este límite también es cero, pues:

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_4(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{R_4(x)}{x^4} = 0$$

Finalmente,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3} = \frac{1}{3}}$$

(c) En el numerador tenemos que expandir la función coseno. Si expandimos hasta $n = 0$ obtenemos cero en el numerador, por lo cual probamos primero expandiendo hasta $n = 1$. Bajo el mismo argumento, en la función exponencial expandimos hasta $n = 2$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + R_3(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_3(x)$$

Observe que tomamos $R_3(x)$ en vez de $R_2(x)$ ya que de acuerdo a la definición de serie Taylor lo que en la práctica ocurre es que el término generado en $n = 1$ es el término obtenido para $n = 2$ producto de las cancelaciones de términos que ocurren.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + \dfrac{x^2}{2} + R_3(x)}{1 + x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - R_3(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2} + R_3(x)}{-\dfrac{x^2}{2} - R_3(x)} = \lim_{x\to 0} -1
\end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+x-e^{x}}=-1}$$

(d) La dificultad aumenta significativamente en este ejercicio, puesto que no resulta del todo obvio hasta qué orden debemos escoger en cada expansión en series de Taylor. Por lo tanto, partiremos identificando correctamente cada serie en cuestión. De esta forma,

- $\operatorname{sen}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\cdots.$
- Mediante serie geométrica deducimos:
  $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\cdots.$
- Derivando y plicando la serie geométrica obtenemos que:
  $\arctan(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{7}}{7}+\cdots.$
- $x\cos(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=x-\frac{x^{3}}{2!}+\frac{x^{5}}{4!}-\frac{x^{7}}{6!}+\cdots.$

Es decir,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)\left[x-\ln(1+x)\right]}{\arctan(x)-x\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\dfrac{x^{3}}{3!}+\dfrac{x^{5}}{5!}-\dfrac{x^{7}}{7!}+\cdots\right)\left(\dfrac{x^{2}}{2}-\dfrac{x^{3}}{3}+\dfrac{x^{4}}{4}-\cdots\right)}{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)x^{3}+\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5}\right)x^{5}+\ldots}$$

Observe que si en el numerador nos quedamos con el primer término resultante de la primera serie y nos quedamos con el primer término resultante de la segunda y en el denominador nos quedamos solo con el primer término resultante, obtenemos el límite de dos funciones del mismo grado.

Esto resulta aún más intuitivo de lo que parece: para $x\approx 0$ tenemos que el aumento de grado de la potencia hace que el término sea más despreciable que los de grado menor, en la misma analogía que utilizamos para analizar el comportamiento asintótico de las series. Luego,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)\left[x-\ln(1+x)\right]}{\arctan(x)-x\cos(x)}\approx\lim_{x\to 0}\frac{x^{3}/2}{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{2}=3$$

Para no perder la rigurosidad de los ejercicios anteriores, obtenemos los polinomios de Taylor correctamente:

- $\operatorname{sen}(x)=x+R_{2}(x).$
- $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^{2}}{2}+R_{3}(x).$

- $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + R_4(x)$.

- $x\cos(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + xR_3(x)$.

Se sigue entonces que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\left[x - \ln(1+x)\right]}{\arctan(x) - x\cos(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + R_2(x)\right)\left(\dfrac{x^2}{2} - R_3(x)\right)}{\dfrac{1}{6}x^3 + R_4(x) - xR_3(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^3/2 - xR_3(x) + x^2R_2(x)/2 - R_2(x)R_3(x)}{x^3/6 + R_4(x) - xR_3(x)}
\end{aligned}$$

Dividimos tanto arriba como abajo por x^3 y considerando que:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ n<m}} \frac{R_m(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} x^{m-n} \lim_{x\to 0} \frac{R_m(x)}{x^m} = 0$$

concluimos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\left[x - \ln(1+x)\right]}{\arctan(x) - x\cos(x)} = 3}$$

En la práctica, para aplicaciones futuras, este problema que se presentará a continuación debe ser por lejos el más importante de esta sección. Esto se debe fundamentalmente a que en física e ingeniería muchas veces se realizan comparaciones asintóticas de funciones en infinito o cerca de un punto, de modo que una expresión algebraica compleja puede verse de forma más sencilla comarándola con su serie de Taylor.

Más aún, esta técnica de comparar con series de Taylor es usada para simplificar de forma habitual las expresiones algebraicas y obtener fórmulas finales más sencillas de trabajar mientras se esté cerca del punto del cual se está realizando la expansión.

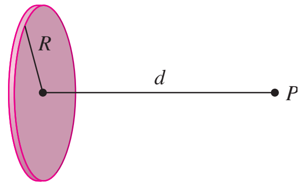
Problema 2.46: Un disco uniformemente cargado tiene radio r y densidad de carga superficial σ, tal como se muestra en la figura. Se puede demostrar mediante la Ley de Coulomb que el potencial eléctrico V a una distancia d a lo largo de la perpendicular que atraviesa el eje del disco viene dada por

$$V = 2\pi k_e \sigma \left(\sqrt{d^2 + r^2} - d\right)$$

donde k_e es una constante conocida como Constante de Coulomb. Demuestre que para d muy grande:

$$V \approx \tilde{V} = \frac{\pi k_e r^2 \sigma}{d}$$

Es decir, $\left|V-\tilde{V}\right| \to 0$ cuando $d \to \infty$.



Solución:

Partamos en primer lugar observando que para la expresión original al hacer muy grande d ocurre que $\sqrt{d^2+r^2} \approx d$, por lo que puede interpretarse que la diferencia es cero. En efecto, es evidente que para $d \to \infty$ el potencial eléctrico se hace cero, lo cual es un resultado predecible desde la experiencia empírica para los fenómenos de campos eléctricos. Sin embargo, lo que queremos cuantificar es con qué velocidad se aproxima a cero el potencial.

Una aproximación de Taylor **muy** utilizada en física es la de la serie binomial para $n=1$ ó $n=0$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + R_2(x) \quad \text{con } \lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$$

En este caso surgen dificultades al utilizar esta aproximación, pues estamos evaluando el comportamiento en $d \to \infty$. Debemos proceder entonces teniendo cierto cuidado y haciendo una buena observación: si $d \to \infty$, entonces $d >> r$, con lo cual

$$\frac{r}{d} << 1$$

y solo de esta forma podemos aplicar Taylor cerca del origen. Es decir,

$$\sqrt{d^2+r^2} = d\sqrt{1+\left(\frac{r}{d}\right)^2} \approx d\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{d}\right)^2\right) = d + \frac{1}{2}\frac{r^2}{d}$$

Entonces,

$$\sqrt{d^2+r^2} = d + \frac{1}{2}\frac{r^2}{d} + dR_2\left(\frac{1}{d}\right)$$

Con lo cual,

$$2\pi k_e \sigma \left(\sqrt{d^2+r^2} - d\right) = 2\pi k_e \sigma \left[d + \frac{1}{2}\frac{r^2}{d} + dR_2\left(\frac{1}{d}\right) - d\right]$$

Para $d \to \infty$ evidentemente $dR_2\left(\frac{1}{d}\right) \to 0$, por lo que se sigue que:

$$\boxed{V \approx 2\pi k_e \sigma \frac{1}{2}\frac{r^2}{d} = \frac{\pi k_e \sigma r^2}{d} = \tilde{V}}$$

Esto se puede en efecto formalizar tomando el límite el límite de la diferencia cuando $d \to \infty$:

$$\begin{aligned}
V - \tilde{V} &= \frac{2\pi k_e \sigma r^2}{\left(\sqrt{d^2+r^2}+d\right)} - \frac{\pi k_e \sigma r^2}{d} \\
&= \pi k_e \sigma r^2 \left(\frac{2}{\sqrt{d^2+r^2}+d} - \frac{1}{d} \right) \\
&= \pi k_e \sigma r^2 \left(\frac{d-\sqrt{d^2+r^2}}{\sqrt{d^2+r^2}+d} \right) \\
&= \pi k_e \sigma r^2 \frac{d^2-d^2-r^2}{\left(\sqrt{d^2+r^2}+d\right)^2}
\end{aligned}$$

Luego, efectivamente,

$$\lim_{d\to\infty} \left| V - \tilde{V} \right| = \lim_{d\to\infty} \frac{\pi k_e \sigma r^4}{\left(\sqrt{d^2+r^2}+d\right)^2} = 0$$

demostrando así lo pedido. ■

---

3. Geometría vectorial en $\mathbb{R}^3$

En este capítulo se realiza un estudio previo de los conceptos vectoriales básicos del espacio $\mathbb{R}^3$. Se repasan los conceptos de vectores y sus operaciones. Posteriormente se definen los conjuntos unidimensional y bidimensional más sencillos en $\mathbb{R}^3$: las rectas y los planos.

A partir de estos conjuntos se realiza una generalización y se estudiarán los conjuntos unidimensionales más generalizados: las curvas. Las curvas son el elemento básico de análisis para el cálculo vectorial en $\mathbb{R}^3$, tema que será tratado con lujo de detalles en el curso Cálculo III.

3.1. Vectores y operaciones vectoriales

Antes de comenzar, realizaremos una breve revisión de los conceptos importantes de vectores en $\mathbb{R}^3$ así como sus operaciones vectoriales.

Definición:

- Se define $\mathbb{R}^3$ como el conjunto:

  $$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \, : \, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

  Esta representación permite expresar regiones del espacio mediante ecuaciones.

- Sus elementos se representan por *vectores*. Se asume $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, etc. a menos que se explicite lo contrario.[8]

- Se define la *longitud de un vector* como:

  $$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$$

- Se define la *distancia* entre dos puntos/vectores como:

  $$d\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$$

Definición: Para $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m \in \mathbb{R}^n$ $(m \leq n)$ se dice que $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ es una *combinación lineal* de dichos vectores si es que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\mathbf{r} = \alpha_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{r}_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbf{r}_k$$

Definición: Se dice que los vectores $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m \in \mathbb{R}^n (m \leq n)$ se dicen *linealmente independientes* si y solo si:

$$\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{r}_m = 0 \Longleftrightarrow (\forall i \leq m) \;\; \alpha_i = 0$$

[8] Usaremos la noación en negrita minúscula para referirnos a vectores.

Partiremos revisando problemas con la primera operación vectorial básica: el **producto punto**. Repasamos el concepto antes de comenzar a trabajar:

Definición: Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, se define el *producto escalar* como la operación $\cdot\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i}^{n} x_i y_i$$

y que con $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica las siguientes propiedades:

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.
- $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

Definición: Se define la *norma* como la operación $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

y que verifica las siguientes propiedades:

- $\|\mathbf{a}\| = 0 \iff \mathbf{a} = \vec{0}$.
- $\|\lambda \mathbf{a}\| = |\lambda|\, \|\mathbf{a}\|$.
- Por ley del coseno: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\, \|\mathbf{y}\| \cos\alpha$.

Teniendo claros todos estos conceptos se puede comenzar a trabajar con las operaciones vectoriales.

Problema 3.1: Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, muestre que el conjunto

$$A = \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\ :\ (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0\right\}$$

define una esfera y calcule su radio.

Solución:

Debemos demostrar que el conjunto es uno que impone que la distancia de $\mathbf{r} \in A$ a cierto punto por determinar es una constante. Esto lo podemos lograr trabajando un poco la expresión que define al conjunto y aplicando adecuadamente las propiedades del producto punto. En efecto,

$$\begin{aligned}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}) &= \|\mathbf{r}\|^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &= \|\mathbf{r}\|^2 - \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\end{aligned}$$

Al igual que como trabajábamos en geometría analítica, sería ideal poder expresar $\mathbf{r}$ dentro de una norma completa para probar que efectivamente es una esfera. Podemos realizar un procedimiento similar a la completación de cuadrados, notando que:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}\|^2 - \mathbf{r}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \|\mathbf{r}\|^2 - 2\mathbf{r}\cdot\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{2} + \frac{\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2}{4} - \frac{\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2}{4} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\
&= \left\|\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{2}\right\|^2 - \frac{\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2}{4} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Sabemos entonces de la definición de A que:

$$\left\|\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{2}\right\|^2 - \frac{\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2}{4} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \to \left\|\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{2}\right\|^2 = \frac{\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - 4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{4}$$

Entonces,

$$\left\|\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{2}\right\|^2 = \frac{\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2}{4}$$

Es decir, A puede ser efectivamente escrito por equivalencia de las expresiones como el conjunto:

$$A = \left\{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3 \ : \ \left\|\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{2}\right\|^2 = \frac{\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2}{4}\right\}$$

que corresponde a uno en que la distancia de todos los puntos a $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ es constante y tiene valor $\dfrac{\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|}{2}$.

Es decir, el conjunto describe una esfera de radio $\dfrac{\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|}{2}$ y radio $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$. ■

Problema 3.2: Considere los puntos $\mathbf{A}(-1,5,3)$ y $\mathbf{B}(6,2,-2)$.

(a) Demuestre que el conjunto de aquellos puntos $\mathbf{P}$ tales que su distancia a $\mathbf{A}$ es el doble de la distancia de $\mathbf{P}$ a $\mathbf{B}$ es una esfera. Encuentre su centro y su radio.

(b) Describa y encuentre una ecuación cartesiana para el conjunto de puntos $\mathbf{P}$ que equidistan de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Solución:

(a) Demostraremos con un procedimiento similar al problema anterior. Escribiéndolo de forma matemática, tenemos que el conjunto A viene dado por:

$$A = \left\{\mathbf{P}\in\mathbb{R}^3 \ : \ AP = 2PB\right\}$$

En otras palabras,

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{P}\| = 2\|\mathbf{B}-\mathbf{P}\| \to \|\mathbf{A}-\mathbf{P}\|^2 = 4\|\mathbf{B}-\mathbf{P}\|^2$$

Expandiendo la expresión anterior,

$$\|\mathbf{A}\|^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} + \|\mathbf{P}\|^2 = 4\|\mathbf{B}\|^2 - 8\mathbf{B}\cdot\mathbf{P} + 4\|\mathbf{P}\|^2$$

Reordenando términos:

$$3\|\mathbf{P}\|^2 - 2\mathbf{P}\cdot(4\mathbf{B}-\mathbf{A}) + \left(4\|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2\right) = 0$$

Completando cuadrados tal cual como en el problema anterior:

$$\begin{aligned}
3\|\mathbf{P}\|^2 - 2\mathbf{P}\cdot(4\mathbf{B}-\mathbf{A}) + \left(4\|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2\right) &= 3\|\mathbf{P}\|^2 - 2\sqrt{3}\mathbf{P}\cdot\frac{(4\mathbf{B}-\mathbf{A})}{\sqrt{3}} + \left(4\|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2\right) \\
&= \left\|\sqrt{3}\mathbf{P} - \frac{4\mathbf{B}-\mathbf{A}}{\sqrt{3}}\right\|^2 - \frac{\|4\mathbf{B}-\mathbf{A}\|^2}{3} + \left(4\|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2\right)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\left\|\sqrt{3}\mathbf{P} - \frac{4\mathbf{B}-\mathbf{A}}{\sqrt{3}}\right\|^2 - \frac{\|4\mathbf{B}-\mathbf{A}\|^2}{3} + \left(4\|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2\right) = 0$$

Reordenando términos:

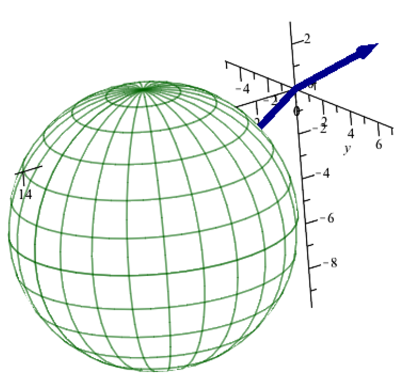
$$\begin{aligned}
\left\|\sqrt{3}\mathbf{P} - \frac{4\mathbf{B}-\mathbf{A}}{\sqrt{3}}\right\|^2 &= \frac{\|4\mathbf{B}-\mathbf{A}\|^2}{3} - \left(4\|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2\right) \\
&= \frac{16\|\mathbf{B}\|^2 - 8\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \|\mathbf{A}\|^2 - 12\|\mathbf{B}\|^2 + 3\|\mathbf{A}\|^2}{3} \\
&= \frac{4\|\mathbf{B}\|^2 - 8\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + 4\|\mathbf{A}\|^2}{3} \\
&= \frac{\|2\mathbf{A}-2\mathbf{B}\|^2}{3} > 0
\end{aligned}$$

Factorizando el término de la izquierda por $\sqrt{3}$:

$$3\left\|\mathbf{P} - \frac{4\mathbf{B}-\mathbf{A}}{3}\right\|^2 = \frac{\|2\mathbf{A}-2\mathbf{B}\|^2}{3} \to \boxed{\left\|\mathbf{P} - \frac{4\mathbf{B}-\mathbf{A}}{3}\right\|^2 = \frac{\|2\mathbf{A}-2\mathbf{B}\|^2}{9}}$$

Es decir, el conjunto describe una esfera de centro $\dfrac{4\mathbf{B}-\mathbf{A}}{3}$ y radio $\dfrac{\|2\mathbf{A}-2\mathbf{B}\|}{3}$. ■

Graficamos la situación junto a los vectores:



(b) Ahora debemos describir al conjunto de ecuación:

$$\|\mathbf{P}-\mathbf{A}\| = \|\mathbf{P}-\mathbf{B}\| \to \|\mathbf{P}-\mathbf{A}\|^2 = \|\mathbf{P}-\mathbf{B}\|^2$$

Expandiendo:

$$\cancel{\|\mathbf{P}\|^2} - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} + \|\mathbf{A}\|^2 = \cancel{\|\mathbf{P}\|^2} - 2\mathbf{B}\cdot\mathbf{P} + \|\mathbf{B}\|^2$$

Reordenando términos:

$$2\mathbf{P}\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = \|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2 \to \mathbf{P}\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = \frac{\|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}\|^2}{2}$$

Factorizando:

$$\mathbf{P}\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = \frac{(\mathbf{B}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{A})}{2} \to \boxed{\left[\mathbf{P} - \frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2}\right]\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = 0}$$

Como $\mathbf{P}$ es un punto cualquiera que cumple esta condición, tenemos que este es un plano de normal $\boxed{\mathbf{B}-\mathbf{A}}$ y vector posición posición:

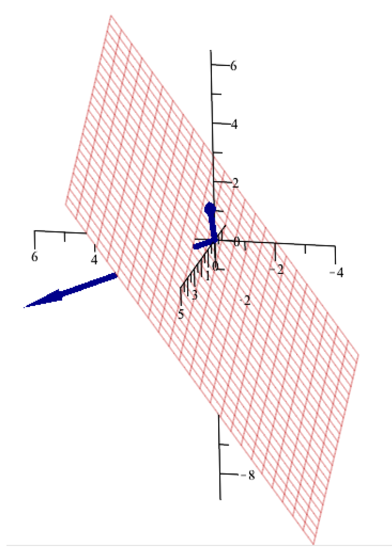
$$\boxed{\frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{2}}$$

Imaginarse que este era el lugar geométrico en cuestión no resulta complicado: el conjunto de puntos que equidistan de estos dos puntos debe ser un plano. Esperamos que efectivamente uno de los puntos sea el promedio de los dos vectores dados, y que efectivamente una de las normales sea $\mathbf{B}-\mathbf{A}$.

Reemplazando con los vectores se llega a que la ecuación cartesiana es:

$$\boxed{\Pi\ :\ 7x - 3y - 5z = \frac{9}{2}}$$

Finalmente, graficamos la situación junto a los vectores:



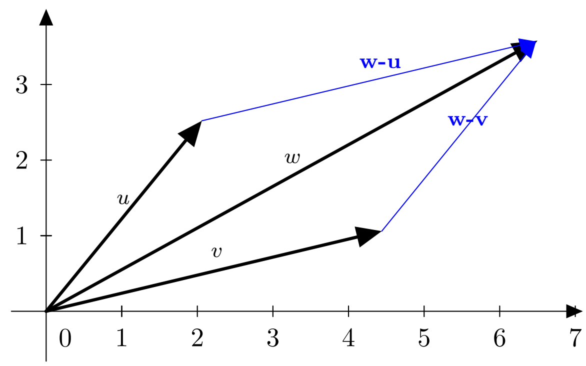
Problema 3.3:

(a) Suponga que todos los lados de un cuadrilátero tienen la misma medida y sus lados opuestos son paralelos. Demuestre que las diagonales son perpendiculares.

(b) Demuestre que $\mathbf{G}$ es el centro de gravedad de un triángulo $\triangle ABC$ si y solo si $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=0$.

Solución:

(a) Supongamos sin pérdida de generalidad que el cuadrilátero lo describimos mediante los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y el origen siendo $\mathbf{w}$ el vértice opuesto al origen, tal como se muestra en la siguiente figura:



Partamos ordenando la información que nos dan e interpretándola adecuadamente para darle el uso requerido en la demostración. Si todos los lados tienen la misma medida, entonces:

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}-\mathbf{u}\| = \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$$

Que los lados opuestos sean paralelos significa que en particular dada la orientación de la figura se tiene que:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} &= \|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \\ (\mathbf{w}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} &= \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\|\end{aligned}$$

pues al tratarse de vectores paralelos el coseno vale inmediatamente uno.

Lo que queremos demostrar es que las diagonales son perpendiculares, i.e. a partir de la figura:

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = 0$$

Una forma de demostrar esto es la que se expone a continuación. Observe que podemos expandir los producto punto:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\ (\mathbf{w}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\end{aligned}$$

Obtenemos la expresión de la demostración restándole la primera igualdad a la segunda, i.e.

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{v})-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

Sin embargo, dado que los vectores que representan los lados son paralelos, tenemos entonces que:

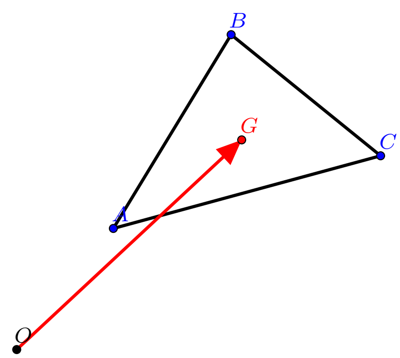
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

Como los lados son todos iguales, entonces los términos de la derecha son iguales, con lo cual concluimos que:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$$

y por lo tanto las diagonales son ortogonales. ■

(b) Grafiquemos la situación tal como se presenta en la figura a continuación:



Diremos que $\mathbf{G}$ representa al centro de gravedad y los vectores de los vértices del triángulo $\triangle ABC$ están representados por los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ respectivamente. Por definición el centro de gravedad se puede entender como aquel punto de en que se concentra toda la masa de la figura, representada en este caso por los vértices.

Como no se considera efecto alguno de la densidad, tenemos que las coordenadas del centro de masa vienen dadas en este caso directamente por el promedio de las posiciones de los vértices, i.e.

$$\mathbf{G}=\frac{1}{3}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}\right)$$

Se desprende adicionalmente de la figura que

$$\overrightarrow{AG}=\mathbf{A}-\mathbf{G}\quad;\quad\overrightarrow{BG}=\mathbf{B}-\mathbf{G}\quad;\quad\overrightarrow{CG}=\mathbf{C}-\mathbf{G}$$

Sumando ambos vectores y reorenando términos se tiene que:

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}-3\mathbf{G}$$

pero de la primera igualdad $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=3\mathbf{G}$, con lo que concluimos que:

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=0$$

demostrando así lo pedido. ■

Problema 3.4: Si $\mathbf{c}=\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{b}+\|\mathbf{b}\|\,\mathbf{a}$ con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ vectores no nulos, muestre que $\mathbf{c}$ bisecta el ángulo entre **a** y **b**.

Solución:

Partamos entendiendo geométricamente esta demostración. Observe que:

$$\|\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{b}\| = \|\|\mathbf{b}\|\,\mathbf{a}\|$$

razón por la cual ambos vectores miden lo mismo. Observe que al sumar ambos vectores generamos un rombo, y es esperable que la diagonal del rombo (el vector **c**), efectivamente bisecte a ambos ángulos.

Queremos demostrar que:

$$\alpha_{ac} = \alpha_{bc}$$

O equivalentemente,

$$\cos(\alpha_{ac}) = \cos(\alpha_{bc})$$

Expresar como coseno esta información nos entrega la ventaja de que ahora podemos reducir la información a los producto puntos de los vectores. En efecto, queremos demostrar que:

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{c}\|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|}$$

Calculamos estos valores a partir de la definición de **c**:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \|\mathbf{a}\|\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{a}\|^2 \to \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{c}\|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{c}\|} + \frac{\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{c}\|}$$

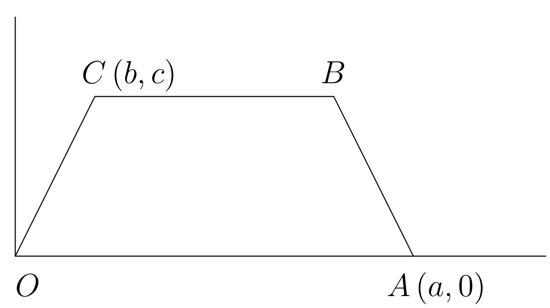
$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{b}\|\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \to \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|} = \frac{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{c}\|} + \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{c}\|}$$

Luego, comprobamos que en efecto

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{c}\|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|}$$

lo cual demuestra así lo pedido. ■

Problema 3.5: Sea $OABC$ un trapecio isósceles con vértice O en el origen, tal como se muestra en la figura a continuación.



(a) Escriba $\overrightarrow{AB}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$.

(b) Determine un punto M sobre el lado BC tal que lo divide en razón $CM : MB = 2 : 1$.

(c) Escriba las ecuaciones vectoriales de las rectas L_{OM} y L_{AC} para determinar su punto de intersección $\mathbf{P}$. ¿En qué proporción divide $\mathbf{P}$ a la diagonal $\overrightarrow{AC}$?

Solución:

(a) Dada la geometría del trapecio, podemos observar inmediatamente que las coordenadas de $\mathbf{B}$ vienen dadas por:

$$\mathbf{B} = \overrightarrow{OB} = (a - b, c)$$

Entonces,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (a - b, c) - (a, 0) = (-b, c)$$

Al escribir la combinación lineal, lo que buscamos son constantes α y β tales que

$$(-b, c) = \alpha\,(a, 0) + \beta\,(b, c)$$

Entonces, debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b &= -b \\ \beta c &= c \end{aligned}$$

donde α y β son las incógnitas y a, b y c parámetros, razón por la cual α y β **sí pueden quedar en términos de a, b y c.** Se sigue que $\beta = 1$ y por lo tanto

$$\alpha = -\frac{2b}{a}$$

Conlcuimos entonces que:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = -\frac{2b}{a}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}$$

(b) El punto $\mathbf{M} = \overrightarrow{OM}$ se puede escribir como $\overrightarrow{OM} = (m, c)$ con $b < m < a - b$ y coordenada $y = c$ para encontrarse efectivamente en el segmento $\overrightarrow{BC}$. Se busca que:

$$\frac{CM}{MB} = \frac{2}{1} \to \frac{m - b}{a - b - m} = 2$$

Despejando m, nuestra incógnita:

$$m - b = 2a - 2b - 2m \to 3m = 2a - b \to \boxed{m = \frac{2a - b}{3}}$$

Por lo tanto, el punto buscado es:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \left(\frac{2a - b}{3}, c\right)}$$

Esto se puede resolver también vectorialmente, pues:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

y obtenemos así exactamente el mismo resultado.

(c) La ecuación de la recta L_{OM} requiere un vector posición, que inmediatamente puede ser el origen. El vector dirección puede ser exactamente el mismo vector $\overrightarrow{OM}$. Luego,

$$L_{OM} \,:\, \lambda\left(\frac{2a-b}{3}, c\right)$$

La recta L_{AC} también se sencilla de determinar, pues una posición posible es el vector $\overrightarrow{OA}$ y la dirección viene dada por $\overrightarrow{AC}$, con lo cual:

$$L_{AC} \,:\, \overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} b-a \\ c \end{pmatrix}$$

El punto de intersección viene dado por los parámetros λ y μ (a determinar) en los cuales las coordenadsa x e y son iguales. Por lo tanto, tenemos que resolver para λ y μ el sistema:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2a-b}{3}\right)\lambda &= \mu\,(b-a) + a \\ c\lambda &= c\mu \end{aligned}$$

De la primera ecuación obtenemos que $\mu = \lambda$, entonces:

$$\left(\frac{2a-b-3b+3a}{3}\right)\lambda = a \to \boxed{\bar{\lambda} = \bar{\mu} = \frac{3a}{5a-4b}}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\mathbf{P} = \overrightarrow{OP} = \left(\frac{2a-b}{5a-4b}a, \frac{3ac}{5a-4b}\right)}$$

Buscamos ahora el valor de

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PC} &= \frac{\left\|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{OA} + \bar{\mu}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OA}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OA} + \bar{\mu}\overrightarrow{AC} - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\right)\right\|} \\ &= \frac{\left\|\bar{\mu}\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|(\bar{\mu}-1)\,\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{\bar{\mu}}{|\bar{\mu}-1|} \quad \text{pues } \left\|\overrightarrow{AC} \neq 0\right\| \end{aligned}$$

Reemplazando con los valores de $\bar{\mu}$ se llega al resultado. Para compactar notación concluimos que:

$$\boxed{\frac{AP}{PC} = \frac{\bar{\mu}}{1-\bar{\mu}}}$$

Problema 3.6: Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores en $\mathbb{R}^3$:

(a) Pruebe la Desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \geq |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$$

(b) Con ello, pruebe la Desigualdad Triangular

$$\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$$

(c) Demuestre e interprete geométricamente la Ley del Paralelógramo:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2$$

Solución:

(a) Esta demostración es clásica en Álgebra Lineal y Cálculo Vectorial, puesto que es la desigualdad que nos permite construir la geometría de cualquier espacio métrico. Esta demostración se realiza considerando un vector y la ponderación de otro cualquiera. La diferencia entre estos dos vectores sigue siendo positiva, i.e.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 - 2\alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \alpha^2 \|\mathbf{b}\|^2\end{aligned}$$

Como la norma es siempre positiva, se cumple que:

$$\|\mathbf{a}\|^2 - 2\alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \alpha^2 \|\mathbf{b}\|^2 \geq 0$$

Desde la perspectiva de α, esta es una parábola que se abre hacia arriba pues $\|\mathbf{b}\|^2 > 0$ para todo $\mathbf{b}$ no nulo. Entonces se sigue que la parábola, función de α, debe tener a lo más una raíz o ninguna, i.e.

$$\Delta(\alpha) = 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - 4\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \leq 0$$

Entonces se sigue que

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2$$

Como la norma es siempre positiva, concluimos que:

$$-\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \to \boxed{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

La igualdad a cero solo se alcanza cuando $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ (y por lo tanto son vectores paralelos), lo cual se puede obtener de forma sencilla reemplazando en la igualdad final. ■

(b) La Desigualdad Triangular es una de las consecuencias directas del resultado anterior, en cuanto nos permite generar el concepto de distancia euclideana. Tenemos que:

$$(\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2$$

Como $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$, entonces

$$\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 \geq \|\mathbf{a}\|^2 + 2|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| + \|\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2$$

Se sigue que:

$$(\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2 \geq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2$$

Como ambas expresiones son positivas se concluye que:

$$\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \quad \blacksquare$$

Observe que la igualdad evidentemente se alcanza cuando $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ con $\alpha > 0$, i.e. los vectores son paralelos.

(c) Observe que esto se demuestra de la misma forma que como se demostraría para a y b escalares, dado que el álgebra que define el producto punto es análoga al álgebra escalar. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2 \\ \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$

Sumando se llega inmediatamente al resultado pedido pues los términos $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ se cancelan. Existe más de una forma de demostrarlo, por ejemplo también tenemos que:

$$\|(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + (\mathbf{a}-\mathbf{b})\|^2 = 4\|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + 2(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2$$

$$\|(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - (\mathbf{a}-\mathbf{b})\|^2 = 4\|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - 2(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2$$

Sumando ambas igualdades:

$$4\|\mathbf{a}\|^2 + 4\|\mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + 2\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2$$

Entonces,

$$2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 \quad \blacksquare$$

Observe que un paralelógramo puede ser completamente descrito por solamente dos vectores, puesto que dados $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, los lados adicionales son paralelos a estos dos vectores. Sabemos adicionalmente que lados paralelos tienen la misma longitud en un paralelógramo y que las diagonales del paralelógramo generado vienen dadas por $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Entonces lo que enuncia la Ley del Paralelógramo es que la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

Este hecho se evidencia y se entiende en la primera demostración: al expandir las normas al cuadrado no estamos mas que aplicando la ley del coseno, pues:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\alpha_{ab}$$

donde α_{ab} no es más que el ángulo interior del paralelógramo. La ley indica que al sumar las diagonales estas proyecciones se cancelan, razón por la cual solo quedan los cuadrados de los lados.

Definición: Se define el *producto cruz* o *producto vectorial* entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$ como aquel vector que cumple:

- $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$.
- $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\operatorname{sen}\theta$ con θ el ángulo entre los vectores.
- La dirección queda determinada por la regla de la mano derecha.

Además si $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$ entonces:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{j}}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Propiedades: Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ en $\mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se verifican las siguientes propiedades para la operación $\times$:

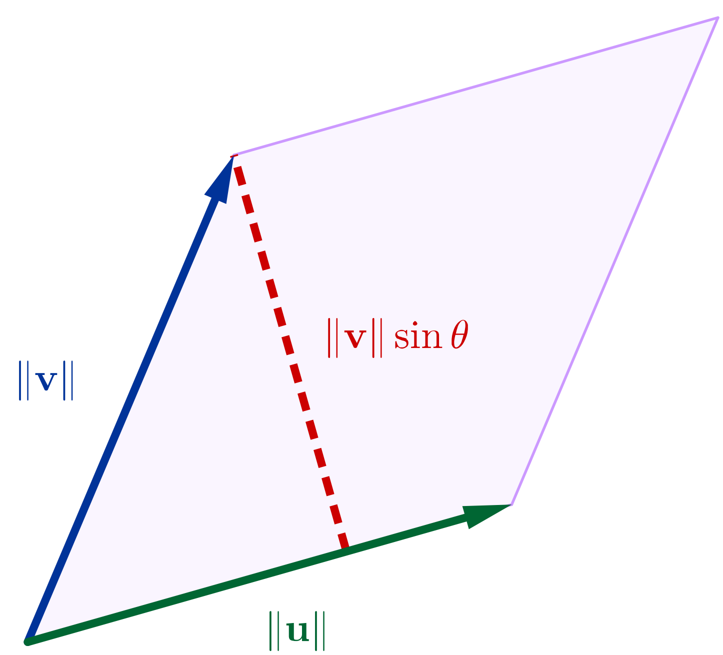
(a) Anticonmutatividad: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

(b) $\lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$.

(c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

(d) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

Observación: Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se puede notar que $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ es exactamente el área del paralelógramo generado entre ambos vectores. Esto se puede corroborar gráficamente de forma sencilla:



Recordando que el área de un paralelógramo viene dada por:

$$A = bh$$

Entonces hacemos $b = \|\mathbf{u}\|$ y $h = \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$, lo cual por definición corresponde exactamente al módulo del producto cruz.

A partir del producto punto y el producto cruz se puede definir una operación entre tres vectores conocida como *producto caja*:

Definición: Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces se define el *producto mixto* o *producto caja* como:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

Por lo tanto, de acuerdo a la definición de ambas operaciones se tiene que:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Podemos deducir una interpretación geométrica similar a la obtenida para el producto cruz.

Observación: $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ corresponde al volumen signado del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Notarlo no es complicado:

$$|[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Sabemos que $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$ corresponde al área del paralelógramo formada por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, que se multiplica por la altura, dada por $|\vec{u}| \cos\theta$ (la proyección del vector $\vec{u}$). El resultado es coherente, obteniendo así la multiplicación del área basal por la altura, que tal como ya sabemos, corresponde al volumen del paralelepípedo en cuestión.

Propiedades: El producto mixto verifica que:

(1) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}]$.

(2) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}]$.

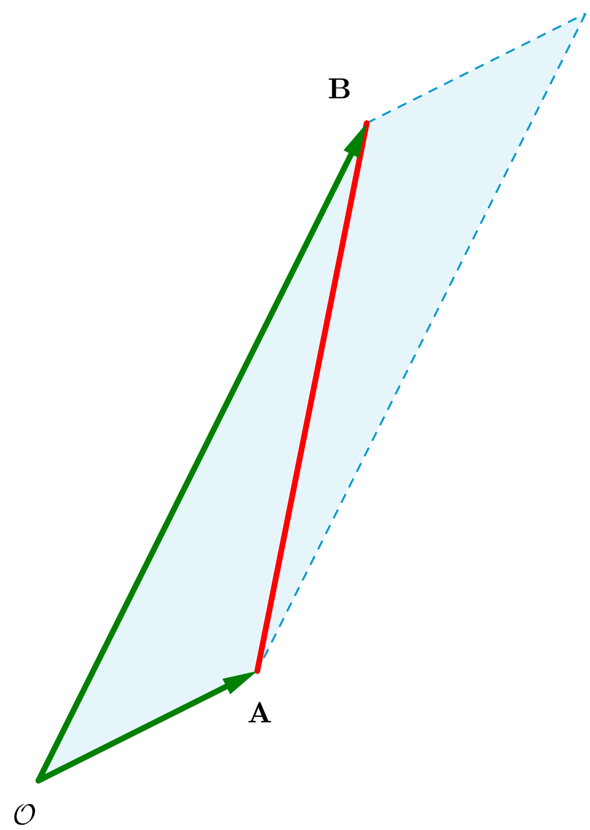
Partiremos revisando en primer lugar una pregunta que permite practicar las interpretaciones geométricas del producto cruz y caja.

Problema 3.7: Dados los vectores $\overrightarrow{OA} = (2, 1, 2)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 6, -2)$, calcule el área del triángulo OAB que generan y encuentre un vector $\overrightarrow{OC}$ tal que el tetraedro $OABC$ tenga un volumen igual a 2.

Ayuda: El volumen de una pirámide es base $\cdot$ altura/3.

Solución:

Grafiquemos en un plano los vectores para comprender mejor la situación:



Se puede notar con facilidad que el área de $\triangle OAB$ es la mitad del área del paralelógramo generador por los vectores, i.e.

$$A_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right\|$$

Reemplazando con los valores del os vectores,

$$\boxed{A_{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{377}}{2}}$$

(b) Sabemos que el volumen de un tetraedro viene dado por el producto caja. Sin embargo, en este caso el área basal no es un paralelógramo si no que una pirámide, por lo cual debemos dividir el volumen por 2 para tomar en consideración la mitad del área basal. Adicionalmente, debemos dividir por 3 para que corresponde al volumen de la pirámide por indicación del enunciado. Es decir,

$$\boxed{V_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left|\left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right| = \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)}$$

que es la fórmula general de un tetraedro. Digamos que $\overrightarrow{OC} = (x,y,z)$ con x,y,z por determinar. Reemplazando en la fórmula,

$$V_p = \frac{1}{6}\left(-14x+10y+9z\right)$$

El volumen debe ser igual a 2, con lo cual

$$-14x+10y+9z = 12$$

Esta es una ecuación con 3 incógnitas, por lo que existen infinitas soluciones. Haciendo $x = z = 0$ obtenemos que un vector posible es:

$$\boxed{\overrightarrow{OC} = \left(0, \frac{6}{5}, 0\right)}$$

Problema 3.8:

(a) Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = (-4, 5, -2)$, $\mathbf{v} = (3, -1, 0)$ y $\mathbf{w} = (5, -9, 4)$ son coplanares.

(b) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ ortogonales tales que $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3}$ y $\|\mathbf{v}\| = 1$. Calcule $\|(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \times (\mathbf{u}-\mathbf{v})\|$.

(c) Determine condiciones sobre k de modo que el paralelepípedo determinado por $\mathbf{u} = (0, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$ y $\mathbf{w} = (k, 7, 0)$ tenga volumen igual a 5.

Solución:

(a) Demostrar que los tres vectores son coplanares significa que existe un plano Π para el cual los tres vectores pertenecen a dicho plano. Se sigue entonces que el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores debe ser nulo, pues en caso contrario los vectores no estarían contenidos en el mismo plano. Es decir, debe cumplirse que:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$$

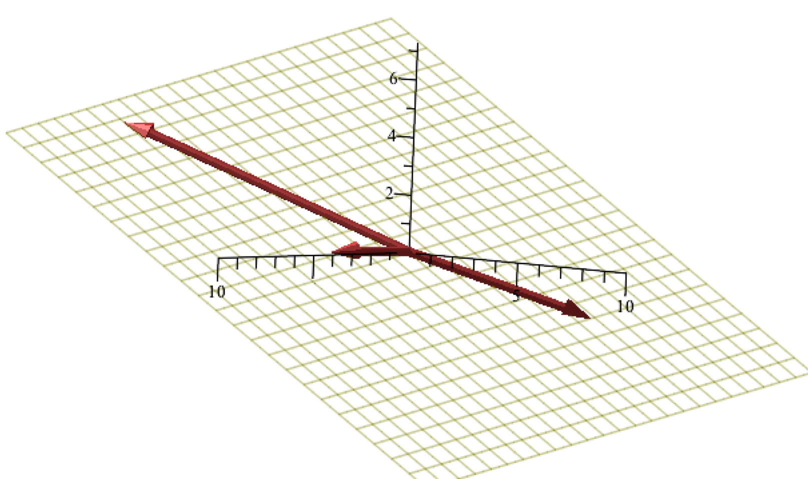
o bien para cualquiera de las variantes del producto caja. Tenemos que:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 16 - 60 + 44 = 0$$

Por lo tanto, son efectivamente coplanares. ■ Graficamos la situación:



(b) No es una buena idea partir resolviendo este problema aplicando la definición de norma del producto cruz, pues:

$$\|(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{u}-\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\alpha_{(u+v)(u-v)}$$

Nada sabemos directamente sobre el valor de estos módulos y ángulos. Por lo tanto, podemos aprovecharnos del hecho que la expresión puede ser simplificada. En efecto,

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\times\mathbf{u}+\mathbf{v}\times\mathbf{u}-\mathbf{u}\times\mathbf{v}-\mathbf{v}\times\mathbf{v}\\ &= 2\,(\mathbf{v}\times\mathbf{u})\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{u}-\mathbf{v})\| &= 2\,\|\mathbf{v}\times\mathbf{u}\|\\ &= 2\,\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\|\operatorname{sen}\alpha_{uv}\end{aligned}$$

Como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, entonces $\operatorname{sen}\alpha_{uv}=1$. Por lo tanto, dado que sabemos el valor de las normas podemos concluir que:

$$\boxed{\|(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{u}-\mathbf{v})\| = 2\sqrt{3}}$$

(c) Se exige que el volumen del paralelepípedo generado por los vectores tenga volumen igual a 5. Por lo que vimos anteriormente sabemos que el volumen del paralelepípedo viene dado por

$$V = |[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]| = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$$

Dado que no es conveniente que aparezca $\mathbf{w}$ en el producto cruz dadas las posibles complicaciones que se pueden generar, cambiamos el orden de las variables en el producto caja para que $\mathbf{w}$ quede fuera del producto punto, i.e.

$$V = |\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|$$

Ahora calculamos:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$$

Luego,

$$V = |-3k+28|$$

Buscamos aquellos valores de k tales que el volumen sea 5, i.e.

$$|-3k+28| = 5$$

Resolviendo, separamos en los dos tramos:

$$-3k+28=5 \to \boxed{k=\frac{23}{3}}$$

$$-3k+28=-5 \to \boxed{k=11}$$

Ambas soluciones en efecto satisfacen la ecuación. Concluimos entonces que ambos valores permiten generar el volumen pedido.

Problema 3.9:

(a) Encuentre un vector $\mathbf{v}$ tal que $(1,2,1)\times\mathbf{v}=(3,1,-5)$. ¿Por qué no existe dicho $\mathbf{v}$ para la ecuación $(1,2,1)\times\mathbf{v}=(3,1,5)$?

(b) Si $\mathbf{a}\neq 0$, resuelva el sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\times\mathbf{x} &= \mathbf{a}\times\mathbf{b}\end{aligned}$$

Si $\mathbf{c}$ en $\mathbb{R}^3$ es fijo, ¿puede concluir que $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\to\mathbf{b}=\mathbf{c}$? Justifique.

Solución:

(a) Digamos que $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ donde v_1, v_2 y v_3 son las incógnitas a determinar. Existen dos caminos para resolver este problema. El primer es notar que $(3,1,-5)$ tiene que ser perpendicular a $\mathbf{v}$ y de ahí se puede generar una igualdad. La otra forma de resolverlo es aplicando la definición de producto cruz:

$$\begin{aligned}(1,2,1)\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 1 & 2 & 1\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2v_3-v_2\\ v_1-v_3\\ v_2-2v_1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Generamos entonces el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 0 & -5\end{array}\right]$$

el cual se puede resolver incluso de forma algebraica. Multiplicamos por dos la segunda ecuación y la sumamos con la tercera. Luego,

$$\begin{aligned}v_2-2v_3 &= -3\\ 2v_3-v_2 &= 3\end{aligned}$$

Observe que estas ecuaciones son equivalentes, razón por la cual concluimos inmediatamente que la solución del sistema no es única. ¿Tiene esto sentido? En efecto sí, pues si tomamos un vector tal que multiplicado por $(1,2,1)$ de como resultado el vector $(3,1,-5)$, entonces podemos conservar la norma de ese mismo vector y rotarlo en torno al plano que contiene a ambos vectores $\mathbf{v}$ y $(1,2,1)$, obteniendo de esta forma siempre como resultado el vector $(3,1,-5)$.

Decimos entonces que $v_2=2v_3-3$ y $v_1=1+v_3$. Haciendo por ejemplo $v_3=0$, con lo cual un vector (de infinitos posibles) que cumple la condición es:

$$\boxed{\mathbf{v}=(1,-3,0)}$$

Por otra parte, observe que por definición si un vector $\mathbf{u}$ cumple que:

$$\mathbf{u}=(1,2,1)\times\mathbf{v}$$

entonces por definición de producto cruz $\mathbf{u}$ es perpendicular a $(1,2,2)$ y a $\mathbf{v}$. Sin embargo, note que $(1,2,1)$ no es perpendicular a $(3,1,5)$, pues

$$(1,2,1)\cdot(3,1,5) = 3+2+5 \neq 0$$

Por lo tanto no puede existir $\mathbf{v}$ que cumpla esta condición.

(b) Restando $\mathbf{b}$ a ambos ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{b}) &= 0\\ \mathbf{a}\times(\mathbf{x}-\mathbf{b}) &= 0\end{aligned}$$

Esto nos hace conjeturar que efectivamente $\mathbf{x}-\mathbf{b}=0$. Supongamos que no fuera así. Entonces, $\mathbf{x}-\mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$. Este resultado es inmediatamente una contradicción pues en dicho caso $\mathbf{x}-\mathbf{b}$ no tiene cómo ser paralelo a $\mathbf{a}$. Luego, el único vector que cumple la condición para $\mathbf{a}$ es $\mathbf{x}-\mathbf{b}=0$. Es decir,

$$\boxed{\mathbf{x}=\mathbf{b}}$$

Es evidente que cada una de estas condiciones por separado no impone la restricción de ser cero al vector. En efecto, digamos que existe $\mathbf{c}$ tal que para $\mathbf{a}$ fijo se cumple que:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

Se sigue que

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = 0$$

Entonces, $\mathbf{a}$ es **paralelo** a $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ y por lo tanto existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{c}-\mathbf{b}) \to \mathbf{c} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{a}-\mathbf{b}$$

Es evidente que los vectores no tienen por qué ser necesariamente los mismos. Se desprende el mismo resultado para el producto punto.

Problema 3.10: Demuestre las siguientes identidades vectoriales:

(a) $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$.

(b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0 \longrightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

(c) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$.

(d) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$.

(e) $\mathbf{a}\times[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))] = [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}]$.

(f) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})] = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2$.

Solución:

(a) Partiremos del lado izquierdo para obtener la igualdad del lado derecho. En particular, demostraremos esto a partir de la definición de la norma de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \alpha_{ab} \rightarrow \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_{ab}$$

Para lograr obtener el producto punto es necesario recordar que este está asociado al coseno del ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Esto lo podemos lograr mediante la identidad:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha_{ab} = 1 - \cos^2 \alpha_{ab}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \left(1 - \cos^2 \alpha_{ab}\right) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \cos^2 \alpha_{ab} \end{aligned}$$

Sabemos que la relación entre el producto punto y el coseno viene dada por:

$$\cos \alpha_{ab} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Reemplazando obtenemos finalmente:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

demostrando así lo pedido. ∎

(b) Asumiremos que se cumple la hipótesis. Es decir, asumimos que se cumple que $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. Tenemos que utilizar esta información para demostrar lo pedido utilizando las propiedades del producto cruz. En efecto, para demostrar la primera igualdad hacemos

$$\mathbf{c} = -(\mathbf{b} + \mathbf{a})$$

con lo cual

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} + \mathbf{a}) = -\mathbf{b} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Pero como $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}$ son vectores paralelos (y de hecho coincidentes), entonces se cumple que:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{b} = 0$$

Adicionalmente, de la ley de anticonmutatividad para el producto cruz:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

con lo cual se sigue que

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Ahora demostraremos que $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, lo cual a su vez por transitividad demostrará la igualdad entre el primer y el tercer miembro. Hacemos ahora:

$$\mathbf{b} = -(\mathbf{c} + \mathbf{a})$$

de modo que:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\times\mathbf{c} &= -(\mathbf{c}+\mathbf{a})\times\mathbf{c}\\ &= -\mathbf{c}\times\mathbf{c}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}\end{aligned}$$

Aplicando nuevamente las mismas propiedades tenemos que:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0 \longrightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$$

demostrando así lo pedido. ■

(c) Esta propiedad es en efecto muy importante y se recomienda su memorización. Esto se debe a que es una de las pocas identidades que plantea una conexión entre el producto cruz y el producto punto, los productos vectoriales disponibles en $\mathbb{R}^3$.

Si bien existe una demostración geométrica para comprender esta demostración, lo realizaremos de forma sistemática expandiendo la expresión de la izquierda. De esta forma se tiene que:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\mathbf{a}\times\begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\ b_3c_1-b_1c_3\\ b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix}$$

Expandiendo nuevamente ahora al realizar la multiplicación con $\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1\end{vmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3\\ \cdots\\ \cdots\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Realizaremos la demostración solamente en la primera componente pues el procedimiento para las restantes es análogo. Buscamos demostrar que:

$$a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\,b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\,c_1$$

Esto es sencillo realizarlo reagrupando a conveniencia los términos de la izquierda:

$$a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3=(a_2c_2+a_3c_3)\,b_1-(a_2b_2+a_3b_3)\,c_1$$

Sumando y restando $a_1c_1b_1$ al lado derecho de la igualdad anterior generamos exactamente los producto puntos buscados:

$$a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,b_1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,c_1$$

Realizando el mismo procedimiento se obtienen resultados similares para las otras dos componentes. Esto es prueba suficiente para demostrar que:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} \quad ■$$

En los ejercicios siguientes asumiremos comprendida y demostrada esta propiedad para realizar los desarrollos.

(d) Utilizando la propiedad anterior esta demostración es trivial, pues:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}+(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}\\ &= 0\end{aligned}$$

pues todos los términos se cancelan. ■

(e) Dado lo compleja de esta demostración, simplificaremos ambos lados de la igualdad y luego comprobaremos que en efecto son iguales. Realizaremos la agrupación esta vez desde el lado izquierdo para compactar notación, notando que:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}]=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,[\mathbf{a}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})]\rightarrow(1)$$

Ahora aplicamos la propiedad vista en (c) al lado derecho de la demostración. Para ello podemos hacer

$$\mathbf{u}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

con lo cual

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})) &= \mathbf{u}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{u})\\ &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{a}-(\mathbf{u}\times\mathbf{a})\,\mathbf{u}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))] &= \mathbf{a}\times[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{a}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{u}]\\ &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\cancel{\mathbf{a}\times\mathbf{a}}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}\times\mathbf{u}\\ &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{u}\times\mathbf{a}\\ &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}\rightarrow(2)\end{aligned}$$

Observe que el producto punto genera un escalar, y el doble producto punto un vector. Ahora bien, solo nos falta demostrar que esta última expresión es igual a $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,[\mathbf{a}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})]$ para demostrar así lo pedido. Esto se logra trabajando el doble producto cruz en la expresión anterior. En efecto, utilizando la propiedad de anticonmutatividad:

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a} &= -\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=--\,\mathbf{a}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\\ &= \mathbf{a}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\end{aligned}$$

Con ello,

$$(1)\leftarrow\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,[\mathbf{a}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})]\rightarrow(2)$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\mathbf{a}\times[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))]=[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}]\quad\blacksquare$$

(f) Trabajaremos la expresión de la izquierda para obtener la expresión de la derecha. Dado que $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ aparece multiplicado a un producto punto, puede ser una buena idea tenerlo afuera del término en la izquierda. Esto lo podemos solucionar notando que esta expresión no es otra que el producto caja entre tres vectores, y estos satisfacen la propiedad:

$$[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]=[\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}]=[\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}]$$

Entonces se sigue que:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]$$

Ahora bien, podemos hacer $\mathbf{u}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ y aplicar la propiedad vista en (c):

$$\begin{aligned}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}\\ &= [(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}]\,\mathbf{a}-[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}]\,\mathbf{b}\end{aligned}$$

pero $(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0$ pues por definición $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$. Entonces,

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})] &= (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\underbrace{[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}]}_{\text{escalar}}\,\mathbf{a}\leftarrow\text{reordenamos}\\ &= [\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]\,[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\end{aligned}$$

Como $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ es el producto caja de los vectores, entonces $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. De esta forma concluimos que:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2$$

y así hemos demostrado lo pedido. ■

Problema 3.11: Demuestre que:

$$[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,,(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,,(\mathbf{c}+\mathbf{d})]=[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$$

Solución:

Expandiendo el lado derecho,

$$\begin{aligned}[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,,(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,,(\mathbf{c}+\mathbf{a})] &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})]\\ &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\cancel{\mathbf{c}\times\mathbf{c}}+\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}]\\ &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})+(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\end{aligned}$$

Expandimos aún más por distributividad:

$$\begin{aligned}[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,,(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,,(\mathbf{c}+\mathbf{a})] &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\cancel{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}+\cancel{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}+\cancel{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})}+\cdots\\ &\quad \cancel{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\end{aligned}$$

Observe que los términos cancelados son nulos pues por definición un vector es ortogonal al producto cruz de él con otro vector. Asimismo, ya demostramos que:

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,,(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,,(\mathbf{c}+\mathbf{a})] &= 2\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\\ &= 2\,[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\end{aligned}$$

demostrando así lo pedido. ■

Problema 3.12: [**Propuesto**] Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Se define el Determinante de Gramm de estos vectores, denotado por $\Gamma(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ como el determinante de la matriz simétrica $\mathbf{A}_{n\times n} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ donde $a_{ij} = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j$. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, entonces demuestre que

$$|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = \sqrt{\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}$$

Ayuda: $\det(\mathbf{A})^2 = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^t)$.

3.2. Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

Una **recta** es un conjunto unidimensional cuya dirección es constante en todo el espacio. En $\mathbb{R}^3$ se puede representar por medio de las siguientes parametrizaciones:

- **Ecuación vectorial:** Una recta que pasa por los puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se puede representar como:

$$\mathcal{L} \,:\, \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t \quad t \in \mathbb{R}$$

  O análogamente $\mathbf{p} + t\mathbf{d}$ donde $\mathbf{p}$ es el punto y $\mathbf{d}$ es el vector dirección.

- **Ecuación paramétrica:** De la ecuación anterior se tiene que:

$$\mathbf{x} \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

  De donde se desprende que la recta se puede representar por:

$$\mathcal{L} \,:\, \begin{cases} x_1(t) = p_1 + td_1 \\ x_2(t) = p_2 + td_2 \\ x_3(t) = p_3 + td_3 \end{cases}$$

- **Ecuación cartesiana:** Igualando el parámetro:

$$\frac{x_1 - p_1}{d_1} = \frac{x_2 - p_2}{d_2} = \frac{x_3 - p_3}{d_3}$$

  Entonces de esta ecuación puede obtener por inspección que la dirección de la recta se asocia a los coeficientes de los denominadores y los vectores posición a los términos sumados/restados en los numeradores.

Un **plano** es un conjunto bidimensional cuya normal es constante en todo el espacio. En $\mathbb{R}^3$ se puede expresar mediante las mismas parametrizaciones:

- **Ecuación vectorial:** Un plano se puede caracterizar por un vector normal y un punto que pertenece a él. Luego, la diferencia de cualquier punto debe ser ortogonal a la normal:

$$\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, : \, \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0\}$$

De aquí se sigue que se tiene que verificar que:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$$

donde $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = d$ que es un número real fijo. Además notamos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi \iff \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \Longrightarrow n_1 x + n_2 y + n_3 z = c$$

Se toma una variable y se despeja. Por ejemplo, z:

$$z = \frac{c - n_1 x - n_2 y}{n_3}$$

Luego un vector (x, y, z) en el plano se escribe como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dfrac{c - n_1 x - n_2 y}{n_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{c}{n_3} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}$$

Con x e y arbitrarios. Es decir, para $\mathbf{p}$, $\mathbf{s}$ y $\mathbf{d}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ todo plano también se puede representar como:

$$\mathbf{x} \in \Pi \iff \mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{s} + t\mathbf{d} \quad \lambda, t \in \mathbb{R}$$

- **Ecuación paramétrica:** se sigue que:

$$x \in \Pi \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\Pi \, : \, \begin{cases} x(\lambda, t) = p_1 + \lambda s_1 + t d_1 \\ y(\lambda, t) = p_2 + \lambda s_2 + t d_2 \\ z(\lambda, t) = p_3 + \lambda s_3 + t d_3 \end{cases}$$

- **Ecuación cartesiana:** de la ecuación normal es directo:

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d$$

con $d = n \cdot p$.

El primer ejercicio que haremos es conceptual, y guarda relación con medir las distancias entre los conjuntos anteriormente definidos. Se recomienda comprender todas las representaciones anteriores, como identificar las direcciones y normales rápidamente a partir de ellas y comprender a cabalidad el siguiente problema, pues deja sentados prácticamente la totalidad de conceptos relevantes en este capítulo.

Problema 3.13: Demuestre las siguientes fórmulas para las distancias entre elementos geométricos:

(a) Distancia punto-recta: $\ell \ : \ \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

$$d\left(\ell, \mathbf{p}\right) = \frac{\left\| \left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}\right) \times \mathbf{d} \right\|}{\left\| \mathbf{d} \right\|}$$

(b) Distancia punto-plano: $\Pi = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left(\mathbf{x} - \mathbf{p}\right) \cdot \mathbf{n} = 0 \right\}$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

$$d\left(\Pi, \mathbf{x}_0\right) = \frac{\left| \left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}\right) \cdot \mathbf{n} \right|}{\left\| \mathbf{n} \right\|} = \frac{\left| a x_0 + b y_0 + c z_0 - d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(c) Distancia entre rectas alabeadas: $\ell_1 \ : \ \mathbf{p}_1 + \lambda \mathbf{d}_1$, $\ell_2 \ : \ \mathbf{p}_2 + \mu \mathbf{d}_2$.

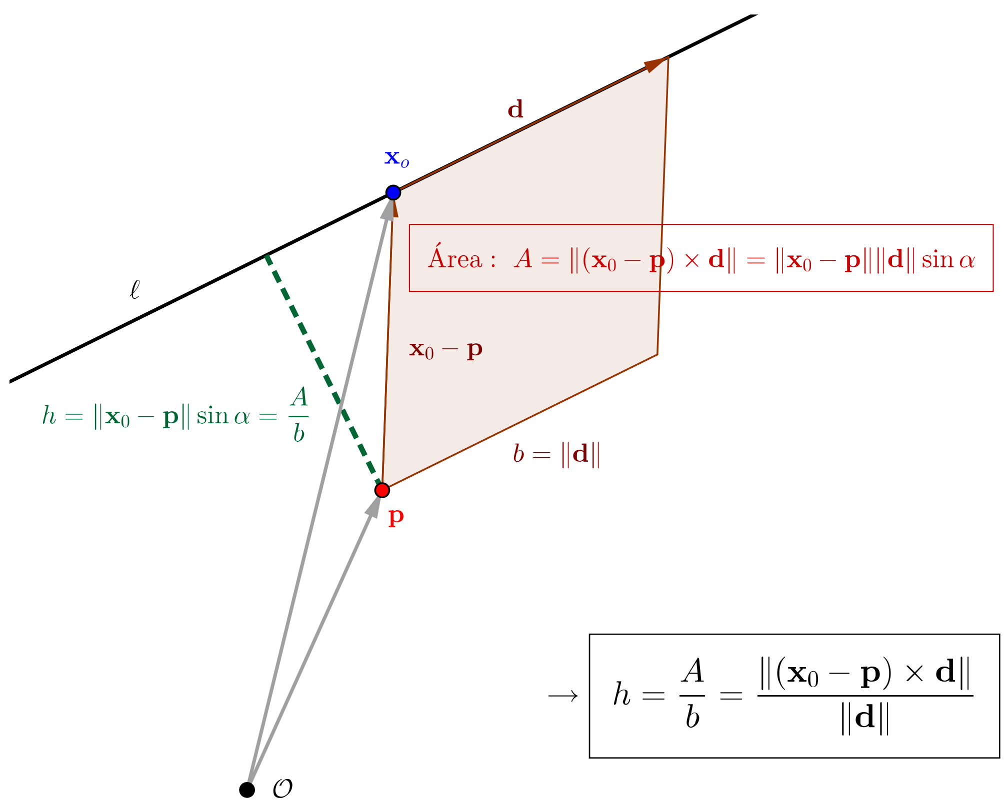
$$d\left(\ell_1, \ell_2\right) = \frac{\left| \left[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \right] \right|}{\left\| \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 \right\|}$$

(d) ¿Cómo calcularía la distancia recta-plano y plano-plano?

Solución:

(a) Podemos comprender la situación adecuadamente graficándola. Hay que tener muy claro que la idea es expresar la distancia entre el punto y la recta a partir de los elementos geométricos que disponemos de la recta: un punto arbitrario $\mathbf{x}_0$ en ella, la dirección $\mathbf{d}$ y el punto $\mathbf{p}$ con la distancia a medir.

Graficando:



$$\rightarrow \boxed{h = \frac{A}{b} = \frac{\left\| \left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}\right) \times \mathbf{d} \right\|}{\left\| \mathbf{d} \right\|}}$$

Observe que con los vectores $\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}$ y $\mathbf{d}$ se genera un paralelógramo cuya área es $\|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) \times \mathbf{d}\|$ tomando en consideración lo estudiado sobre el producto cruz. Geométricamente sabemos el área de este paralelógramo puede calcularse como la base por su altura. En este caso, de la gráfica se observa que la base es $\|\mathbf{d}\|$ y la altura coincide con la distancia entre el punto y la recta, que es lo que deseamos medir.

Luego,

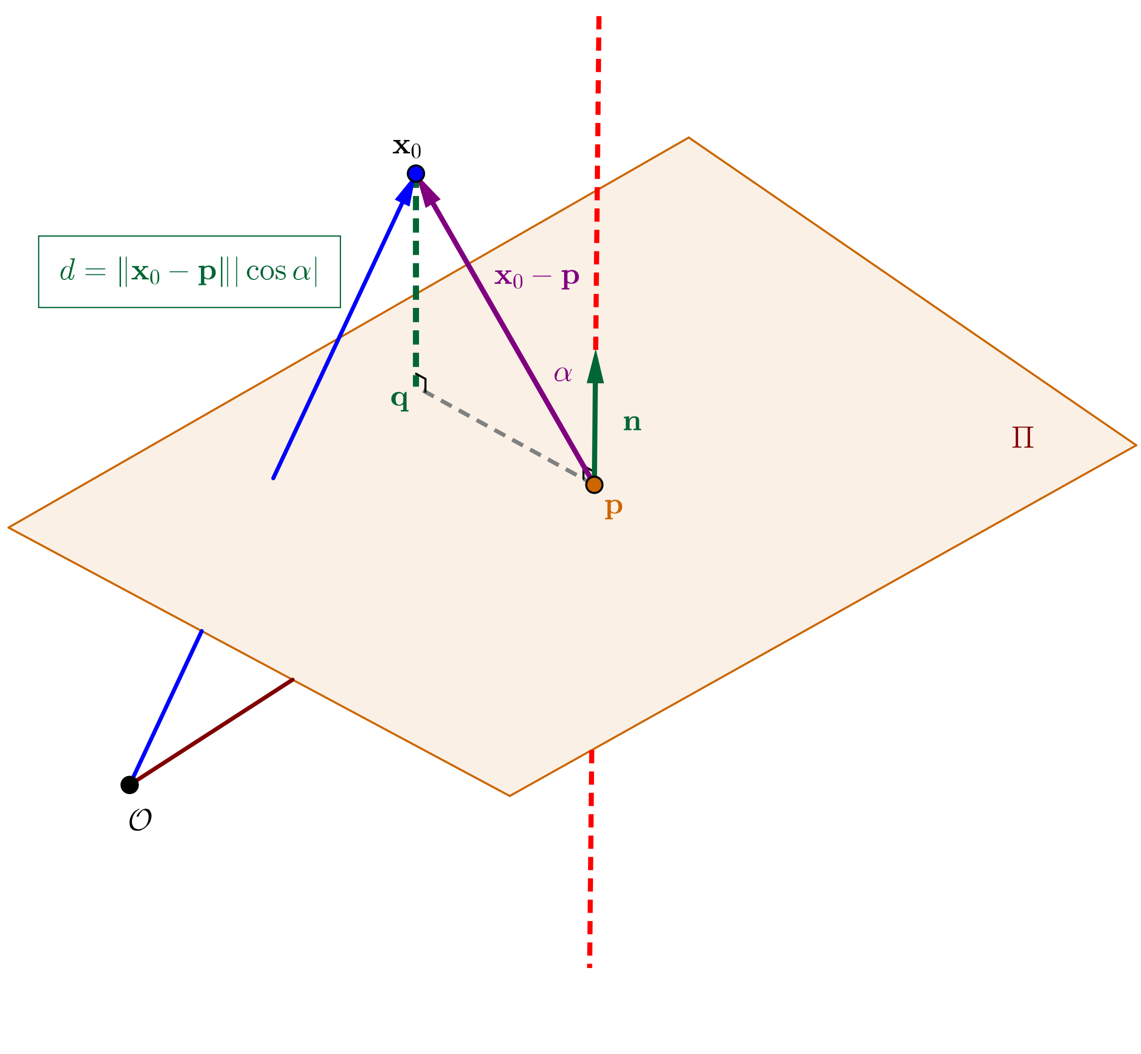
$$h = \frac{A}{b} = \frac{\|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) \times \mathbf{d}\|}{\|\mathbf{d}\|}$$

Entonces,

$$\boxed{d\left(\mathbf{x}_0, \ell\right) = h = \frac{\|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) \times \mathbf{d}\|}{\|\mathbf{d}\|}}$$

Asimismo, observe que si $\mathbf{p} \in \ell$, entonces $\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}$ es una dirección de la recta y por lo tanto el numerador de la dirección se anula al anularse el producto cruz. Es decir, en este caso la distancia es cero, lo cual es un resultado coherente con lo esperado. ■

(b) Procedemos por analogía graficando la situación. Sin embargo, en este caso para la expresión solamente disponemos de $\mathbf{p}$, el punto en el plano $\mathbf{x}_0$ y la normal $\mathbf{n}$. Graficando un plano cualquiera y los vectores en cuestión:



Observe que si tomamos la norma de $\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}$ y la proyectamos en la dirección de la normal obtendremos la medida de la distancia que deseamos, como se puede comprobar a partir de la gráfica. En particular, por simple trigonometría:

$$d(\mathbf{p}, \Pi) = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}\| \, |\cos\alpha|$$

Recordando que:

$$|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}| = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}\| \, \|\mathbf{n}\| \, |\cos\alpha|$$

Entonces si dividimos este resultado por $\|\mathbf{n}\|$ obtenemos lo que se desea medir. Finalmente,

$$\boxed{d(\mathbf{p}, \Pi) = \frac{|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}}$$

Tomamos el módulo para descartar la eventualidad de que el producto punto de negativo, lo cual es un resultado incoherente con la medida geométrica que deseamos calcular.

Supongamos que tenemos la ecuación cartesiana del plano, i.e. $ax + by + cz = d$ y el punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ al cual se le desea medir la distancia al plano. Entonces de la fórmula anterior, podemos expandir:

$$d(\mathbf{x}_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Recordamos que como $\mathbf{p} \in \Pi$, entonces $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = d$ por las definiciones ya realizadas. Entonces,

$$\boxed{d(\mathbf{x}_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + b_y + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

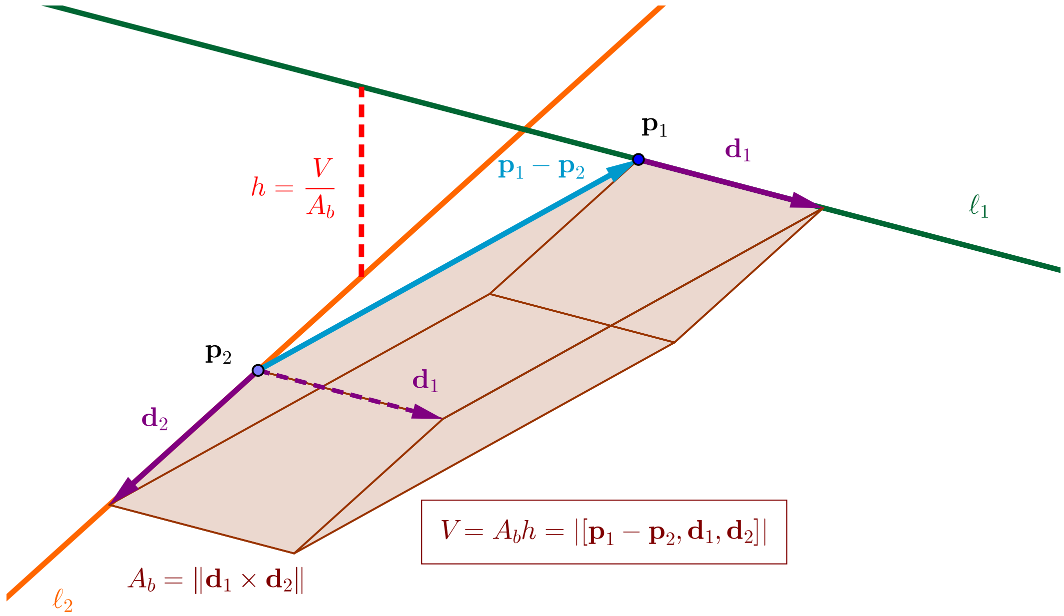
la cual es otra representación correcta para medir la distancia entre un punto y un plano.

Finalmente, si $\mathbf{x}_0 \in \Pi$, entonces $\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}$ es una dirección en el plano y por lo tanto debe ser ortogonal a la norma, i.e.

$$(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0 \to d(\mathbf{x}_0, \Pi) = 0,$$

lo cual nuevamente es un resultado coherente. ■

(c) Graficando la situación obtenemos una figura como la que se presenta a continuación. En este caso, debemos expresar el resultado solo en términos de $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$.



$$\rightarrow \boxed{h = \frac{V}{A_b} = \frac{|[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]|}{\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|}}$$

Supongamos que las rectas no son paralelas ni se cortan. Si proyectamos $\mathbf{d}_1$ en el punto $\mathbf{p}_2$, se puede observar que los vectores $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ forman un paralelepípedo. Sabemos que el volumen de un paralelepípedo viene geométricamente dado por:

$$V = A_{\text{basal}} h$$

Por inspección se puede notar que la base corresponde al paralelógramo generado por los vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$, cuya área es $\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|$. Asimismo sabemos que el volumen del paralelepípedo generado por estos tres vectores es:

$$V = |[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]|$$

Es decir,

$$h = \frac{V}{A_{\text{basal}}} = \frac{|[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]|}{\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|}$$

La última observación que debe realizarse es que esta altura coincide coincide con la distancia entre ambas rectas. Esto se comprueba pensando que h representa la distancia entre las tapas del paralelepípedo, cuyos bordes coinciden con las rectas. Luego, h debe ser la distancia entre las rectas alabeadas. Finalmente,

$$\boxed{d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]|}{\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|}}$$

Si las rectas se intersectan, podemos notar que $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son coplanarse (use la figura para imaginarse esta situación). Luego, el producto caja es cero y por lo tanto la distancia entre las rectas también, como podría esperarse.

(d) Estos no son más que casos particulares de las fórmulas anteriores.

- **Distancia recta−plano:** Si se intersectan la distancia es cero. La recta y el plano no se intersectarán siempre y cuando $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \neq 0$ (la dirección de la recta debe ser una dirección del plano) y $(\mathbf{p}_\ell - \mathbf{p}_\Pi) \cdot \mathbf{n} \neq 0$ (la recta no está contenida en el plano). Si no se intersectan basta tomar un punto de la recta y medir la distancia punto−plano o bien tomar un punto del plano y medir la distancia punto−recta.

- **Distancia plano−plano:** Nuevamente, si los planos se intersectan la distancia entre ellos es cero. Para que no se intersecten deberá pasar que $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 0$ (es decir, que los planos sean paralelos) y que $(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{n}_1 \neq 0$ (si se trata del mismo plano, $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ será una dirección en el plano). Si son paralelos, basta tomar un punto de un plano y tomar la distancia punto−plano respecto al otro.

Una tipología de problemas básicas es ser capaz de parametrizar rectas adecuadamente a partir de ciertas condiciones que esta debe cumplir.

Problema 3.14: Encuentre la representación vectorial, paramétrica y simétrica para las siguientes rectas:

(a) Que pasa por $(1, -1, 1)$ y es paralela a la recta

$$x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$$

(b) La intersección de los planos:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

(c) Que pasa por el origen y que intersecta perpendicularmente a la recta $x = 3 - 2t$, $y = 3 + 4t$, $z = -5t$.

(d) Que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ y que intersecta perpendicularmente a la recta $x = 1 + t$, $y = 1 - 2t$, $z = 2t$.

(e) Que yace en el plano $x - y + z = 7$, contiene al punto $(7, 0, 0)$ y que intersecta perpendicularmente a la recta con ecuaciones $x = t$, $y = 1 - t$ y $z = 2 + t$.

Solución:

(a) Digamos que ambas tres igualdades deben ser iguales a un parámetro λ, i.e.

$$x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3 = \lambda$$

De aquí se sigue que:

$$x + 2 = \lambda \to x = -2 + \lambda$$

$$\frac{1}{2}y = \lambda \to y = 0 + 2\lambda$$

$$z - 3 = \lambda \to z = 3 + \lambda$$

Es decir, vectorialmente:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Que es exactamente la ecuación vectorial. La representación cartesiana en este caso corresponde a la intersección de dos planos, i.e. un sistema de 2×2. Sacamos dos ecuaciones de la ecuación simétrica. De la primera igualdad:

$$x + 2 = \frac{1}{2}y \to 2x - y + 4 = 0$$

Igualando el primer y tercer término:

$$x + 2 = z - 3 \to x - z + 5 = 0$$

Finamente, la representación cartesiana es:

$$\boxed{\Pi : \begin{cases} 2x - y + 4 & = 0 \\ x - z + 5 & = 0 \end{cases}}$$

(b) En este caso tenemos las ecuaciones cartesianas, dadas por el sistema de 2×2:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

Restando la segunda a la primera componente,

$$3y + 2z = 0 \to z = -\frac{2}{3}y$$

Reemplazando en la segunda ecuación $x - y - \frac{2}{3}y = 1$. Despejando de aquí:

$$x = 1 + \frac{5}{3}y$$

También era posible despejar en función de x y z, ambas representaciones igualmente válidas. De aquí se obtiene la representación vectorial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{y}{3}}_{\lambda} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Que es la ecuación vectorial buscada. Para obtener la ecuación simétrica despejamos el parámetro en las ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 + 5\lambda \to \lambda = \frac{x - 1}{5}$$

$$y = 3\lambda \to \lambda = \frac{y}{3}$$

$$z = -2\lambda \to \lambda = -\frac{z}{2}$$

Igualando los parámetros en función de cada letra:

$$\boxed{\frac{x-1}{5} = \frac{y}{3} = -\frac{z}{2}}$$

que es finalmente la representación simétrica.

(c) Al pasar por el origen conocemos inmediatamente un punto de la recta. Es decir, $\mathbf{p} = (0,0,0)$. Asimismo, notamos por inspección que la dirección de la otra recta es $\mathbf{d'} = (-2,4,-5)$.

Digamos que ambas rectas se cortan en un punto $\mathbf{p}^*$. Entonces

Para que la recta buscada sea perpendicular a la mencionada, entonces sus direcciones deben ser perpendiculares. Es decir, buscamos $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ tal que

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d'} = 0 \to -2d_1 + 4d_2 - 5d_3 = 0$$

Adicionalmente, las dos rectas deben intersectarse, con lo cual deberá cumplirse la igualdad:

$$(3,3,0) + \lambda\,(-2,4,-5) = (0,0,0) + \mu\,(d_1, d_2, d_3)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} 3 - 2\lambda &= \mu d_1 \\ 3 + 4\lambda &= \mu d_2 \\ 0 - 5\lambda &= \mu d_3 \end{aligned}$$

Con esto generamos un sistema de 4 ecuaciones y 5 incógnitas, $d_1, d_2, d_3, \mu, \lambda$. Digamos por ejemplo que $\mu = 1$ de forma arbitraria para deshacernos del grado de libertad. Entonces,

$$d_1 = 3 - 2\lambda \quad ; \quad d_2 = 3 + 4\lambda \quad ; \quad -5\lambda = \mu d_3$$

Reemplazando en la primera ecuación,

$$-6 + 4\lambda + 12 + 16\lambda + 25\lambda = 0 \to 45\lambda = -6 \to \lambda = -\frac{2}{15}$$

Luego,

$$d_1 = \frac{45+4}{15} = \frac{49}{15}$$
$$d_2 = \frac{45-8}{15} = \frac{37}{15}$$
$$d_3 = \frac{10}{15}$$

Entonces una dirección posible para la recta es $(49, 37, 10)$. Es decir, la ecuación vectorial paramétrica es:

$$\boxed{\ell \,:\, (0,0,0) + \lambda\,(49,37,10)}$$

Se puede determinar por simple inspección que la ecuación simétrica es:

$$\boxed{\frac{x}{49} = \frac{y}{37} = \frac{z}{10}}$$

Haciendo igualdades cruzadas:

$$\begin{aligned} 37x - 49y &= 0 \\ 10x - 49z &= 0 \end{aligned}$$

Obteniendo así los tres resultados pedidos.

(d) Digamos que buscamos una ecuación de la forma $\mathbf{p} + s\mathbf{d}$ con $\mathbf{p}$ y $\mathbf{d}$ por determinar. En primer lugar la recta debe estar contenida en el plano señalado, por lo cual la dirección $\mathbf{d}$ debe ser una dirección del plano, y que por lo tanto debe ser ortogonal a su normal. Es decir,

$$\mathbf{d} \cdot (1, -1, 1) = 0 \to d_1 - d_2 + d_3 = 0$$

Al contener al punto$(7, 0, 0)$ sabemos inmediatamente el valor de un punto de la recta. Luego, $\mathbf{p} = (7, 0, 0)$.

Finalmente, notamos que la recta de intersección tiene dirección $(1, -1, 1)$. Es decir, esta recta intersectará perpendicularmente al plano $x - y + z = 7$ pues la normal del plano y la dirección son paralelas. Al estar contenida la recta por determinar en el plano tenemos garantizado que la intersección entre ambas rectas será perpendicular, por lo que solo nos resta encontrar $\mathbf{d}$ de modo que efectivamente se intersecten.

En la intersección deberá cumplirse que:

$$(7, 0, 0) + s\,(d_1, d_2, d_3) = (0, 1, 2) + t\,(1, -1, 1)$$

Es decir, se tiene el sistema:

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 + d_3 &= 0 \\ 7 + sd_1 &= t \\ sd_2 &= 1 - t \\ sd_3 &= 2 + t \end{aligned}$$

Hagamos s arbitrariamente 1 para encontrar una de infinitas direcciones de la recta. De aquí se sigue que:

$$d_1 = t - 7 \quad ; \quad d_2 = 1 - t \quad ; \quad d_3 = 2 + t$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$t - 7 + t - 1 + 2 + t = 0 \to 3t = 6 \to t = 2$$

Es decir, una dirección posible es $\mathbf{d} = (-5, -1, 4)$ o bien $\mathbf{d} = (5, 1, -4)$ reescalando a conveniencia. De esta forma, la ecuación paramétrica de la recta es:

$$\boxed{(x, y, z) = (7, 0, 0) + s\,(5, 1, -4)}$$

Mediante el procedimiento algebraico habitual obtenemos casi por inspección la ecuación simétrica:

$$\boxed{\frac{x - 7}{5} = y = -\frac{z}{4}}$$

De aquí se sigue finalmente que las ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{cases} x - 5y - 7 & = 0 \\ 4y + z & = 0 \end{cases}$$

Revisamos la misma tipología de problemas para planos.

Problema 3.15: Encuentre la ecuación vectorial y paramétrica para los siguientes planos:

(a) El plano que pasa por los puntos $(1, 2, 0)$, $(0, 4, 0)$ y el origen.

(b) El plano que pasa por el punto $(-1, 2, 1)$ y que contiene a la recta de intersección de los planos:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

(c) El plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$ y es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.

(d) Los planos paralelos al plano $x + 2y - z = 1$ y se encuentran a dos unidades de distancia de él.

Solución:

(a) Como primera observación, notemos que el plano pasa por el origen. Supongamos que deseamos determinar el plano en su forma cartesiana:

$$ax + by + cz = d$$

Dado que pasa por el origen, entonces esta ecuación deberá cumplirse para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Es decir,

$$0a + 0b + 0z = d \to \boxed{d = 0}$$

Luego, **para todo plano** que pasa por el origen la ecuación cartesiana es de la forma, $ax+by+cz = 0$.

Realizando un procedimiento análogo para los otros dos puntos:

$$\mathbf{p}_1 = (1, 2, 0) \to a + 2b + 0c = 0 \to a + 2b = 0$$

$$\mathbf{p}_2 = (0, 4, 0) \to 0a + 4b + 0c = 0 \to b = 0$$

Es decir, $a = b = 0$ y c parece ser una variable libre (puede asumir cualquier valor). ¿Es esto un problema? En lo absoluto: al determinar (a, b, c) estamos intentando determinar la normal del plano, y ya sabemos que estas son infinitas para un plano dado. Finalmente, la ecuación queda escrita como:

$$cz = 0 \xrightarrow{c=1} z = 0$$

Por inspección observamos que una normal de este plano es $(0, 0, 1)$ y un punto $(0, 0, 0)$. Luego, la ecuación vectorial es:

$$\boxed{(0, 0, 1) \cdot \left(\mathbf{x} - \vec{0}\right) = 0}$$

Para determinar la ecuación paramétrica simplemente notamos que la solución en $\mathbb{R}^3$ al sistema $z = 0$ es:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Reordenando como conjunto generado:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

que es la ecuación paramétrica del plano.

(b) Nuevamente, digamos que la ecuación a determinar es:

$$ax + by + cz = d$$

Como debe pasar por el punto $(-1, 2, 1)$, entonces:

$$-a + 2b + c = d \to (1)$$

Respecto a la recta, si esta está contenida en el plano a determinar entonces su dirección debe ser ortogonal a la normal. Determinamos entonces la dirección de esta recta. Un método para hacerlo es resolver el sistema de ecuaciones y obtener la forma paramétrica y la otra forma es tomando el producto cruz de las normales de ambos planos que se intersectan.

Hagamos lo primero, pues al hacerlo obtendremos a la vez el vector posición. Sumando ambas ecuaciones de los lpanos:

$$3x + 2z = 3 \to x = 1 - \frac{2}{3}z$$

Reemplazando en la primera ecuación,

$$1 - \frac{2}{3}z + y - z = 2 \to y = 1 + \frac{5}{3}z$$

Entonces, la recta es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Deberá cumplirse entonces que:

- El punto de la recta esté contenido en el plano a buscar, i.e.

$$(1, 1, 0) \in \Pi \to a + b + 0 = d \to (2)$$

- La dirección de la recta sea una dirección del plano. Es decir, debe ser perpendicular a la normal del plano. Por lo tanto,

$$2a - 5b - 3c = 0 \to (3)$$

Entonces, $\mathbf{d}_1 = (2, -5, -3)$ es una dirección del plano. Se puede determinar una segunda dirección en el plano tomando el vector posición de la recta y el ya conocido del plano. En otras palabras,

$$\mathbf{d}_2 = (1, 1, 0) - (-1, 2, 1) = (2, -1, -1)$$

Si ya conocemos dos direcciones, entonces determinar la normal del plano resulta sencillo tomando el producto cruz de estas direcciones:

$$\mathbf{n} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Reescalando a conveniencia, obtenemos que una normal del plano es $(1, -2, 4)$. De la ecuación 1,

$$d = -2 - 8 + 8 = -2$$

Es decir, la ecuación cartesiana del plano es $x - 2y + 4z = -2$. La ecuación vectorial es, dados los resultados:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0}$$

Podemos obtener la ecuación paramétrica despejando la ecuación cartesiana:

$$x = -2 + 2y - 4z$$

Luego, concluimos que la ecuación paramétrica es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(c) Si la recta de intersección de ambos planos está contenida en el plano a determinar, entonces la dirección de la recta es una dirección del plano. Intersectando las rectas,

$$\begin{aligned} x - z &= 1 \\ y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Entonces, $x = 1 + z$ e $y = 3 - 2z$. De esta forma, la dirección de la recta es $\mathbf{d}_1 = (1, -2, 1)$.

Al ser perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$, entonces su normal debe ser perpendicular a la normal del plano buscado. Es decir, $\mathbf{d}_2 = (1, 1, -2)$ debe ser otra dirección del plano buscado. Por lo tanto, una normal viene dada por:

$$\mathbf{n} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Reescalando, obtenemos que una normal es $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$. Dado que el vector posición de la recta, $(1, 3, 0)$ debe estar contenido también en el plano, concluimos que $\mathbf{p} = (1, 3, 0)$. Es decir, la ecuación vectorial del plano buscado es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0}$$

Se sigue que la ecuación cartesiana es $x+y+z=4$. Despejando obtenemos la ecuación paramétrica:

$$x = 4 - y - z$$

Es decir,

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(d) Primero partimos notando que efectivamente son dos planos porque uno estará dos unidades *arriba* del plano dado y otro dos unidades *abajo*. Se dan estas indicaciones en sentido figurado porque no hemos fijado qué es arriba y qué es abajo, pero si dan una idea de que podemos movernos dos unidades respecto al plano en dos sentidos diferentes.

Si los planos son paralelos, entonces inmediatamente sus normales deben ser paralelas. Para ambos planos entonces la normal debe ser $(1, 2, -1)$ por simplicidad. En forma cartesiana las ecuaciones de estos planos son entonces:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= d_1 \\ x + 2y - z &= d_2 \end{aligned}$$

donde d_1 y d_2 son variables a determinar.

Recordamos que la distancia entre planos se mide tomando un punto de uno y midiendo la distancia punto$-$plano entre ellos. Para el primer plano tomemos a determinar tomemos un punto $\mathbf{x}_0$. Entonces, como su distancia punto plano debe ser 2:

$$d(\mathbf{x}_0, \Pi) = \frac{|x_0 + 2y_0 - z_0 - 1|}{\sqrt{1+4+1}} = 2$$

Sin embargo, como $\mathbf{x}_0$ está en el plano a buscar, sabemos inmediatamente que $x_0 + 2y_0 - z_0 = d_1$. De esta forma,

$$\frac{|d_1 - 1|}{\sqrt{1+4+1}} = 2$$

Es fácil notar que esta ecuación tendrá dos soluciones. Una corresponderá a d_1 y la otra a d_2. Despejando,

$$d_1 - 1 = 2\sqrt{6} \to d_1 = 1 + 2\sqrt{6}$$

La segunda solución implica tomar la rama negativa del módulo, i.e.

$$1 - d_2 = 2\sqrt{6} \to d_2 = 1 - 2\sqrt{6}$$

Finalmente, los planos buscados son:

$$\boxed{x + 2y - z = 1 + 2\sqrt{6}} \quad \text{y} \quad \boxed{x + 2y - z = 1 - 2\sqrt{6}}$$

Determinar las ecuaciones vectorial y paramétrica son ejercicios que se dejan propuestos al lector, pues el procedimiento algebraico es exactamente el mismo al ya revisado en los problemas anteriores.

Problema 3.16:

(a) Muestre que las rectas $x = y = z$ y $x + 1 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ son alabeadas. Determine la distancia entre ellas.

(b) Se definen las rectas

$$\ell_1 \ : \ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \ell_2 \ : \ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Calcule la distancia entre ℓ_1 y ℓ_2.

(c) Considere las rectas dadas por

$$\ell_1 \ : \ (1,1,1) + t\,(4,1,5)$$
$$\ell_2 \ : \ (-1,1,1) + s\,(2,1,3)$$

Sea δ la distancia entre las rectas y $p \in (0,1)$ un número fijo. Encuentre la ecuación del plano paralelo a las rectas y que está a una distancia $p\delta$ de ℓ_1 y $(1-p)\,\delta$ de ℓ_2.

Solución:

(a) Si las rectas son alabeadas, entonces no son paralelas y por lo tanto $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 \neq 0$. Sin embargo, tampoco se intersectan. Esto quiere decir que la distancia entre las rectas es no nula y por lo tanto el numerador de su expresión tampoco es nulo:

$$d\,(\ell_1, \ell_2) = \frac{|[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]|}{\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|} \neq 0 \to [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2] \neq 0$$

Para demostrar que dos rectas son alabeadas **basta demostrar que el producto caja anterior no se anula**. Análogamente, para demostrar que se intersectan basta demostrar que el producto caja anterior es nulo.

Tenemos que las rectas vectorialmente pueden escribirse como:

$$\ell_1 \ : \ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \ell_2 \ : \ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces, $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = (1,0,0)$, $\mathbf{d}_1 = (1,1,1)$ y $\mathbf{d}_2 = (1,2,3)$. De esta forma,

$$[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\,(3-2) \neq 0$$

Por lo tanto, las rectas son alabeadas. ■

(b) Esto es directo de la fórmula anteriormente vista:

$$d\,(\ell_1, \ell_2) = \frac{|[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]|}{\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|}$$

Calculamos el numerador notando que $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = (-4, 1, 2)$, $\mathbf{d}_1 = (1, 2, -2)$, $\mathbf{d}_2 = (0, 1, -2)$. Entonces,

$$[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2] = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\,(-4+2) - 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (1)$$

$$\rightarrow |[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]| = 12$$

Asimismo, podemos aprovechar que ya calculamos los cofactores y calcular el producto cruz del denominador:

$$\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\| = \sqrt{(-4+2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

Es decir,

$$\boxed{d\,(\ell_1, \ell_2) = \frac{12}{3} = 4}$$

(c) Tomando en consideración los problemas anteriores, no debiese ser complicado notar que hay dos planos a distancia $p\delta$ de ℓ_1 y dos planos a distancia $(1-p)\,\delta$ de ℓ_2. Es razonable pensar que entonces el plano buscado será el que cumple simultáneamente con ambos requisitos.

Adicionalmente, notemos que la distancia entre las rectas puede medirse dada la información que se aporta. Notando que:

$$\delta = d\,(\ell_1, \ell_2) = \frac{|[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]|}{\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|}$$

Hacemos los cálculos análogos al problema anterior y obtenemos que $\delta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Expresemos la ecuación del plano en coordenadas cartesianas, i.e. por determinar a, b, c y d tales que

$$ax + by + cz = d$$

Partamos determinando una normales $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Para que el plano sea paralelo a las rectas deberá cumplirse que las direcciones de ambas rectas sean direcciones del plano. Es decir,

$$\mathbf{n} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Digamos por conveniencia que $\mathbf{n} = (1, 1, -1)$ y luego el problema se reduce a determinar d en la ecuación

$$x + y - z = d$$

El valor de d será determinado por la condición de las distancias. Para calcular la distancia de las rectas al plano podemos tomar dos puntos arbitrarios de ella y tomar su distancia punto$-$plano. Tomando $\mathbf{p}_1$ y midiendo la distancia:

$$d\,(\mathbf{p}_1, \Pi) = \frac{|1 + 1 - 1 - d|}{\sqrt{1+1+1}}$$

Entonces,

$$|1 - d| = \sqrt{3}\,p\delta \rightarrow \begin{cases} d &= 1 - \sqrt{3}\,p\delta \overset{\delta = 2/\sqrt{3}}{=} 1 - 2p \\ d &= 1 + \sqrt{3}\,p\delta \overset{\delta = 2/\sqrt{3}}{=} 1 + 2p \end{cases}$$

Análogamente para la segunda recta,

$$d\left(\mathbf{p}_2, \Pi\right) = \frac{|-1+1-1-d|}{\sqrt{3}} = (1-p)\,\delta$$

Es decir,

$$|1+d| = \sqrt{3}\,(1-p)\,\delta \to \begin{cases} d &= \sqrt{3}\,(1-p)\,\delta - 1 \overset{\delta=2/\sqrt{3}}{=} 1-2p \\ d &= \sqrt{3}\,(p-1)\,\delta - 1 \overset{\delta=2/\sqrt{3}}{=} 2p-3 \end{cases}$$

Debemos escoger el d que sea común a ambos para que sea efectivamente el plano que satisface la condición de distancia en ambos planos. Luego, $d = 1-2p$ y por lo tanto la ecuación del plano buscado es:

$$\boxed{x + y - z = 1 - 2p}$$

Del problema anterior se puede rescatar como concepto importante la siguiente observación.

$$\ell_1 \text{ y } \ell_2 \text{ rectas } \begin{cases} \text{son la misma recta si} & \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = 0 \text{ y } (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \times \mathbf{d}_1 = 0 \\ \text{son paralelas (distintas) si} & \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = 0 \text{ y } (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \times \mathbf{d}_1 \neq 0 \\ \text{son alabeadas si} & \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 \neq 0 \text{ y } [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2] \neq 0 \\ \text{se intersectan si} & \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 \neq 0 \text{ y } [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2] = 0 \end{cases}$$

Se puede hacer una analogía similar para dos planos (razone vectorialmente por qué esto debe ser así)

$$\Pi_1 \text{ y } \Pi_2 \text{ planos } \begin{cases} \text{son el mismo plano si} & \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 0 \text{ y } (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \\ \text{son paralelos (distintos) si} & \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 0 \text{ y } (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{n}_1 \neq 0 \\ \text{se intersectan si} & \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \neq 0 \\ \text{son perpendiculares si} & \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \end{cases}$$

Problema 3.17: Sean los planos:

$$\Pi_1 \,:\, 4x + y - kz = 1$$

$$\Pi_2 \,:\, 3x + ky + 5z = 2$$

(a) Encuentre el valor de k para que los planos sean ortogonales.

(b) Halle la ecuación vectorial para la recta contenida en ambos planos con el valor de k obtenido.

(c) Determine la distancia de $\mathbf{P}\,(1,5,9)$ a la recta encontrada en (b).

Solución:

(a) Para que los planos sean ortogonales sus normales deben serlo. Luego, k debe ser tal que:

$$(4,1,-k)\cdot(3,k,5) = 0 \to 12 + k - 5k = 0$$

Despejando,

$$\boxed{k = 3}$$

(b) Los planos obtenidos en este caso vienen a ser:

$$\begin{cases} 4x + y - 3z &= 1 \\ 3x + 3y + 5z &= 2 \end{cases} \sim \begin{cases} 12x + 3y - 9z &= 3 \\ 12x + 12y + 20z &= 8 \end{cases}$$

Restándole la primera ecuación a la segunda,

$$9y + 29z = 5 \to y = \frac{5}{9} - \frac{29}{9}z$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$4x + \frac{5}{9} - \frac{29}{9}z - 3z = 1 \to 4x = \frac{4}{9} - \frac{56}{9}z \to x = \frac{1}{9} - \frac{14}{9}z$$

Entonces, normalizando a conveniencia la dirección, una ecuación vectorial posible es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 5/9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 14 \\ 29 \\ -9 \end{pmatrix}}$$

(c) Utilizamos la ecuación distancia punto−recta:

$$d\left(\ell, \mathbf{P}\right) = \frac{\left\|\left(\mathbf{P} - \mathbf{p}\right) \times \mathbf{d}\right\|}{\left\|\mathbf{d}\right\|}$$

Realizando el procedimiento algebraico habitual obtenemos que

$$\boxed{d\left(\ell, \mathbf{P}\right) = \frac{\sqrt{302^2 + 118^2 + 38^2}}{\sqrt{14^2 + 29^2 + 81}}}$$

Problema 3.18:

(a) Determine el valor de k para que las rectas $\ell_1 : (2, 1, 1) + s\,(1, 3, -1)$ y $\ell_2 : (0, 1, -1) + t\,(k, 3, 1)$ con $s, t \in \mathbb{R}$ se intersecten. Encuentre las coordenadas del punto de intersección.

(b) Encuentre valores para a y b de modo que la recta

$$\frac{x - b}{a} = \frac{y - b + 1}{2a} = \frac{z - 3b + 1}{2}$$

sea paralela al plano $2x + y - 2z = 5$ y esté a distancia $\sqrt{2}$ del origen.

Solución:

(a) Tal como ya lo determinamos en un problema anterior, para que las rectas se intersecten basta que cumplan la condición:

$$[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2] = 0$$

En este caso, $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = (2,0,2)$, $\mathbf{d}_1 = (1,3,-1)$ y $\mathbf{d}_2 = (k,3,1)$. De esta forma, k debe ser tal que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ k & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Evaluando,

$$2\,(3+3) + 2\,(3-3k) = 0 \rightarrow 12 + 6 - 6k = 0 \rightarrow \boxed{k=3}$$

Es decir, las rectas se intersecta ssi. $k = 3$. Para determinar el punto de intersección igualamos ambas ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned} 2+s &= 3t \\ 1+3s &= 1+3t \\ 1-s &= -1+t \end{aligned}$$

Restando la primera ecuación a la segunda,

$$-1 + 2s = 1 \rightarrow s = 1$$

Por lo tanto, $t = 1$ si reemplazamos el valor de s en la primera ecuación. Notamos que para ambos casos el punto de intersección resultante es $\boxed{(3,4,0)}$.

(b) Partamos notando que la dirección de la recta es $(a, 2a, 2)$ por inspección de los denominadores de la ecuación simétrica. Asimismo, su vector posición es $(b, b-1, 3b-1)$.

Interpretemos adecuadamente las condiciones pedidas.

- Para que la recta sea paralela al plano $2x + y - 2z = 5$, entonces la normal del plano debe ser ortogonal a la normal de la recta, i.e.

  $$(2,1,-2) \cdot (a, 2a, 2) = 0$$

  Es decir,

  $$4a - 4 = 0 \rightarrow \boxed{a=1}$$

- Para que la recta esté a distancia $\sqrt{2}$ del origen, entonces

  $$d\left(\vec{0}, \ell\right) = \frac{\left\|\left(\vec{0} - \mathbf{p}\right) \times \mathbf{d}\right\|}{\|\mathbf{d}\|} = \sqrt{2}$$

  Tenemos que:

  $$\mathbf{p} \times \mathbf{d} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ b & b-1 & 3b-1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4b \\ b-1 \\ b+1 \end{pmatrix}$$

Es decir, b debe ser tal que

$$\frac{\sqrt{16b^2 + (b-1)^2 + (b+1)^2}}{\sqrt{9}} = \sqrt{2} \rightarrow 16b^2 + 2b^2 + 2 = 18$$

Despejando,

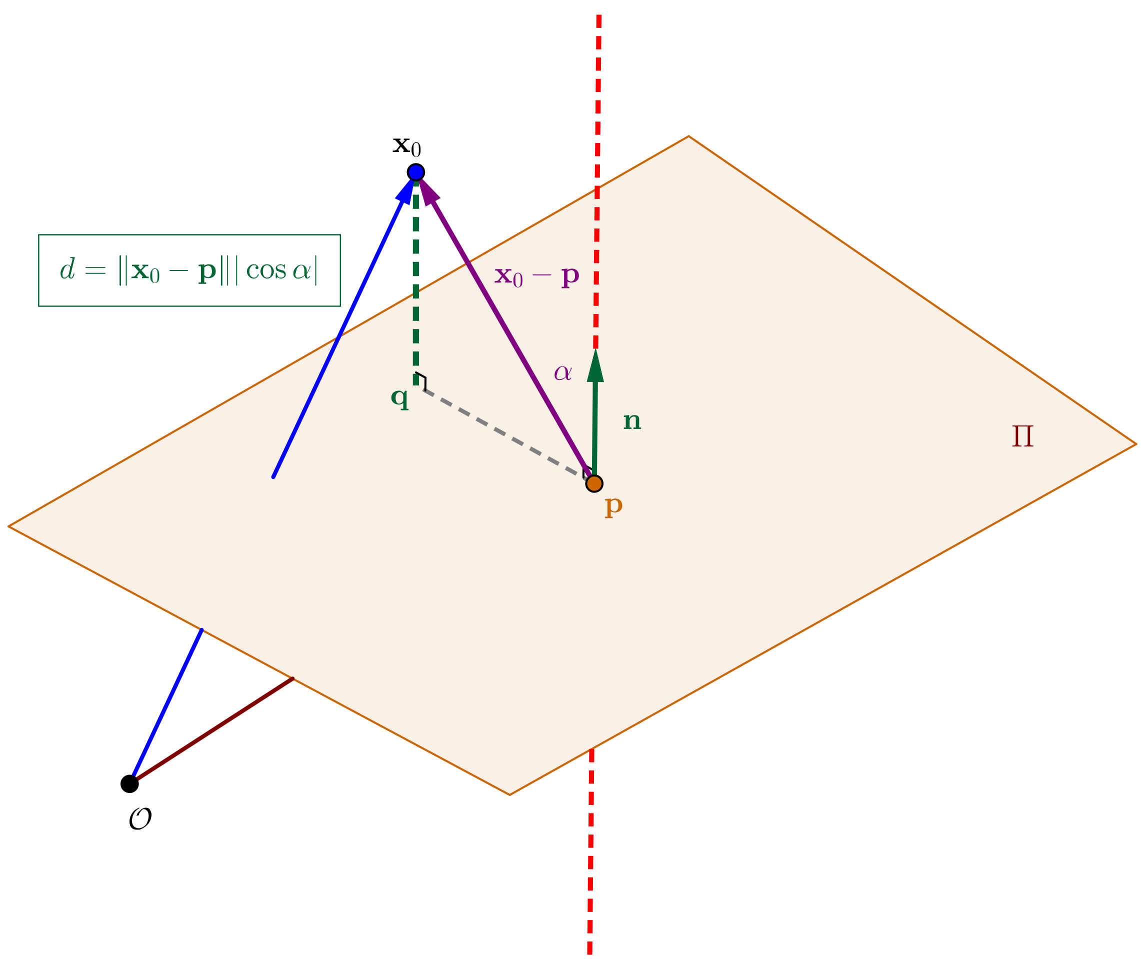
$$b^2 = \frac{4}{9} \rightarrow \boxed{b = \pm\frac{2}{3}}$$

Problema 3.19: Sea Π el plano de vector posición $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ y normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Sea $\mathbf{q}$ la proyección ortogonal del punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sobre Π. Demuestre que:

$$\overrightarrow{pq} = \frac{a\,(x_0 - p_x) + b\,(y_0 - p_y) + c\,(z_0 - p_z)}{a^2 + b^2 + c^2}\mathbf{n}$$

Solución:

Podemos usar el mismo gráfico que utilizamos para demostrar la distancia punto−plano para comprender esta situación:



Por definición $\mathbf{q}$ corresponderá a la intersección entre la línea verde y gris. Es fácil notar que $\overrightarrow{pq}$ corresponderá al vector de módulo $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}\| \cos\alpha$ y dirección $\mathbf{n}$. Pero ya sabemos que:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}\| \cos\alpha = \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

Entonces, vectorialmente,

$$\overrightarrow{pq} = \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}\hat{\mathbf{n}}$$

donde $\mathbf{n} = (a, b, c)$ y $\mathbf{x}_0 - \mathbf{p} = (x_0 - p_x, y_0 - p_y, z_0 - p_z)$. De esta forma,

$$\overrightarrow{pq} = \frac{a\,(x_0 - p_x) + b\,(y_0 - p_y) + c\,(z_0 - p_z)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Finalmente,

$$\overrightarrow{pq} = \frac{a\,(x_0 - p_x) + b\,(y_0 - p_y) + c\,(z_0 - p_z)}{a^2 + b^2 + c^2}\mathbf{n}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Problema 3.20: [**Propuesto**] Sea ℓ la recta de intersección de los planos $cx + y + z = c$ y $x - cy + cz = 1$, con $c \in \mathbb{R}$.

(a) Encuentre las ecuaciones simétricas para ℓ.

(b) Al variar c la recta ℓ describe una superficie $\mathcal{S}$. Encuentre una ecuación para la curva de intersección de $\mathcal{S}$ con el plano $z = t$ (la traza que $\mathcal{S}$ deja en dicho plano).

(c) Encuentre el volumen del sólido encerrado por $\mathcal{S}$ y los planos $z = 0$ y $z = 1$.

---

4. Funciones vectoriales $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Aquellas funciones que reciben un solo argumento real y entregan como resultado un vector se definen como **curvas**.

Definición: Se define una *curva* como un conjunto unidimensional en $\mathbb{R}^n$ que se ve representado por una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ denominada *parametrización.*

Un ejemplo de una curva puede ser la trayectoria que sigue un avión o una mosca en el cielo. En ambos casos, la línea de humo que dejan en el aire mientras se desplazan se conoce como *traza*, e intuitivamente observe que es la misma indistintamente de la *rapidez* con la que la mosca o el avión vuelen.

4.1. Parametrización de curvas, longitud de curva y arcoparámetro

Partiremos realizando una de las operaciones más elementales en las curvas, y es ser capaz de parametrizarlas a partir de una condición que se dé de ellas: habitualmente la intersección de dos superficies.

Problema 4.1: Parametrice las siguientes funciones vectoriales:

(a) El cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y la superficie $z = xy$.

(b) El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1 + y$.

(c) El cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ y el cilindro parabólico $z = x^2$.

(d) El cilindro parabólico $y = x^2$ y el elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$.

(e) El cilindro circular de radio unitario con la esfera de radio 2 y centro $(-1, 0, 0)$.

Solución:

En cada uno de estos problemas obtendremos un sistema de 2×2, claramente no lineal, lo cual marca la separación respecto a los contenidos vistos en Álgebra Lineal. Tal como la intersección de dos planos no paralelos genera una recta en $\mathbb{R}^3$, aquí ocurre algo similar: una sola ecuación cartesiana en $\mathbb{R}^3$ define una superficie, el análogo no lineal al plano. Por lo tanto, ¿qué podemos esperar de la intersección de dos ecuaciones cartesianas −dos superficies− en $\mathbb{R}^3$? Evidentemente un conjunto unidimensional, *una curva.*

El símil con lo que se hizo en Álgebra Lineal al intersectar planos es el mismo: resolvemos el sistema sabiendo que en la mayoría de los casos existirán infinitas soluciones, pero este infinito cumple la característica de que dos variables pueden ser expresadas en función de una tercera. A partir de esto generamos el parámetro t que describirá la curva. Esto realizaremos en la mayoría de estos problemas para encontrar la parametrización requerida.

Finalmente, solo para efectos de comprobar los resultados graficaremos las parametrizaciones obtenidas. No se requería esto en el ejercicio, pero se adjunta en la solución para adquirir una adecuada comprensión de las curvas de acuerdo a la parametrización dada y la intersección de superficies que la generan.

(a) La idea es reducir el sistema de ecuaciones que simultáneamente debe cumplirse para obtener una expresión de un solo parámetro. Sin embargo, observamos simetría polar en la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4$$

Entonces, para que se cumpla inmediatamente podemos hacer

$$\begin{aligned} x &= 2\cos(t) \\ y &= 2\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

Nota: definirlo como seno y coseno en vez de coseno y seno es válido pero no se acostumbra.

Luego, si definimos así x e y, como funciones de t, entonces

$$z = xy = 4\operatorname{sen}(t)\cos(t)$$

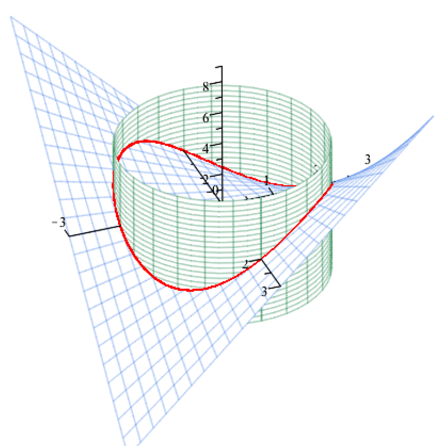
Es decir,

$$z = 4\operatorname{sen}(2t)$$

y por lo tanto:

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t), 4\operatorname{sen}(2t))}$$

Graficamos el resultado obtenido:



(b) Observe que ahora si bien existe una simetría radial, de hacer la misma definición que en el problema anterior entraríamos en una contradicción, puesto que debe cumplirse simultáneamente que:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + y$$

y bajo este reemplazo eso no se cumpliría. Sin embargo, observemos que la idea sigue siendo resolver este sistema, dejando todas las variables en función de otra. En particular, como:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 + y \to \left(x^2+y^2\right) = (1+y)^2$$

Observe que implícitamente $y \geq -1$ pues no tiene sentido decir que una raíz adquiere signo negativo. Trabajando algebraicamente,

$$x^2 + y^2 = 1 + 2y + y^2 \to y = \frac{x^2-1}{2}$$

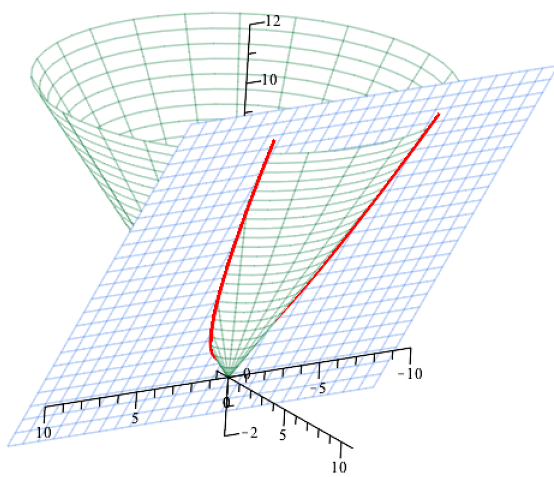
Análogamente,

$$z = 1 + y \to z = \frac{x^2+1}{2}$$

De esta forma hemos logrado dejar todas las variables expresadas en función de solamente un parámetro. Cambiando este parámetro, obtenemos que la curva en cuestión es:

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \left(t, \frac{t^2-1}{2}, \frac{t^2+1}{2}\right)}$$

Graficando:



(c) Debe cumplirse ahora simultáneamente que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ z &= x^2 \end{aligned}$$

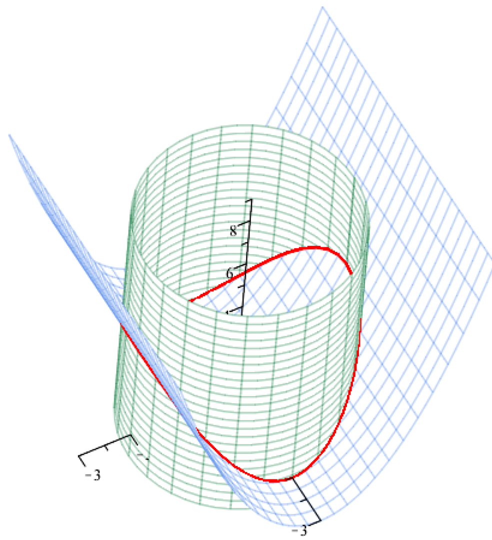
La idea es que ese sistema de 2×2 debe quedar expresado en función de un conjunto unidimensional. Nuevamente observamos simetría radial en la primera ecuación, razón por la cual hacemos:

$$\begin{aligned} x &= 2\cos(t) \\ y &= 2\,\mathrm{sen}(t) \end{aligned}$$

Entonces, inmediatamente $z = 4\cos^2(t)$, con lo cual

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \left(2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 4\cos^2(t)\right)}$$

Comprobamos gráficamente:



(d) Por resolver el conjunto unidimensional que es solución de:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x^2 + 4y^2 + 4z^2 &= 16 \end{aligned}$$

Este problema no es tan sencillo como simplemente tomar la tercera ecuación y definir dos curvas con simetría radial (polar), ya que se debe cumplir adicionalmente que $y = x^2$. En efecto, utilizando esto en la segunda ecuación para resolver el sistema de 2×2:

$$4y^2 + y + 4z^2 = 16$$

¿Qué representa esta ecuación? En efecto representa una circunferencia, pero para comprenderla adecuadamente (determinar su centro y su radio) debemos realizar completación de cuadrados, i.e.

$$\begin{aligned} 4y^2 + 4y + 4z^2 &= 4\left(y^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} y\right) + 4z^2 \\ &= 4\left[\left(y + \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2\right] + 4z^2 \end{aligned}$$

Entonces se sigue que

$$\begin{aligned} 4\left(y + \frac{1}{8}\right)^2 + 4z^2 &= 16 + 4\left(\frac{1}{8}\right)^2 \\ \left(y + \frac{1}{8}\right)^2 + z^2 &= 4 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \end{aligned}$$

En otras palabras, esta curva impone necesariamente la presencia de un círculo en cualquier plano paralelo a XY. Podemos hacer ahora la sustitución:

$$y + \frac{1}{8} = \sqrt{4 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} \cos(t) \to y = \rho \cos(t) - \frac{1}{8} \quad \text{donde } \rho = \sqrt{4 + \left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

Análogamente,

$$z = \rho \operatorname{sen}(t)$$

Entonces,

$$x^2 = \rho\cos(t) - \frac{1}{8} \to x = \pm\sqrt{\rho\cos(t) - \frac{1}{8}}$$

por lo que aparece una rama positiva y una negativa. ¿Cómo parametrizamos esto? Podemos decir:

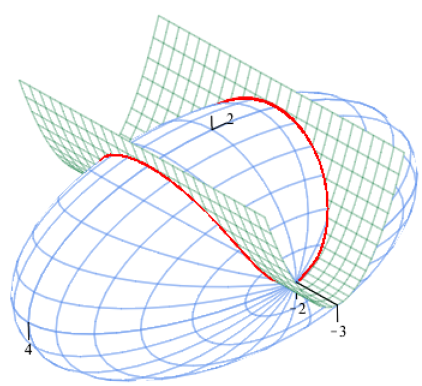
$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

donde

$$\gamma_1 \ : \ \mathbf{r}_1(t) = \left(\sqrt{\rho\cos(t) - \frac{1}{8}}, \rho\cos(t) - \frac{1}{8}, \rho\,\mathrm{sen}(t)\right)$$

$$\gamma_2 \ : \ \mathbf{r}_2(t) = \left(-\sqrt{\rho\cos(t) - \frac{1}{8}}, \rho\cos(t) - \frac{1}{8}, \rho\,\mathrm{sen}(t)\right)$$

Graficando:



(e) Lo primero que debemos partir por hacer es obtener una ecuación cartesiana para cada una de las dos superficies. En particular, un cilindro circular unitario centrado en el origen puede ser escrito como:

$$x^2 + y^2 = 1$$

y una ecuación de la esfera de radio 2 con centro en $(-1, 0, 0)$ corresponde a:

$$(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Es decir, debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ (x+1)^2 + y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

El cilindro circular de radio unitario con la esfera de radio 2 y centro $(-1, 0, 0)$. Podemos restar ambas ecuaciones para cancelar las y:

$$(x+1)^2 - x^2 + z^2 = 3$$

Entonces,

$$2x + 1 + z^2 = 3 \to z^2 = 2 - 2x$$

Dada la simetría radial del cilindrio, es sugerente realizar:

$$\begin{aligned} x &= \cos(t) \\ y &= \operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

Luego,

$$z^2 = 2 - 2x = 2\left[1 - \cos(t)\right]$$

pero

$$1 - \cos(t) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

con lo cual

$$z^2 = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Observe que el seno siempre es positivo por efecto del cuadrado. Para resolver esta ecuación correctamente debemos restar y factorizar:

$$\left[z - 2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right]\left[z + 2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right] = 0$$

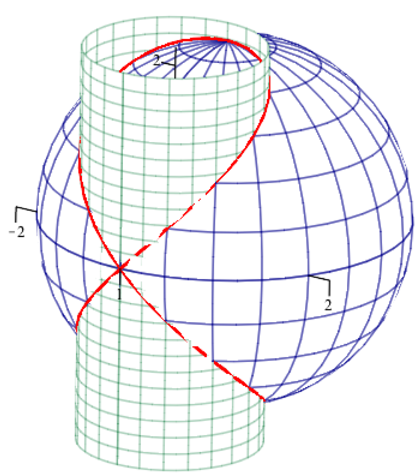
Dadas las ecuaciones, es evidente que ambas soluciones sirven. Sin embargo, observe el lector que dada la periodicidad de seno cualquiera de los dos abarca ambos signos positivo y negativo. Por lo tanto, nos podemos quedar con una sola. En particular, con la primera:

$$z = 2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$

Entonces concluimos que:

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \left(\cos(t), \operatorname{sen}(2), 2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right)}$$

En efecto graficamos esta parametrización y se obtiene la curva deseada:



Problema 4.2: Si dos objetos viajan a través del espacio a través de dos diferentes curvas, suele ser importante saber cuándo colisionarán. (*¿Colisionará un misil con su objetivo? ¿Colisionarán dos aviones en el cielo?*) Suponga que la trayectoria de dos aviones se encuentran dadas por las curvas:

(a) $\mathbf{r}_1(t) = (t^2, 7t - 12, t^2)$ y $\mathbf{r}_2 = (4t - 3, t^2, 5t - 6)$.

(b) $\mathbf{r}_2(t) = (t, t^2, t^3)$ y $\mathbf{r}_2 = (1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t)$.

para $t \geq 0$. ¿Ocurrirá una catástrofe aérea?

Solución:

Evidentemente no es una condición suficiente para una catástrofe que las trazas de los vuelos no se intersecten (en caso contrario, ocurrirían desastres aéreos a diario). Lo que realmente tiene que ocurrir es que desgraciadamente ambos aviones se encuentren en el mismo instante y en el mismo lugar.

(a) Para determinar si existe una catástrofe, debemos encontrar t tal que

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t)$$

Si existe solución para este sistema, ocurrirá una desgracia. En caso contrario, los gerentes de ambas aerolíneas (o generales de la fuerza aérea) pueden dormir tranquilos esta noche. Se tiene que cumplir entonces simultáneamente que:

$$\begin{aligned} t^2 &= 4t - 3 \\ 7t - 12 &= t^2 \\ t^2 &= 5t - 6 \end{aligned}$$

o bien,

$$t^2 - 4t + 3 = (t - 3)(t - 1) = 0$$

$$t^2 - 7t + 12 = (t - 3)(t - 4) = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = (t - 3)(t - 2) = 0$$

Observe que para las tres ecuaciones existe un t que las satisface simultáneamente, $t = 3$. Luego, la solución única para este sistema es $t = 3$ y por lo tanto **sí** ocurrirá una catástrofe aérea en dicho instante.

(b) Análogamente, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} t + 1 &= 0 \\ t^2 - 6t + 1 &= 0 \\ t^3 - 14t + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Observe que la solución de la primera ecuación es $t = -1$ y para la segunda

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} \neq -1$$

por lo cual el sistema es inconsistente. Se concluye que **no** ocurrirá una catástrofe en este caso.

Problema 4.3:

(a) Las curvas $\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2, t^3)$ y $\mathbf{r}_2 = (\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(2t), t)$ se intersectan en el origen. Determine su ángulo de intersección.

(b) Demuestre que la curva $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen}^2(t), \operatorname{sen}(t)\cos(t), \cos(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ pasa dos veces por el punto $(1, 0, 0)$. Demuestre que las dos tangentes en ese punto son perpendiculares entre sí.

(c) Considere una función f que satisface $f' = cf$ con c constante.Verifique el vector tangente de la curva descrita por

$$\mathbf{r}(\theta) = f(\theta)\left(\cos\theta + 1, \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, \cos\theta - 1\right)$$

subtiende un ángulo constante con el plano $x = z$.

Solución:

(a) En efecto, por simple inspección se observa que se intersectan para $t = 0$. El ángulo de intersección puede entenderse como el ángulo que forman los vectores tangentes en dicho punto. La pregunta es, ¿cúal sería el ángulo entre los vectores? Sabemos que la expresión que conecta vectores con ángulos por excelencia es el producto punto:

$$\mathbf{r}_1'(0) \cdot \mathbf{r}_2'(0) = \left\|\mathbf{r}_1'(0)\right\| \left\|\mathbf{r}_2'(0)\right\| \cos\alpha$$

Entonces,

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{r}_1'(0) \cdot \mathbf{r}_2'(0)}{\left\|\mathbf{r}_1'(0)\right\| \left\|\mathbf{r}_2'(0)\right\|}$$

Se hace claro lo que debemos calcular:

$$\mathbf{r}_1'(t) = \left(1, 2t, 3t^2\right) \to \mathbf{r}_1'(0) = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{r}_2'(t) = (\cos(t), 2\cos(2t), 1) \to \mathbf{r}_2'(0) = (1, 2, 1)$$

Concluimos entonces:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \to \boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}$$

(b) Para demostrar esta condición debemos encontrar dos t en $[0, 2\pi]$ tales que:

$$\begin{pmatrix} \text{sen}^2(t) \\ \text{sen}(t)\cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}^2(t) \\ \frac{1}{2}\,\text{sen}(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La primera ecuación sugiere que $t = \dfrac{\pi}{2}$ y $t = \dfrac{3\pi}{2}$. En este último valor el seno vale -1 pero por efecto del cuadrado se obtiene su valor positivo.

Luego, se sigue que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ y por lo tanto las segundas coordenadas se anulan.

Concluimos entonces que en efecto existen dos intersecciones en este intervalo. Ahora debemos calcular las tangentes en dichos puntos y demostrar que son ortogonales. Para ello, por observación gráfica se puede notar que basta demostrar que los vectores directores de las rectas tangentes, dados por $\mathbf{r}'(t)$ son ortogonales, i.e. debemos demostrar que:

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{r}'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Calculando $\mathbf{r}'(t)$:

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 2\,\text{sen}(t)\cos(t) \\ \cos(2t) \\ -\,\text{sen}(t) \end{pmatrix} \to \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{r}'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se sigue de inmediato lo que se desea probar:

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{r}'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad \blacksquare$$

(c) Primero partamos comprendiendo qué es lo que se desea demostrar. Buscamos demostrar que:

$$\alpha_{\mathbf{r},\Pi} = \text{cte.}$$

Es decir, no es una función que dependa de θ. Para ello, debemos realizar una conexión entre el ángulo y una operación vectorial. La operación vectorial por excelencia es el producto punto. En otras palabras, tenemos que demostrar que:

$$\cos(\alpha_{\mathbf{r},\Pi}) = \frac{\mathbf{r}'(\theta) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{r}'(\theta)\|\,\|\mathbf{n}\|} = \text{cte.}$$

Puede generar dudas hacer esto ya que el ángulo que obtendríamos sería el ángulo entre la normal y el vector. Sin embargo, por complementariedad de ángulo notamos que si este es constante, entonces el ángulo involucrado en el enunciado también lo es. Por simple inspección se pude determinar que:

$$\mathbf{n} = (1, 0, -1) \to \|\mathbf{n}\| = \sqrt{2}$$

Ahora bien, debemos derivar $\mathbf{r}(\theta)$. Para ello, se recomienda nota que si decimos:

$$\mathbf{u}(\theta) = \left(\cos\theta + 1, \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta, \cos\theta - 1\right)$$

Entonces, se puede demostrar simplemente observando la primera componente que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(\theta) &= f'(\theta)\,\mathbf{u}(\theta) + f(\theta)\,\mathbf{u}'(\theta) \\
&= cf(\theta)\,\mathbf{u}(\theta) + f(\theta)\,\mathbf{u}'(\theta) \leftarrow \text{enunciado} \\
&= f(\theta)\left[c\mathbf{u}(\theta) + \mathbf{u}'(\theta)\right]
\end{aligned}$$

Luego, nuestro problema a evaluar el término en el paréntesis cuadrado. Derivando $\mathbf{u}(\theta)$:

$$\mathbf{u}'(\theta) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\theta) \\ \sqrt{2}\cos(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\mathbf{r}'(\theta) = f(\theta)\begin{pmatrix} c(\cos\theta + 1) - \operatorname{sen}(\theta) \\ c\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta + \sqrt{2}\cos\theta \\ c(\cos\theta - 1) - \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

Debemos calcular $\|\mathbf{r}'(\theta)\|$ lo cual en efecto requerirá trabajar de forma sistemática:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}'(\theta)\| &= f(\theta)\sqrt{c^2(\cos\theta+1)^2 - 2c(\cos\theta+1)\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 2c^2\operatorname{sen}^2\theta + 4c\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta + \cdots} \\
&\quad \overline{\cdots c^2(\cos\theta-2)^2 - 2c(\cos\theta-1)\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}
\end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
2c(\cos\theta+1)\operatorname{sen}\theta + 2c(\cos\theta-1)\operatorname{sen}\theta &= 2c\operatorname{sen}\theta(\cos\theta+1+\cos\theta-1) \\
&= 4c\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

Reordenando:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}'(\theta)\| &= f(\theta)\sqrt{c^2(\cos\theta+1)^2 \cancel{-4c\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + 2\operatorname{sen}^2\theta + 2c^2\operatorname{sen}^2\theta + \cancel{4c\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + 2\cos^2\theta + c^2(\cos\theta - 1} \\
&= f(\theta)\sqrt{c^2\cos^2\theta + \cancel{2c\cos\theta} + 1 + 2c^2\operatorname{sen}^2\theta + c^2\cos^2\theta \cancel{-2c\cos\theta} + 1 + 2} \\
&= f(\theta)\sqrt{2c^2+4}
\end{aligned}$$

Por su parte,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(\theta)\cdot\mathbf{n} &= f(\theta)\left[c(\cos\theta+1) - \operatorname{sen}\theta - c(\cos\theta-1) + \operatorname{sen}\theta\right] \\
&= 2cf(\theta)
\end{aligned}$$

Observe que de por sí el producto punto **no es constante**, e incluso aunque lo fuera esto no garantiza que el ángulo sea constante pues el producto de la norma de los vectores podría no serlo. En efecto, hay que calcular:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}'(\theta)\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{r}'(\theta)\|\,\|\mathbf{n}\|} &= \frac{2cf(\theta)}{\sqrt{2}f(\theta)\sqrt{2c^2+4}} \\
&= \frac{c}{\sqrt{c^2+2}}
\end{aligned}$$

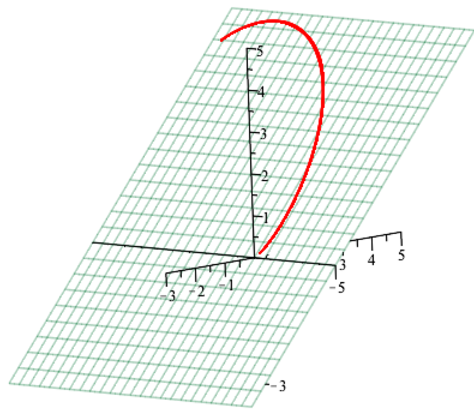
con lo cual probamos que es constante. ■ En efecto, notemos que:

$$f'(\theta) = cf(\theta) \to \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = cf \to \frac{\mathrm{d}f}{f} = c\,\mathrm{d}\theta$$

Integrando a ambos lados:

$$\ln(f) = c\theta + k \to f(\theta) = k_0 e^{c\theta} \quad \text{con } k_0 = e^k$$

Digamos entonces que $f(\theta) = e^{\theta}$, graficando la curva y el plano para $c = 3$:



Observe que no solo la curva mantiene un ángulo constante con el plano, si no que además está contenida en este.

Problema 4.4: Considere la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), e^t)$.

(a) Determine la ecuación de su recta tangente en $t = 0$.

(b) Pruebe que la intersección de cualquier recta tangente a la curva con el plano XY entrega un punto sobre el círculo $x^2 + y^2 = 2$.

(c) Determine en qué punto (de existir) la curva atraviesa perpendicularmente al plano YZ.

Solución:

(a) La recta tangente tiene como dirección a $\mathbf{r}'(t)$ y como posición a $\mathbf{r}(t_0)$, luego:

$$\ell \, : \, \mathbf{r}(0) + \lambda \mathbf{r}'(0)$$

Es completamente explícito lo que hay que calcular. Tenemos que:

$$\mathbf{r}'(t) = \left(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), e^t\right) \to \mathbf{r}'(0) = (0, 1, 1)$$

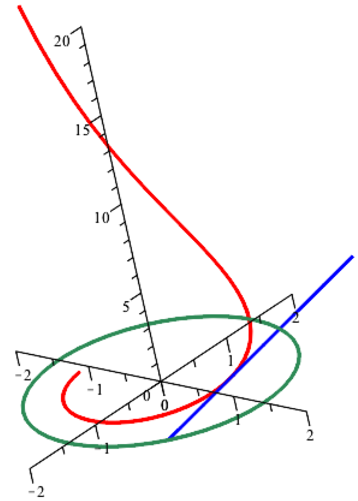
Adicionalmente,

$$\mathbf{r}(0) = (1, 0, 1)$$

Con esto se tiene que:

$$\ell \, : \, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Graficando:



(b) Lo primero que debiésemos hacer es calcular "cualquier recta tangente" a la curva. Esto es sencillo pues ya lo hicimos,

$$\ell \ : \ \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ e^t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

Al intersectar con el plano XY es equivalente a tener que $\lambda = 0$. De esta forma, buscamos que:

$$e^t + \lambda e^t = 0 \to \lambda = -1$$

Nota: Observe que t puede considerarse fijo una vez obtenida la recta pues para él se calcula la recta tangente en dicho instante. Al intersectar esta recta con el plano XY buscamos ahora que el parámetro de la recta, λ, busque la condición pedida.

Luego, en las otras coordenadas deberá cumplirse que:

$$x(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t) = 0$$

$$y(t) = \cos(t) - \operatorname{sen}(t) = 0$$

Para demostrar lo pedido basta probar que, como t es cualquiera, $x(t)^2 + y^2(t) = 2$ independiente del valor de t (i.e. la intersección está contenida en una circunferencia de radio $\sqrt{2}$). De esta forma,

$$\begin{aligned} x^2(t) + y^2(t) &= (\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2 \\ &= \cos^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t - 2\operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t \\ &= 2\cos^2 t + 2\operatorname{sen}^2 t \\ &= 2 \end{aligned}$$

demostrando así lo pedido. ■ En la figura anterior se trazó una recta tangente junto a la circunferencia en cuestión para probar el hecho.

(c) La primera pregunta es, ¿cómo podemos describir el hecho de intersectar al plano YZ de forma perpendicular? El plano YZ está caracterizado por $x = 0$. Vectorialmente, se puede entender como que la normal de este plano debe ser paralela al vector tangente en dicho punto de intersección.

Entonces, primero busquemos los puntos de intersección, i.e. la coordenada x de la curva $\mathbf{r}(t)$ (**ojo:** ahora estamos intersectando la curva, no la recta tangente) debe ser igual a cero:

$$\to \cos(t) = 0 \to t = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Calculamos ahora el vector tangente para estos puntos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) &= \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right), e^{(2k+1)\pi/2}\right) \\ &= \left((-1)^{k+1}, 0, e^{(2k+1)\pi/2}\right) \end{aligned}$$

La normal al plano YZ es $(1,0,0)$, con lo cual buscamos que:

$$\begin{pmatrix} (-1)^{k+1} \\ 0 \\ e^{(2k+1)\pi/2} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es evidente que este sistema no tiene solución para ningún k entero pues sería inconsistente: la exponencial nunca se anula, lo cual impone que $\alpha = 0$, en cambio para la primera componente $\alpha = -1$ ó 1 según corresponda. Concluimos entonces que no existen dichos puntos. En efecto, se puede comprobar gráficamente en la figura planteada en la parte (a) pues la exponencial cortará al plano de forma siempre tangente.

Problema 4.5:

(a) Considere la curva definida por la ecuación

$$\mathbf{r}(t) = \left(t \operatorname{sen} t, t\cos t, \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\right)$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Calcule el largo y la masa de la curva, sabiendo que su densidad viene dada por la ecuación $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2$.

(b) Considere la curva $\mathbf{r}(t) = (\alpha\cos t, \alpha \operatorname{sen} t, \beta t)$. La curva que resulta es una hélice circular para la cual definimos $t_0 = 0$ como el origen de la curva. Demuestre que su reparametrización en longitud de arco viene dada por:

$$\mathbf{r}(s) = \left(\alpha \cos \frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \beta \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{\beta s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)$$

Solución:

(a) Recordemos lo visto anteriormente: en $\mathbb{R}^2$ el largo de una curva podía entenderse como:

$$\ell(\gamma) = \int \mathrm{d}\ell \quad \text{donde } \mathrm{d}\ell = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

Es muy fácil entonces razonar análogamente a partir de lo que estamos midiendo y concluir que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\ell &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \\
&= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \\
&= \|\mathbf{r}'(t)\| \, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\ell = \int_{t_i}^{t_f} \|\mathbf{r}'(t)\| \, \mathrm{d}t
$$

Reemplazando con la ecuación dada, requerimos calcular $\mathbf{r}'(t)$ en primer lugar:

$$
\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) + t\cos(t) \\ \cos(t) - t\operatorname{sen}(t) \\ \sqrt{2}t^{1/2} \end{pmatrix}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{(\operatorname{sen} t + t\cos t)^2 + (\cos t - t\operatorname{sen} t) + 2t} \\
&= \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2t\operatorname{sen} t\cos t + t^2\cos^2 t + \cos^2 t - 2t\operatorname{sen} t\cos t + t^2\operatorname{sen}^2 t + 2t} \\
&= \sqrt{t^2 + 2t + 1}
\end{aligned}
$$

Se sigue que:

$$
\mathrm{d}\ell = (t+1)\,\mathrm{d}t
$$

pues estamos integrando para $t > 0$. Finalmente,

$$
\boxed{\ell = 2\pi^2 + 2\pi}
$$

De la misma forma, recordamos que la masa de cualquier objeto viene dada por:

$$
M = \int \mathrm{d}m
$$

En este caso, $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}\ell$ donde $\rho = \rho(x,y,z)$ lo evaluamos en los puntos por los cuales pasa la curva, i.e.

$$
\begin{aligned}
\rho &= \rho(\mathbf{r}(t)) = t^2\cos^2 t + t^2\operatorname{sen}^2 t \\
&= t^2
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\mathrm{d}m = t^2(t+1)\,\mathrm{d}t = t^3 + t^2\,\mathrm{d}t
$$

Integrando de cero a 2π:

$$
\boxed{M = 4\pi^4 + 2\pi^2}
$$

(b) Recordemos que una curva arcoparametrizada es una curva descrita por una parametrización única para ella cuya característica es que el parámetro queda descrito como una función de su largo, i.e.

$$
\mathbf{r} \,:\, [0,\ell] \to \mathbb{R}^3
$$

donde ℓ es el largo total de la traza de la curva (el cual se puede obtener sobre cualquier parametrización). Buscamos un parámetro s que mida efectivamente el largo de la curva dada una parametrización cualquiera desde t_i hasta t_f :

$$s(t) = \int_{t_i}^{t} \|\mathbf{r}'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \quad \text{con } t_i \leq t \leq t_f$$

En este caso,

$$\mathbf{r}'(t) = (-\alpha \operatorname{sen} t, \alpha \cos t, \beta)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 t + \alpha^2 \cos^2 t + \beta^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

De esta forma, suponiendo que $t_i = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \mathrm{d}\tau \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, t \end{aligned}$$

Aquí surge el paso clave para determinar el arcoparámetro, si s es invertible, podemos fácilmente determinar $s^{-1}(t)$. En otras palabras,

$$t = \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

En otras palabras, hacemos el reemplazo:

$$\mathbf{r}(t) \to \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$$

Haciéndolo, finalmente se tiene que:

$$\mathbf{r}(s) = \left(\alpha \cos \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \beta \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \frac{\beta s}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \quad \blacksquare$$

Problema 4.6:

(a) Si $\mathbf{r}(t) \neq 0$, demuestre que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\mathbf{r}(t)\| = \dfrac{1}{\|\mathbf{r}(t)\|} \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

(b) Utilice lo anterior para demostrar que si el vector $\mathbf{r}(t)$ es siempre perpendicular a su vector $\mathbf{r}'(t)$ para todo t, entonces la curva yace en una esfera de radio $\|\mathbf{r}(t)\|$ y centro en el origen.

(c) Considere ahora una curva $\mathbf{f}(s)$ cualquiera parametrizada por longitud de arco. Demuestre que $\mathbf{f}''(s)$ es ortogonal al vector $\mathbf{f}'(s)$ para todo $s \in I$.

(d) Dada la curva paramétrica

$$\mathbf{r}(t) = \left(1 + \operatorname{sen}\, t, \cos t, 2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Demuestre que es una curva esférica y determine su radio.

Solución:

(a) En este tipo de problemas en los cuales se involucra la derivación de norma, siempre resulta pertinente recordar la definición de norma en términos del producto punto, i.e.

$$\|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)}$$

Entonces,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{r}(t)\| = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)\right]$$

Sin mayor dificultad, observando la primera componente, podemos notar que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)\right] = \mathbf{a}'(t) \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}'(t)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)\right] &= \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= 2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{r}(t)\| &= \frac{\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)}{\sqrt{\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)}} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{r}(t)\|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\end{aligned}$$

Una interpretación geomérica: Observe que

$$\frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}$$

es un vector unitario. De esta forma,

$$\frac{1}{\|\mathbf{r}(t)\|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| \cos\alpha$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$. En efecto, el producto punto de un vector $\mathbf{v}$ con uno $\hat{\mathbf{n}}$ unitario mide cuánto vale la proyección de $\mathbf{v}$ sobre $\hat{\mathbf{n}}$. Se sigue entonces que

$$\Delta\|\mathbf{r}(t)\| \approx \|\mathbf{r}'(t)\| \cos\alpha\, \Delta t$$

Este resultado es completamente razonable: la variación en la medida de un vector viene dada por la proyección de la tangente (hacia donde está apuntando) sobre el mismo vector posición, ya que esta proyección indica la disminución instantánea del vector.

(b) Siguiendo la interpretación geométrica: si $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ en todo punto entonces la proyección de $\mathbf{r}'(t)$ sobre $\mathbf{r}(t)$ es nula, de modo que esperamos que $\|\mathbf{r}(t)\|$ no aumente ni disminuya en el tiempo.

En efecto, de la fórmula anterior, si $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t)=0$ dada la ortogonalidad, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}\left\|\mathbf{r}(t)\right\|}{\mathrm{d}t}=0\to\left\|\mathbf{r}\left(t\right)\right\|=c$$

donde $c\in\mathbb{R}$ fijo. Conocido $\mathbf{r}\left(t_0\right)$ con t_0 cualquiera, entonces:

$$c=\left\|\mathbf{r}\left(t_0\right)\right\|$$

En efecto, la curva describe una colección de puntos cuya distancia al origen (la norma de vector) es constante. Por lo tanto la curva es esférica con radio c ya determinado y centro en el origen, demostrando así lo pedido. ■

(c) Siguiendo lo anterior, queremos demostrar que:

$$\mathbf{f}''(s)\cdot\mathbf{f}'(s)=0$$

Pero, de forma análoga, a lo que hicimos anteriormente, es fácil notar que:

$$\mathbf{f}''(s)\cdot\mathbf{f}'(s)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\|\mathbf{f}'(s)\right\|^2$$

En otras palabras, observe que si demostramos que $\left\|\mathbf{f}'(s)\right\|^2$ es constante, entonces habremos demostrado lo pedido. Pero,

$$\left\|\mathbf{f}'(s)\right\|^2=\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}s}\right\|^2$$

Por regla de la cadena,

$$\left\|\mathbf{f}'(s)\right\|^2=\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}s}\right\|^2=\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right\|^2$$

dada una parametrización diferenciable cualquiera de $\mathbf{f}$ tal que $\mathbf{f}'(t)\neq 0$ para todo t. Luego, observe que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{f}'(t)\quad\text{y}\quad\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\left\|\mathbf{f}'(t)\right\|}$$

donde la segunda igualdad se deriva directamente de aplicar derivación por Teorema Fundamental del Cálculo a la definición de arcoparámetro $s(t)$. Luego,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathbf{f}'(t)}{\left\|\mathbf{f}'(t)\right\|}$$

el cual es un vector unitario, por lo cual $\left\|\mathbf{f}'(s)\right\|^2=1$ para todo s. Esto implica que

$$\mathbf{f}''(s)\cdot\mathbf{f}'(s)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\|\mathbf{f}'(s)\right\|^2=0$$

demostrando así lo pedido. ■

(d) Partamos comprendiendo el concepto de curva esférica: una curva es esférica si todos los puntos de ella equidistan de uno llamado centro. Entonces, una curva $\mathbf{r}(t)$ es esférica si existe un $\mathbf{r}_0\in\mathbb{R}^3$ fijo tal que:

$$\left\|\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_0\right\|=c$$

con c constante. Si contamos con una parametrización de la curva diferenciable, podemos demostrar entonces que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_0\right\|^2=0$$

Observe entonces que el problema no es tan sencillo como demostrar que

$$\frac{\mathrm{d}\left\|\mathbf{r}(t)\right\|^2}{\mathrm{d}t}=0$$

pues los puntos pueden equidistar de cualquier otro punto $\mathbf{r}_0$, no necesariamente del origen. Tenemos adicionalmente que:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_0\right\|^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_0\right)\cdot\left(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_0\right)\\ &= 2\left(\mathbf{r}\left(t\right)-\mathbf{r}_0\right)'\cdot\left(\mathbf{r}\left(t\right)-\mathbf{r}_0\right)\\ &= \mathbf{r}'(t)\cdot\left(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_0\right)\end{aligned}$$

Entonces, si demostramos que existe $\mathbf{r}_0$ tal que $\mathbf{r}'(t)\cdot(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_0)=0$ habremos demostrado así lo pedido. Pero demostrar esto es equivalente a demostrar que:

$$\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}_0=0$$

Calculemos en primer lugar $\mathbf{r}'(t)$:

$$\mathbf{r}'(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\operatorname{sen}\,t\\ \cos\left(\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}$$

Luego, calculando el producto punto con $\mathbf{r}'(t)$:

$$\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=\cos t+\operatorname{sen}\,t$$

Necesitamos encontrar un $\mathbf{r}_0$ tal que $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}_0=\cos t+\operatorname{sen}\,t$. De esta forma, ambos términos se cancelarían y habríamos demostrado lo pedido. En efecto, se puede demostrar por simple inspección que sí existe uno y es $\mathbf{r}_0=(1,-1,0)$.

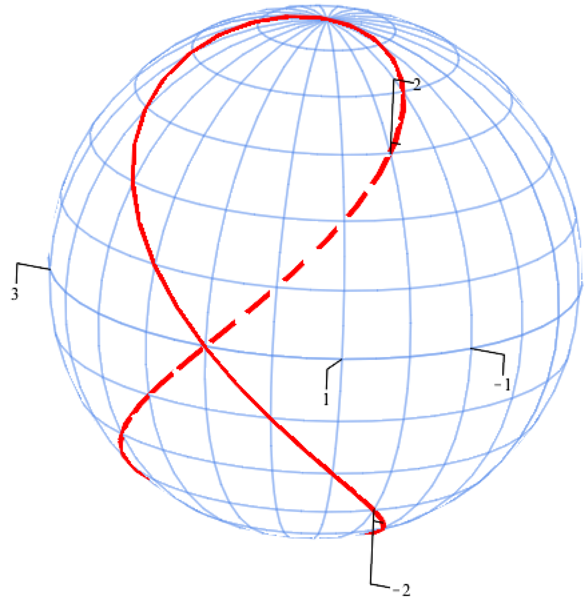
Luego, hemos demostrado que el $\mathbf{r}_0$ encontrado cumple que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_0\right\|^2=0 \quad \blacksquare$$

Por lo tanto, la curva es esférica de centro $(1,-1,0)$. Determinar su radio es sencillo, pues en efecto sabemos cualquier punto de la curva. En particular,

$$\mathbf{r}(0)=(1,1,0)$$

De modo que: $\mathbf{r}\left(0\right)-\mathbf{r}_0=(0,2,0)\to\left\|\mathbf{r}\left(0\right)-\mathbf{r}_0\right\|=2$. Por lo tanto, el radio de dicha esfera es 2. Graficando la situación, se observa como todo se cumple a cabalidad:



Problema 4.7: Demuestre que la curva parametrizada como:

$$\mathbf{r}\left(t\right)=\left(\operatorname{sen}^{2}t,\operatorname{sen}t\cos t,\cos t\right)$$

con $t\in\left[0,2\pi\right]$ está contenida en una esfera y que todos los planos normales a dicha curva contienen al origen.

Solución:

Derivando una vez:

$$\mathbf{r}'\left(t\right)=\left(2\operatorname{sen}t\,\cos t,\cos^{2}t-\operatorname{sen}^{2}t,-\operatorname{sen}t\right)$$

Luego, $\mathbf{r}\left(t\right)\cdot\mathbf{r}'\left(t\right)=2\operatorname{sen}^{3}t\,\cos t+\operatorname{sen}t\,\cos^{3}t-\operatorname{sen}^{3}t\,\cos t-\operatorname{sen}t\,\cos t$. Reordenando un poco los términos,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\left(t\right)\cdot\mathbf{r}'\left(t\right) &= \operatorname{sen}^{3}t\,\cos t+\operatorname{sen}t\,\cos^{3}t-\operatorname{sen}t\,\cos t\\ &= \operatorname{sen}t\,\cos t\,\left(\operatorname{sen}^{2}t+\cos^{2}t\right)-\operatorname{sen}t\,\cos t\\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando el problema anterior concluimos que está contenida en una esfera.

Para la segunda parte recordamos que una posible parametrización vectorial del plano tangente en $t=t_0$ es:

$$\mathbf{r}'\left(t_0\right)\cdot\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}\left(t_0\right)\right)=0\rightarrow\mathbf{r}'\left(t_0\right)\cdot\mathbf{x}=\mathbf{r}'\left(t_0\right)\cdot\mathbf{r}\left(t_0\right)$$

Para que pase por el origen, entonces la distancia del origen al plano debe ser nula. A partir de la fórmula distancia punto$-$plano podemos notar entonces que basta entonces probar que:

$$\mathbf{r}'\left(t_0\right)\cdot\mathbf{r}\left(t_0\right)=0$$

que ya lo demostramos para la parte anterior para cualquier t_0 del a curva. Por lo tanto, quedan demostradas ambas condiciones. ■

Problema 4.8:

(a) Reparametrice la curva $\vec{\gamma}\,(t) = (e^t \cos(t)\,, e^t \operatorname{sen}(t)\,, e^t)$ con $-\infty < t < \infty$ tomando como nuevo parámetro la longitud de arco. ¿Cuál es su longitud de la curva de $-\infty$ a 0?

(b) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva resultante al proyectar esta curva sobre el plano XY. Demuestre que el ángulo entre $\vec{\alpha}\,(t)$ y $\vec{\alpha}'\,(t)$ es constante.

Solución:

(a) Debemos entonces determinar el arcoparámetro, tomando como punto inicial $-\infty$. Calculando,

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) - e^t \operatorname{sen}(t) \\ e^t \operatorname{sen}(t) + e^t \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \to \|\vec{\gamma}'(t)\| &= \sqrt{e^{2t}\cos^2(t) - 2e^{2t}\operatorname{sen}(t)\cos(t) + e^{2t}\operatorname{sen}^2(t) + e^{2t}\operatorname{sen}^2(t) + \cdots} \\ &\quad \overline{\cdots + 2e^{2t}\operatorname{sen}(t)\cos(t) + e^{2t}\cos^2(t) + e^{2t}} \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{3e^{2t}} = \sqrt{3}e^t$$

Integrando,

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{t} \sqrt{3}\, e^{\tau} \mathrm{d}\tau = \sqrt{3} \lim_{\epsilon \to -\infty} e^{\tau} \Big|_{-\infty}^{t} \\ &= \sqrt{3}\, e^t \end{aligned}$$

En efecto, el largo de la curva de $-\infty$ a 0 es finito y se tiene que viene dado por:

$$\boxed{\ell = s(0) = \sqrt{3}}$$

Finalmente,

$$t = \ln \frac{s}{\sqrt{3}}$$

Reemplazando, obtenemos la arcoparametrización deseada:

$$\boxed{\vec{\gamma}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \cos\left(\ln \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \frac{s}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\ln \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \frac{s}{\sqrt{3}} \right)}$$

(b) Queremos demostrar que el ángulo entre $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\alpha}'(t)$ es constante para todo t. Por lo visto en un problema anterior sabemos que esto no es equivalente a demostrar que su producto punto es constante. Por demostrar que:

$$\frac{\vec{\alpha}(t)\cdot\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|\,\|\vec{\alpha}'(t)\|} = c$$

donde c no depende de t. Partamos por determinar $\vec{\alpha}(t)$. Al proyectar sobre el plano XY, lo único que debemos hacer es igualar la componente z de la curva a cero. De esta forma,

$$\vec{\alpha}(t) = \left(e^t\cos(t)\,, e^t\operatorname{sen}(t)\,, 0\right)$$

curva que evidentemente representa un espiral plano. Es fácil derivar la curva pues basta tomar las primeras componentes de $\vec{\alpha}'(t)$:

$$\vec{\alpha}'(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos(t) - e^t\operatorname{sen}(t) \\ e^t\operatorname{sen}(t) + e^t\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|\vec{\alpha}(t)\| &= e^t \\ \|\vec{\alpha}'(t)\| &= \sqrt{2}\,e^t \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(t)\cdot\vec{\alpha}'(t) &= e^{2t}\cos^2(t) - e^{2t}\operatorname{sen}(t)\cos(t) + e^{2t}\operatorname{sen}^2(t) + e^{2t}\operatorname{sen}(t)\cos(t) \\ &= e^{2t} \end{aligned}$$

Con ello,

$$\frac{\vec{\alpha}(t)\cdot\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|\,\|\vec{\alpha}'(t)\|} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{2}\,e^{2t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

constante, no dependiente de t, para todo t. ■

Problema 4.9: Determine el punto de intersección de las curvas $\mathbf{r}_1(t) = (t, 1-t, 3+t^2)$ y $\mathbf{r}_2(t) = (3-t, t-2, t^2)$ y el ángulo formado por sus tangentes en dicho punto.

Solución:

Para resolver esto tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{aligned} t &= 3-s \\ 1-t &= s-2 \\ 3+t^2 &= s^2 \end{aligned}$$

poniendo parámetros distintos pues cada curva tiene su parametrización independiente.

Observe que si sumamos las primeras dos ecuaciones obtenemos que $1 = 1$, lo cual indica que la primera y la segunda ecuación son redundantes. Por lo tanto, el sistema o tiene solución única o no tiene solución (en dicho caso las trazas de la curva no se cortan). Reemplazando con t en la segunda ecuación:

$$3 + (3 - s)^2 = s^2 \to 3 + 9 - 6s + s^2 = s^2 \to s = 2$$

Luego, $t = 1$ y se validan las tres ecuaciones. Finalmente, el punto de intersección es $\mathbf{p} = (1, 0, 4)$. Calculando las rectas tangentes y tomando el producto punto obtenemos el ángulo:

$$\mathbf{r}_1'(1) \cdot \mathbf{r}_2'(2) = (1, -1, 2) \cdot (-1, 1, 4) = 6$$

Es decir,

$$\cos\alpha = \frac{6}{\|(1, -1, 2)\| \, \|(-1, 1, 4)\|} \to 6\sqrt{3}\cos\alpha = 6$$

Despejando,

$$\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Problema 4.10: [**Propuesto**] Demuestre que el camino más corto entre dos puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ cualesquiera en $\mathbb{R}^3$ es la curva $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{q} + (1 - t)\,\mathbf{p}$ (es decir, la línea recta que une los puntos). Sea $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un camino de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\mathbf{f}(a) = \mathbf{p}$ y $\mathbf{f}(b) = \mathbf{q}$.

(a) Sea $\mathbf{v}$ un vector unitario en $\mathbb{R}^3$. Considere la función $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{v}$. Demuestre que:

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$$

(b) Demuestre, utilizando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, que:

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

(c) Considere el vector unitario $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|}$ para demostrar que

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| \leq \ell(\mathbf{f})$$

(d) Concluya que la distancia más corta de $\mathbf{q}$ a $\mathbf{p}$ es la línea recta que une los puntos.

4.2. Propiedades geométricas de curvas

En esta sección estudiaremos las diversas propiedades geométricas diferenciales de las curvas. Seguiremos una estructura lógica guiada según los ejercicios.

Ya descubrimos que para una curva con parametrización $\mathbf{r}(t)$ diferenciable tal que $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ la dirección de su recta tangente viene dada por $\mathbf{r}'(t)$. Luego, $\mathbf{r}'(t)$ define una dirección tangente que para nuestros propósitos de estudio interesa definir en su forma unitaria. Es por esta razón que se define el **vector tangente** a $\mathbf{r}(t)$ en t como:

$$\boxed{\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}}$$

pero, por definición de derivada:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$$

Es decir, conocido el arcoparámetro, el vector tangente se obtiene de forma directa a través de la derivación, sin necesidad de dividir por la norma, la cual es unitaria:

$$\boxed{\mathbf{T}(s) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}}$$

Dado que $\mathbf{T}$ es un vector siempre unitario, entonces por lo visto anteriormente sabemos que:

$$\frac{\mathrm{d}\|\mathbf{T}\|^2}{\mathrm{d}s} = 2\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{T} = 0$$

Es decir, $\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}s$ y $\mathbf{T}$ son vectores ortogonales[9]. Ahora bien, la norma del vector $\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}s$ es una medida de qué tan rápido cambia la dirección del vector $\mathbf{T}$ versus el parámetro s. Si la norma de este vector es más grande, $\mathbf{T}$ cambia de una forma muy rápida, por lo cual la curva se ve "más curvada". Dado que el arcoparámetro es único, es pertinente definir la **curvatura** de una curva dos veces diferenciable como:

$$\boxed{\kappa(s) = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right\|}$$

pues de esta forma podemos comparar la curvatura de dos curvas a partir de un parámetro único. Si dejáramos la curvatura en función de una parametrización cualquiera podemos obtener una curvatura mayor que versus la arcoparametrización. La parametrización por longitud de arco en efecto nos permite efectivamente comparar de forma correcta la traza de dos curvas sin generar distorsiones por la forma en que son parametrizadas.

Sabemos que $\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}s$ y $\mathbf{T}$ son ortogonales. De la misma forma, para una parametrización diferenciable cualquiera $\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}t$ y $\mathbf{T}$ también son ortogonales. Luego, $\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}t$ genera una nueva dirección ortogonal a $\mathbf{T}$ que genera la dirección instantánea en la cual $\mathbf{T}$ está cambiando. Es decir, físicamente se puede entender como la dirección en la cual instantáneamente $\mathbf{T}$ está acelerando.

Nuevamente, bajo la lógica de que nos interesa generar direcciones unitarias, definimos el **vector normal** para una parametrización cualquiera dos veces diferenciable (incluido el arcoparámetro) como:

$$\boxed{\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}}$$

Para una posición $\mathbf{r}(t)$ cualquiera hemos obtenido dos vectores ortogonales y normales. Para completar una base ortonormal con estos dos vectores, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, podemos tomar el producto cruz entre ambos, obteniendo un vector ortogonal ambos y unitario. Se define el **vector binormal** como:

$$\boxed{\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)}$$

[9]Esta es una propiedad ampliamente utilizada en Cinemática: la derivada de todo vector unitario es ortogonal al vector.

A partir de la base, se puede obtener la ecuación de planos que aproximan diferencialmente a la curva en un punto dado. Se define el **plano normal** a la curva como aquel plano que la curva atraviesa perpendicularmente en un instante t cualquiera. Es evidente entonces que la normal a este plano es el vector tangente, de modo que:

$$\boxed{\Pi_{\mathbf{T}}(t) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{T}(t) \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)] = 0\right\}}$$

Asimismo, se define el plano osculador[10] como aquel plano que *localmente* contiene a la curva. Es decir, este plano contiene a la dirección tangente y a la dirección normal. Por lo tanto, la normal de este plano es el vector binormal. Luego,

$$\boxed{\Pi_{\mathbf{B}}(t) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{B}(t) \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)] = 0\right\}}$$

Para completar los planos que es posible generar, se define el **plano tangente** o **plano rectificante** como:

$$\boxed{\Pi_{\mathbf{N}}(t) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{N}(t) \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)] = 0\right\}}$$

A partir de estas definiciones básicas trabajaremos en los problemas a continuación.

Problema 4.11: Determine los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ para la curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2, \frac{2}{3}t^3, t\right)$$

en el punto $\left(1, \dfrac{2}{3}, 1\right)$.

Solución:

Prácticamente por inspección, el punto deseado en función del parámetro corresponde a $t = 1$. Luego, determinar estos vectores no es más que aplicar directamente la fórmula.

Calculamos la primera y la segunda derivadas, las cuales son las requeridas para nuestros cálculos:

$$\mathbf{r}'(t) = \left(2t, 2t^2, 1\right) \to \mathbf{r}'(1) = (2, 2, 1)$$

$$\mathbf{r}''(t) = (2, 4t, 0) \to \mathbf{r}''(1) = (2, 4, 0)$$

Es decir,

$$\boxed{\mathbf{T}(1) = \frac{\mathbf{r}'(1)}{\|\mathbf{r}'(1)\|} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)}$$

Calculamos el producto cruz entre los vectores:

$$\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1) = (-4, 2, 4) = 2(-2, 1, 2)$$

Luego,

$$\boxed{\mathbf{B}(1) = \frac{\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)}{\|\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)\|} = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)}$$

[10] La palabra osculador viene del latín *osculum*, que significa "beso". Es decir, el plano osculador es un plano que "besa" a la curva en dicho punto.

Finalmente, sabemos que:

$$\mathbf{N}(1) = \mathbf{B}(1) \times \mathbf{T}(1) = \frac{1}{9}(-3, 6, -6) \to \boxed{\mathbf{N}(1) = \frac{1}{3}(-1, 2, -2)}$$

Problema 4.12:

(a) Encuentre las ecuaciones del plano normal y osculador para la curva de intersección de los cilindros parabólicos $x = y^2$ y $z = x^2$ en el punto $(1, 1, 1)$.

(b) ¿En qué punto de la curva $\mathbf{r}(t) = (t^3, 3t, t^4)$ el plano normal es paralelo al plano $6x+6y-8z = 1$?

(c) Muestre que el plano osculador en cada punto de la curva $\mathbf{r}(t) = (t + 2, 1 - t, t^2/2)$ es el mismo plano. ¿Qué puede concluir sobre el comportamiento de la curva?

Solución:

(a) Partimos parametrizando la curva notando que debe satisfacerse simultáneamente el sistema:

$$x = y^2 \quad ; \quad z = x^2 = y^4$$

Entonces, una parametrización posible es

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2, t, t^4\right)$$

De esta forma, se obtiene el punto $(1, 1, 1)$ evaluando en $t = 1$. Calculando el vector tangente para obtener el plano normal, derivamos:

$$\mathbf{r}'(t) = \left(2t, 1, 4t^3\right) \to \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6}$$

Entonces,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{(2t, 1, 4t^3)}{\sqrt{1 + 4t^2 + 16t^6}} \to \mathbf{T}(1) = \frac{(2, 1, 4)}{\sqrt{21}}$$

Con lo cual la ecuación del plano normal es:

$$\mathbf{x} \cdot \frac{(2, 1, 4)}{\sqrt{21}} = (1, 1, 1) \cdot \frac{(2, 1, 4)}{\sqrt{21}}$$

$$\boxed{\Pi_{\mathbf{T}} \ : \ 2x + y + 4z = 7}$$

Ahora bien, para calcular el vector binormal requerimos primero calcular el vector normal. Entonces, aplicando la definición:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

Podemos obtener por cálculo directo que:

$$\mathbf{N}(1) = \frac{\sqrt{101 \cdot 21}}{2121}(-31, -26, 22)$$

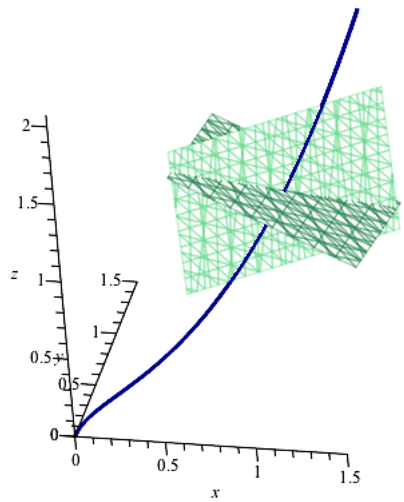
Entonces,

$$\mathbf{B}(1) = \frac{1}{\sqrt{101}}(6, -8, -1)$$

con lo cual,

$$\boxed{\Pi_{\mathbf{B}} \, : \, 6x - 8y - z + 3 = 0}$$

Graficando:



(b) Para calcular el plano normal basta obtener $\mathbf{r}'(t)$, paralelo al vector normal. Es decir,

$$\mathbf{r}'(t) = \left(3t^2, 3, 4t^3\right)$$

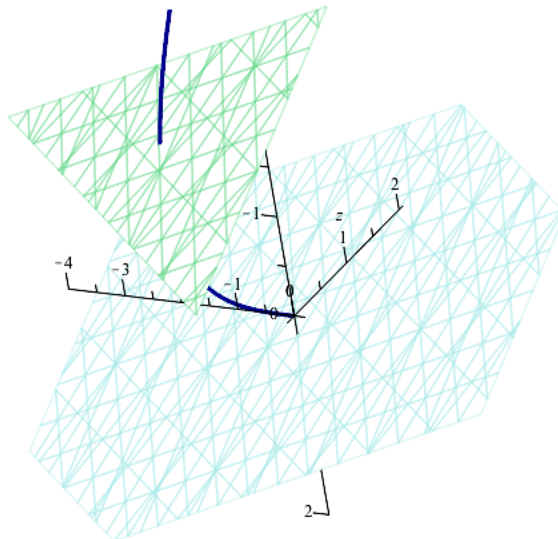
Luego, buscamos t para el cual existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{r}'(t) = \alpha \mathbf{n}$$

siendo $\mathbf{n}$ la normal del plano. En este caso, por simple inspección $\mathbf{n} = (6, 6, -8)$. Con lo cual, debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 3t^2 &= 6\alpha \\ 3 &= 6\alpha \\ 4t^3 &= -8\alpha \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se sigue que $\alpha = 1/2$. Por lo tanto, basta notar que $\boxed{t = -1}$ para que queden satisfechas todas las ecuaciones. En efecto, graficando:



(c) Calculamos paso a paso el plano osculador en cada punto de la curva. Se tiene que:

$$\mathbf{r}'(t) = (1, -1, 2t)$$

Entonces,

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2 + 4t^2}$$

Es decir,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{(1, -1, 2t)}{\sqrt{2 + 4t^2}}$$

Derivamos para obtener $\mathbf{N}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(t) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{2+4t^2}}\right)(1,-1,2t) + \frac{(0,0,2)}{\sqrt{2+4t^2}} \\ &= -\frac{4t}{(2+4t^2)^{3/2}}(1,-1,2t) + \frac{(0,0,2)}{\sqrt{2+4t^2}} \\ &= \frac{(-4t, 4t, 2(2+4t^2) - 8t^2)}{(2+4t^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(-4t, 4t, 4)}{(2+4t^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{1}{(2+4t^2)^{3/2}}\sqrt{16 + 32t^2} = \frac{4}{(2+4t^2)^{3/2}}\sqrt{1+2t^2}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{(-t, t, 1)}{\sqrt{1+2t^2}}$$

Con ello,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(t) &= \mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\left(1+2t^2\right)}\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 1 & -1 & 2t\\ -t & t & 1\end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\left(1+2t^2\right)}\begin{pmatrix}-1-2t^2\\ -1-2t^2\\ t-t\end{pmatrix} = \frac{(-1,-1,0)}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestra primera observación es que el vector binormal en todo punto es constante. Es decir, la normal del plano osculador no varía. La ecuación del plano osculador viene dada por:

$$\Pi_{\mathbf{B}}(t)\ :\ \mathbf{B}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)) = 0$$

Solo nos falta demostrar que independiente del vector posición los planos son los mismos. ¿Cómo demostrábamos que dos planos eran coincidentes? Gráficamente se podía determinar que bastaba probar que:

- $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2 = 0$. Es decir, que las normales eran paralelas. Esto en este caso lo tenemos garantizado.
- $(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot\mathbf{n}_1 = 0$. Es decir, que $\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2$ fuera una dirección contenida dentro del plano. Sean t_1 y t_2 puntos de la curva cualesquiera tales que $t_1\neq t_2$. Entonces,

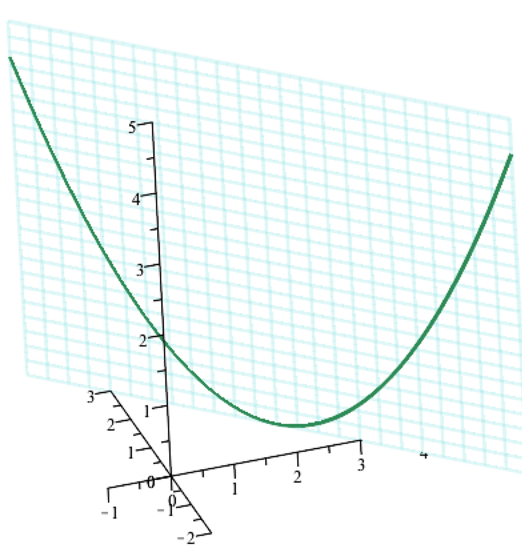
$$\mathbf{r}(t_1)-\mathbf{r}(t_2) = \begin{pmatrix}t_1-t_2\\ t_2-t_1\\ \left(t_1^2-t_2^2\right)/2\end{pmatrix} \to \mathbf{B}\cdot[\mathbf{r}(t_1)-\mathbf{r}(t_2)] = 0$$

Se sigue entonces que los planos son coincidentes. Esto prueba que la curva es *plana*. Es decir, que todo punto de la curva está contenido en un mismo plano.

En efecto, el plano que contiene a la curva es el plano osculador en cualquier punto y esto puede comprobarse de forma sencilla con el camino gráfico considerando que el plano osculador en este caso puede representarse para $t=0$ (y por lo tanto para todo punto en la curva) como:

$$-x-y=-3\to\boxed{\Pi_{\mathbf{B}}\ :\ x+y=3}$$

Graficando:



Problema 4.13:

(a) Demuestre que para una curva parametrizada por $\mathbf{r}(t)$ dos veces diferenciable la curvatura puede expresarse como:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

(b) Demuestre que para una curva cualquiera:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa \mathbf{N}.$$

(c) Demuestre que para una curva paramétrica plana en $\mathbb{R}^2$ la curvatura puede expresarse como

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}$$

y con esto calcule la curvatura de la circunferencia $\gamma(t) = (r\cos(t), r\ \mathrm{sen}(t))$.

Solución:

(a) Para todas las propiedades geométricas de las curvas existen expresiones de este estilo. En este problema determinaremos unas de las más sencillas, que es la curvatura. Partamos de lo básico que es la definición de curvatura:

$$\kappa(s) = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right\|$$

por regla de la cadena. Luego,

$$\kappa(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t}\right\|$$

Dado que en la expresión final si aparece la norma del vector derivada, entonces solo debemos concentrar nuestros esfuerzos en determinar una expresión para la norma de la derivada del vector tangente.

Partamos de la definición de vector tangente:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \to \mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\,\mathbf{T}(t)$$

Derivando:

$$\mathbf{r}''(t) = \underbrace{\frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}}_{(*)}\mathbf{T}(t) + \|\mathbf{r}'(t)\|\,\mathbf{T}'(t)$$

Observe que $(*)$ lo calculamos en un problema anterior, por lo cual se aplicó directamente. Ahora bien, observe que si multiplicamos vectorialmente por $\mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\,\mathbf{T}(t)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) &= \mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)\,\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}(t) + \|\mathbf{r}'(t)\|^2\,\mathbf{T}'(t)\times\mathbf{T}(t) \\ &= \|\mathbf{r}'(t)\|^2\,\mathbf{T}'(t)\times\mathbf{T}(t)\end{aligned}$$

Tomando la norma conseguimos la norma de $\mathbf{T}'(t)$, que es precisamente lo que requerimos calcular. De esta forma,

$$\left\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\right\| = \left\|\mathbf{r}'(t)\right\|^2 \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t}\right\| \left\|\mathbf{T}\right\| \operatorname{sen}\alpha$$

Pero $\mathbf{T}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{T}$ pues $\mathbf{T}'(t) = \left\|\mathbf{T}'(t)\right\|\mathbf{N}$ por definición de vector normal, y los vectores tangente y normal son perpendiculares. Luego, $\operatorname{sen}\alpha = 1$ y se puede despejar inmediatamente lo que buscamos:

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t}\right\| = \frac{\left\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\right\|}{\left\|\mathbf{r}'(t)\right\|^2}$$

Reemplazando en la definición de curvatura concluimos:

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\left\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\right\|}{\left\|\mathbf{r}'(t)\right\|^3}} \quad \blacksquare$$

(b) Observaremos que esto es más directo de lo que parece. Partamos considerando que como $\{\mathbf{B},\mathbf{T},\mathbf{N}\}$forman una base ortonormal para todo s, entonces existen constante α,β,γ reales tales que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{T} + \gamma\mathbf{N}$$

Pero $\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}s$ y $\mathbf{T}$ son perpendiculares pues $\mathbf{T}$ es unitario. Luego, tomando producto punto con $\mathbf{T}$ a ambos lados de la ecuación, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{T} &= \alpha\mathbf{B}\cdot\mathbf{T} + \beta\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} + \gamma\mathbf{N}\cdot\mathbf{T} \\ &= \beta\end{aligned}$$

Entonces, $\beta = 0$. Adicionalmente,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot(\mathbf{T}\times\mathbf{N}) = \mathbf{T}\cdot\left(\mathbf{N}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right)$$

Aquí es donde realizamos la observación importante de la demostración: $\mathbf{N}\times\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}s = 0$ pues de la definición de vector normal:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\left\|\mathbf{T}'(s)\right\|}$$

pues son vectores paralelos. Entonces, $\alpha = 0$ y por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\mathbf{N}$$

Por simple inspección de la penúltima ecuación presentada, notamos que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right\|\mathbf{N}$$

y por definición $\left\|\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right\| = \kappa(s)$, demostrando así lo pedido. $\blacksquare$

(c) Uno de los problemas de utilizar la fórmula deducida en (a) es que esta solo funciona en $\mathbb{R}^3$ pues el producto cruz no está definido en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, una curva en $\mathbb{R}^2$ puede entenderse como una curva cuya componente z es nula o constante. De esta forma, podemos decir que:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \to \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ 0 \end{pmatrix} \to \mathbf{r}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo cual,

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'y'' - x''y' \end{pmatrix}$$

Luego, es directo que:

$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = |x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)|$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\|^3 = \left[x'(t)^2 + y'(t)^2\right]^{3/2}$$

Reemplazando en la definición de curvatura, finalmente se tiene que:

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}} \quad \blacksquare$$

Utilizando esto para $(r\cos t, r \operatorname{sen} t)$ derivamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (-r \operatorname{sen} t, r\cos t) \\ \to \mathbf{r}''(t) &= (-r\cos t, -r \operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\kappa(t) = \frac{|r^2 \operatorname{sen}^2 t + r^2 \cos^2 t|}{[r^2 \operatorname{sen}^2 t + r^2 \cos^2 t]^{3/2}}$$

$$\to \boxed{\kappa(t) = \frac{1}{r}}$$

Acabamos de determinar que para una circunferencia plana de radio r la curvatura viene dada por:

$$\kappa = \frac{1}{r} \to r = \frac{1}{\kappa}$$

Esto precisamente motiva la definición de radio de curvatura: para una curva γ se define el radio de curvatura como:

$$\boxed{r(s) \triangleq \frac{1}{\kappa(s)}}$$

Observe que es fácil determinar que para una recta cualquiera la curvatura es cero, con lo cual el radio de curvatura es infinito. Efectivamente, una recta puede entenderse como una circunferencia de radio infinito. Por lo cual, sin importa si la veamos localmente o de forma lejana, siempre el radio es tan grande que vemos la circunferencia como una recta en el lugar donde la grafiquemos.

De la misma forma, dado que una curva define localmente una circunferencia de radio $1/\kappa$, definimos el **círculo osculador** (o circunferencia osculatriz) como la circunferencia que localmente aproxima a la curva en t. Su radio es $1/\kappa$ y su centro se ubica a $1/\kappa$ unidades en la dirección $\mathbf{N}$. Es decir, el centro viene dado por:

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N}(t)$$

Y por lo tanto la circunferencia osculatriz puede expresarse como:

$$\boxed{\mathcal{C}(t) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left\|\mathbf{x} - \left[\mathbf{r}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{N}(t)\right]\right\| = \frac{1}{\kappa(t)}\right\}}$$

Problema 4.14: Determine la ecuación de una parábola contenida en el plano xy que tenga curvatura igual a 4 en el origen.

Solución:

Supongamos que la parábola es de la forma $(t, at^2 + bt + c, 0)$ para cumplir con todas las especificaciones. Como la parábola debe pasar por el origen, inmediatamente $c = 0$.

Haciendo uso de la fórmula anterior se puede determinar fácilmente la curvatura:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\left[x'(t)^2 + y'(t)^2\right]^{3/2}}$$

Calculamos la primera y segunda derivada:

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2at + b, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}''(t) = (1, 2a, 0)$$

Es decir,

$$\kappa(0) = \frac{|2a - 0|}{\left[1 + b^2\right]^{3/2}}$$

Luego, a y b deben ser tales que:

$$\boxed{\kappa(0) = \frac{2|a|}{\left(1 + b^2\right)^{3/2}} = 4}$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones. Centrando la parábola en el origen, hacemos $b = 0$ y por lo tanto $a = \pm 2$. Luego, estas son dos de infinitas soluciones posibles.

Problema 4.15: Calcule la curvatura de la cicloide $x(t) = t - \operatorname{sen}(t)$, $y(t) = 1 - \cos(t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Determine el punto en que la curvatura de esta curva es mínima y calcule su valor.

Solución:

Derivamos la curva dos veces:

$$\mathbf{r}'(t) = (1 - \cos(t), \operatorname{sen}(t)) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}''(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t))$$

Si aplicamos la misma fórmula anterior obtenemos que:

$$\kappa(t) = \frac{|\cos(t) - \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)|}{[1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)]^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}|1-\cos(t)|}$$

Luego, la curvatura es mínima cuando el denominador de esta expresión es máximo. Es decir, cuando $\cos(t) = -1$. Entonces en el intervalo $[0, 2\pi]$ esto se logra en $\boxed{t = 3\pi/2}$. Evaluando,

$$\boxed{\kappa\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^{5/2}}}$$

Problema 4.16:

(a) Demuestre que $\mathrm{d}\mathbf{B}/\mathrm{d}s$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y a $\mathbf{T}$.

(b) Deduzca que existe $\tau(s) \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau(s)\,\mathbf{N}$$

que se conoce como *torsión* de la curva. Encuentre una expresión explícita para τ.

(c) Demuestre que si la curva es plana entonces $\tau(s) = 0$ para todo s.

Solución:

(a) Esto es equivalente a demostrar que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{T} = 0$$

Para la primera igualdad observe que como los vectores son unitarios, entonces para todo $s \in [0, \ell]$:

$$\|\mathbf{B}(s)\|^2 = 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{B}(t)\|^2 = 2\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Para la segunda igualdad, notemos que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}$$

Haciendo producto punto,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{T} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \times \mathbf{N}\right) \cdot \mathbf{T} + \left(\mathbf{T} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}\right) \cdot \mathbf{T}$$

Pero $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \times \mathbf{N}\right) = (\kappa\mathbf{N} \times \mathbf{N}) = 0$ donde se aplicó la definición de vector normal.

Por definición de producto cruz se tiene que:

$$\left(\mathbf{T} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}\right) \cdot \mathbf{T} = 0$$

con lo cual $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{T} = 0$, demostrando así lo pedido. ■

(b) Como $\{\mathbf{B}(s), \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ forma un conjunto ortonormal para todo s, entonces es condición necesaria que exista $\alpha(s) \in \mathbb{R}$ (pudiendo ser el vector nulo) tal que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = \alpha(s)\,\mathbf{N}$$

Basta definir $\alpha(s) = -\tau(s)$ para llegar a lo pedido. ■ Para encontrar la expresión explícita basta notar que $\mathbf{N}$ es unitario, de modo que al tomar el producto punto a ambos lados de la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau(s)\,\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau(s)$$

Finalmente,

$$\boxed{\tau(s) = -\mathbf{N} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}}$$

(c) Por definición, si la curva es plana, entonces existe $\mathbf{n}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ fijos (con $\mathbf{n}$ evidentemente no nulo) tales que para todo $s \in [0, \ell]$ se cumple que

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}] = 0$$

Entonces,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(s) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

Como $\mathbf{n}$ es constante, al derivar:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'(s) = 0 \rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0$$

Derivando nuevamente,

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = 0$$

Aplicando la definición de curvatura se tiene que $\mathbf{n} \cdot \kappa\mathbf{N} = 0$. Si suponemos que $\kappa = 0$ para todo s, entonces el radio de curvatura es cero y por lo tanto la curva es una recta, razón por la cual evidentemente está contenida en un plano (de hecho, en infinitos). Por el contrario, si la curva sí tiene curvatura, entonces necesariamente por ser curva plana $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0$.

No es pertinente seguir derivando por ahora. Observe que como $\mathbf{n}$ es no nulo y ortogonal a $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, entonces existe $\beta(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{n} = \beta(s)\,\mathbf{B}$$

Pero $\mathbf{B}$ es unitario, de modo que $\beta(s) = \pm\|\mathbf{n}\|$ (constante) para todo s. De esta forma, se sigue que

$$\mathbf{B} = \pm\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = 0$$

Por lo tanto, concluimos inmediatamente que $\tau(s) = 0$. ■

Cabe rescatar del problema anterior, que se definió la torsión $\tau(s)$ como el escalar tal que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau(s)\,\mathbf{N}$$

Entonces, haciendo producto punto a ambos lados con $\mathbf{N}$ (recuerde que el vector normal es unitario) se tiene que:

$$\boxed{\tau(s) = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{N}(s)}$$

Demostramos que para una curva plana (que se encuentra contenida en un plano) se cumple que $\tau(s) = 0$ para todo s. Para una parametrización tres veces diferenciable se puede demostrar mediante un ejercicio similar al anterior que:

$$\boxed{\tau(t) = \frac{[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)]}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|^2}}$$

Se puede demostrar que la expresión recíproca también se cumple del problema anterior, que es lo que haremos en el siguiente problema.

Problema 4.17: Demuestre la expresión recíproca a la parte (c) del problema anterior. Es decir, demuestre que si la torsión de una curva es cero, entonces esta está contenida en un plano.

Solución:

Por definición la torsión es:

$$\tau(s) = -\mathbf{N}\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}$$

Luego, si esta es cero, como $\mathbf{N}$ es siempre unitario para una curva suave, tendrá que cumplirse que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = 0$$

Integrando, concluimos que $\mathbf{B}(s) = \mathbf{B}_0$. Es decir, el vector binormal es constante y con valor $\mathbf{B}_0$. Dado que,

$$\mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\,\mathbf{T}(t)$$

entonces como $\mathbf{T}$ y $\mathbf{B}$ son siempre ortogonales se tendrá que:

$$\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{B} = \|\mathbf{r}'(t)\|\,\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{B} = 0$$

pero como $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0$, entonces para todo t tendremos que $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{B}_0 = 0$. Aprovechando la linealidad de la integral integramos esta última ecuación:

$$\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{B}_0 = 0 \longrightarrow \int_{t_0}^{t}\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t\cdot\mathbf{B}_0 = 0$$

Haciendo $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ concluimos que:

$$\boxed{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{B}_0 = 0} \leftarrow \text{¡}\Pi_{\mathbf{B}}!$$

Es decir, la curva está contenida en un plano de posición $\mathbf{r}_0$ y posición $\mathbf{B}_0$, el que no es más que su plano osculador como acabamos de comprobar.

Luego, para demostrar que una curva es plana dada una parametrización cualquiera basta probar que el producto mixto del numerador es cero, i.e. los vectores $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$ y $\mathbf{r}'''(t)$ son coplanares. En los últimos problemas trabajaremos en base a esto.

Problema 4.18:

(a) Demuestre que la curva $\mathbf{r}(t) = \left(t, \dfrac{1+t}{t}, \dfrac{1-t^2}{t}\right)$ es plana.

(b) ¿Cómo debe ser la función $f(t)$ para que la curva $\mathbf{r}(t) = (a\cos(t), a\ \mathrm{sen}(t), f(t))$ sea plana? Dé algunos ejemplos de $f(t)$ que cumplan estas condiciones.

Propuesto: Determine las condiciones para $\mathbf{r}_2(t) = (a\cosh(t), a\ \mathrm{senh}(t), f(t))$.

Solución:

(a) Demostraremos que para todo t:

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''] = 0$$

Calculemos entonces, primero simplificando:

$$\mathbf{r}(t) = \left(t, \frac{1}{t} + 1, \frac{1}{t} - t\right)$$

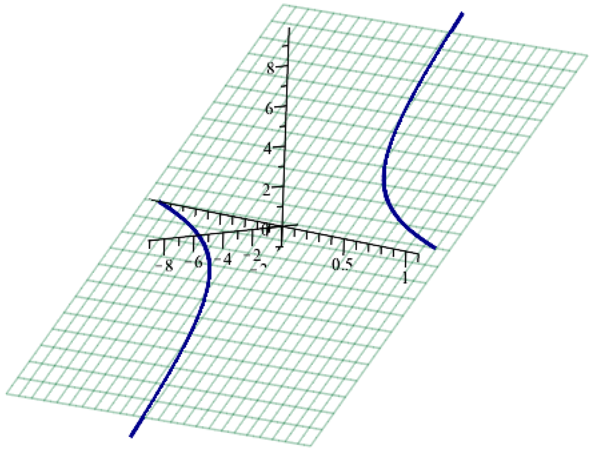
Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \left(1, -\frac{1}{t^2}, -\frac{1}{t^2} - 1\right) \\
\mathbf{r}''(t) &= \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right) \\
\mathbf{r}'''(t) &= \left(0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'''(t) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 2/t^3 & 2/t^3 \\ 0 & -6/t^4 & -6/t^4 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

Con lo cual inmediatamente $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''] = 0$, demostrando así lo pedido. ■ Comprobamos gráficamente:



(b) Para que la curva sea plana entonces necesariamente su torsión debe ser cero. Entonces, basta imponer para $f(t)$ que:

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''] = 0$$

Derivando:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= (-a \text{ sen } t, a\cos t, f'(t)) \\
\mathbf{r}''(t) &= (-a\cos t, -a \text{ sen } t, f''(t)) \\
\mathbf{r}'''(t) &= (a \text{ sen } t, -a\cos t, f'''(t))
\end{aligned}$$

Haciendo el producto cruz:

$$\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'''(t) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -a\cos t & -a \text{ sen } t & f''(t) \\ a \text{ sen } t & -a\cos t & f'''(t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -a \text{ sen } t f'''(t) + a\cos t f''(t) \\ a \text{ sen } t f''(t) + a\cos t f'''(t) \\ a^2\cos^2 t + a^2 \text{sen}^2\, t \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''] &= a^2 \text{sen}^2\, t f'''(t) - a^2 \text{ sen } t\cos t f''(t) + a^2 \text{ sen } t\cos t f''(t) + a^2\cos^2 t f'''(t) + a^2 f'(t) \\
&= a^2 f'''(t) + a^2 f'(t)
\end{aligned}$$

Como a es un escalar cualquiera (no necesariamente nulo), entonces para que la curva sea plana necesariamente debe cumplirse que para todo t:

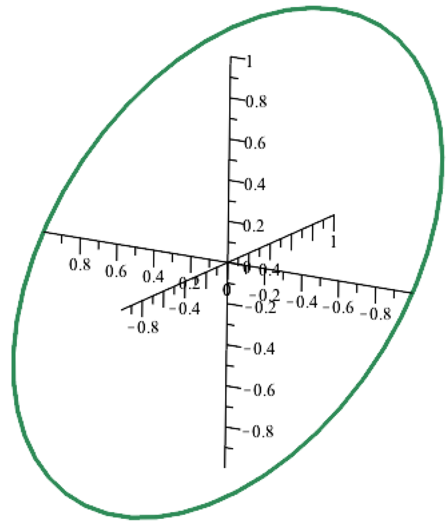
$$\boxed{f'''(t) + f'(t) = 0}$$

Mediante los conocimientos de Ecuaciones Diferenciales se puede demostrar que la solución de esta ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden es:

$$f(t) = \alpha + \beta\cos(t) + \gamma \text{ sen}(t)$$

con α, β, γ reales cualesquiera.

Graficando para $f(t) = \text{sen}(t)$ y $a = 1$:



A partir de estos problemas podemos resumir todas las fórmulas geométricas de curvas para una parametrización arbitraria:

- Vector tangente: $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$.
- Vector binormal: $\mathbf{B} = \dfrac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}$.
- Vector normal: $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$.
- Curvatura: $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$.
- Torsión: $\tau = \dfrac{[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)]}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}$.

Problema 4.19: Considere la curva $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \operatorname{sen} t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$$

(a) Calcule la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$ de $\mathbf{r}$.

(b) Determine los vectores tangente $\mathbf{T}$, normal $\mathbf{N}$ y binormal $\mathbf{B}$ de la curva $\mathbf{r}$.

Solución:

(a) Estas preguntas las calculamos a partir de las fórmulas ya deducidas para curvatura y torsión a partir de un parámetro arbitrario:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)]}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}$$

Requerimos entonces calcular hasta la tercera derivada de $\mathbf{r}(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \left(-\frac{4}{5}\operatorname{sen} t, -\cos t, \frac{3}{5}\operatorname{sen} t\right) \\
\mathbf{r}''(t) &= \left(-\frac{4}{5}\cos t, \operatorname{sen} t, \frac{3}{5}\cos t\right) \\
\mathbf{r}'''(t) &= \left(\frac{4}{5}\operatorname{sen} t, \cos t, -\frac{3}{5}\operatorname{sen} t\right)
\end{aligned}$$

Reemplazamos en la curvatura: el denominador es 1 pues $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$. Haciendo la expansión de términos podemos notar que:

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right) \to \|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = 1$$

En otras palabras,

$$\boxed{\kappa(t) = 1}$$

para todo t. Ahora calculamos la torsión. Ya sabemos que el denominador es 1. El numerador de la expresión es:

$$[\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)] \cdot \mathbf{r}'''(t) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\operatorname{sen} t, \cos t, -\frac{3}{5}\operatorname{sen} t\right) = 0$$

Es decir, $\boxed{\tau(t) = 0}$. Por lo tanto, la curva es una circunferencia contenida en algún plano (las circunferencias en $\mathbb{R}^3$ tienen curvatura constante y torsión nula).

Comentario: Observe que solo se requiere calcular un producto cruz para obtener tanto la curvatura y la torsión, razón por la cual en esta tipología de problemas es conveniente y recomendable calcular tanto las tres derivadas como el producto cruz de la primera y la segunda. El resto del procedimiento es reemplazar en las fórmulas.

(b) Dado que la norma de $\mathbf{r}'(t)$ es unitaria, entonces,

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathbf{r}'(t) = \left(-\frac{4}{5}\operatorname{sen} t, -\cos t, \frac{3}{5}\operatorname{sen} t\right)}$$

Asimismo, como $\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = 1$ entonces

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)}$$

Finalmente, podemos calcular $\mathbf{N}$ ya sea haciendo el producto cruz entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{T}$:

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)}$$

Problema 4.20:

(a) Para la curva $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ calcule su curvatura y su torsión. Encuentre la ecuación del plano osculador en cualquier punto de ella.

(b) Dada la curva paramétrica $\mathbf{r}(t) = (e^t, \cos(e^t), \operatorname{sen}(e^t))$ con $0 \leq t < \infty$, parametrice en longitud de arco y demuestre que $\tau + \kappa = 0$ para todo t.

Solución:

(a) Partamos calculando la curvatura y la torsión. Partamos por la curvatura, a través de la definición:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

Derivando,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \left(3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2\right) \\ \mathbf{r}''(t) &= (-6t, 6, 6t) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 - 3t^2 & 6t & 3 + 3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 36t^2 - 18 - 18t^2 \\ -18t - 18t^3 - 18t + 18t^3 \\ 18 - 18t^2 + 36t^2 \end{pmatrix} \\ &= 18 \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ -2t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| &= 18\sqrt{\left(t^2 - 1\right)^2 + 4t^6 + \left(t^2 + 1\right)^2} \\ &= 18\sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2 + t^4 + 2t^2 + 1} \\ &= 18\sqrt{2t^4 + 4t^2 + 2} \\ &= 18\sqrt{2}\left(t^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t)\|^3 &= \left[\left(3 - 3t^2\right)^2 + 36t^2 + \left(3 + 3t^2\right)^2\right]^{3/2} \\ &= \left[\left(3 - 3t^2\right)^2 + 36t^2 + \left(3 + 3t^2\right)^2\right]^{3/2} \\ &= \left[9 - 18t^2 + 9t^4 + 36t^2 + 9 + 18t^2 + 9t^4\right]^{3/2} \\ &= \left[18 + 36t^2 + 18t^4\right]^{3/2} \end{aligned}$$

Entonces, $\|\mathbf{r}'(t)\|^3 = 18\sqrt{18}\left(t^2+1\right)^3$. Con ello,

$$\kappa(t) = \frac{18\sqrt{2}\left(t^2+1\right)}{18\sqrt{18}\left(t^2+1\right)^3} = \frac{1}{3\left(t^2+1\right)^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\kappa(t) = \frac{1}{3\left(t^2+1\right)^2}}$$

Ahora calculamos la torsión mediante la fórmula

$$\tau(t) = \frac{[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)]}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}$$

Nos falta calcular:

$$\mathbf{r}'''(t) = (-6, 0, 6)$$

Observe que esto no es tan tedioso como parece, pues muchas de las cosas ya las tenemos calculadas:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)] &= [\mathbf{r}'''(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)] \\
&= \mathbf{r}'''(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)] \\
&= 108 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^2-1 \\ -2t \\ t^2+1 \end{pmatrix} \\
&= 216
\end{aligned}$$

Luego,

$$\tau(t) = \frac{12 \cdot 18}{2 \cdot 18^2\left(t^2+1\right)^2} = \frac{1}{3\left(t^2+1\right)^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\tau(t) = \frac{1}{3\left(t^2+1\right)^2}}$$

Para calcular el plano osculador requerimos determinar el vector binormal. Este puede determinarse a partir de la relación:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} \\
&= \frac{18}{18\sqrt{2}\left(t^2+1\right)} \begin{pmatrix} t^2-1 \\ -2t \\ t^2+1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\left(t^2+1\right)} \begin{pmatrix} t^2-1 \\ -2t \\ t^2+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{r}(t) = \left(3-3t^2, 6t, 3+3t^2\right)$, el plano en cualquier punto viene dado por:

$$\begin{pmatrix} t^2-1 \\ -2t \\ t^2+1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Entonces,

$$\left(t^2-1\right)x - 2ty + \left(t^2+1\right)z = 3\left[-\left(t^2-1\right)^2 + 2t + \left(1+t^2\right)^2\right]$$

$$\rightarrow \left(t^2-1\right)x - 2ty + \left(t^2+1\right)z = 3\left[t^4+2t^2+1-t^4+2t^2-1+2t\right]$$
$$\rightarrow \left(t^2-1\right)x - 2ty + \left(t^2+1\right)z = 3\left[4t^2+2t\right]$$

Finalmente,

$$\boxed{\Pi_{\mathbf{B}}(t) \;:\; \left(t^2-1\right)x - 2ty + \left(t^2+1\right)z = 3\left[4t^2+2t\right]}$$

(b) Partamos realizando la parametrización en arcoparámetro. Se tiene que:

$$\mathbf{r}'(t) = \left(e^t, -\operatorname{sen}\left(e^t\right)e^t, \cos\left(e^t\right)e^t\right)$$

Entonces,

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = e^t\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\left(e^t\right)+\cos^2\left(e^t\right)}$$
$$\rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2}e^t$$

Integrando,

$$s(t) = \sqrt{2}\int_0^t e^{\tau}\mathrm{d}\tau \rightarrow s(t) = \sqrt{2}\left(e^t-1\right)$$

Despejando, $t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right)$. Luego,

$$\boxed{\mathbf{r}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1, \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right)\right)}$$

Entonces, por simple derivación,

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right)\right)$$

Luego,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{r}''(s) = \left(0, -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right), -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right)\right)$$

Calculamos directamente la curvatura,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right\| &= \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right)} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \kappa(s) = \frac{1}{2}$$

Para la torsión calculamos

$$\mathbf{r}'''(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(0, \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right), -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}-1\right)\right)$$

Luego,

$$\tau(s) = \frac{\left[\mathbf{r}'(s), \mathbf{r}''(s), \mathbf{r}'''(s)\right]}{\|\mathbf{r}'(s)\times\mathbf{r}''(s)\|^2}$$

Calculando las expresiones vectoriales (esto se deja propuesto al lector), se obtiene que

$$\tau(s) = -\frac{1}{2} \to \boxed{\kappa(s) + \tau(s) = 0}$$

demostrando así lo pedido. ■

Finalizamos con un problema de parámetros:

Problema 4.21: Sea la curva $\gamma_{a,b,c}$ parametrizada por:

$$\mathbf{r}(t) = \left(a + t + t^2, t^2 + bt^3, t + ct^3\right)$$

(a) Determine condiciones sobre a, b y c de modo que $\gamma_{a,b,c}$, sea una curva plana.

(b) Para $\gamma_{a,b,c}$ encontrada, encuentre la ecuación normal del plano que la contiene.

Solución:

(a) Para que la curva sea plana requerimos que la torsión sea cero, o bien:

$$[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)] = 0$$

Calculamos,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \left(1 + 2t, 2t + 3bt^2, 1 + 3ct^2\right) \\
\mathbf{r}''(t) &= (2, 2 + 6bt, 6ct) \\
\mathbf{r}'''(t) &= (0, 6b, 6c)
\end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'''(t) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & 2 + 6bt & 6ct \\ 0 & 6b & 6c \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 12c + 36bct - 36bct \\ -12c \\ 12b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12c \\ -12c \\ 12b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) \cdot [\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'''(t)] &= 12c + 24ct - 24ct - 36bct^2 + 12b + 36bct^2 \\
&= 12(c + b)
\end{aligned}$$

Luego, debe cumplirse que:

$$12(c + b) = 0 \to \boxed{c + b = 0}$$

y a puede tomar cualquier valor.

(b) De esta forma, la curva se puede parametrizar como:

$$\mathbf{r}(t) = \left(a + t + t^2, t^2 + bt^3, t - bt^3\right)$$

Es sabido ya que el plano que contiene a una curva plana es el plano osculador, por lo cual requerimos calcularlo **en un punto cualquiera.** Para eso, necesitamos el vector $\mathbf{B}$ (*o un vector proporcional a él*). En este caso, el plano más conveniente es obviamente el obtenido en $t = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (a, 0, 0) \\ \mathbf{r}'(0) &= (1, 0, 1) \\ \mathbf{r}''(0) &= (2, 2, 0) \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)}{\|\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)\|}$$

Calculando,

$$\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, una normal del plano osculador es $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$. Con lo cual,

$$\Pi \ : \ (1, -1, -1) \cdot (x, y, z) = (1, -1, -1) \cdot (a, 0, 0)$$

Finalmente,

$$\boxed{\Pi \ : \ (1, -1, -1) \cdot (x, y, z) = a}$$

Que es una posible ecuación normal buscada.

Problema 4.22: [**Propuesto**] Encuentre condiciones sobre a y b de modo que la curva

$$\mathbf{r}(t) = (a \cosh(t), b \cosh(t), bt)$$

tenga curvatura y torsión iguales en todos sus puntos.

4.3. El Teorema Fundamental de Curvas

Ya hemos demostrado en problemas anteriores las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} &= \kappa \mathbf{N} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} &= -\tau \mathbf{N} \end{aligned}$$

Junto a la siguiente identidad:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$$

conforman el Teorema Fundamental de Curvas. Se define el conjunto $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$, una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, como el Triedro de Frenêt-Serret.

Asimismo, este teorema puede ser compactado en la notación:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\\mathbf{N}\\\mathbf{B}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\\mathbf{N}\\\mathbf{B}\end{pmatrix}}$$

Observe que la matriz presentada es antisimétrica, i.e. $\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A} = 0$.

A continuación demostraremos la identidad faltante del teorema en cuestión y revisaremos diversas aplicaciones prácticas de este teorema.

Problema 4.23: Demuestre las identidades:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$.

(b) $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\tau$.

(c) $\mathbf{B} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = \tau$.

(d) $\mathbf{T} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa$.

Solución:

(a) Dado que el Triedro de Frenêt-Serret forma una base ortonormal, entonces existen α, β, γ reales tales que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = \alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{N} + \gamma\mathbf{B}$$

Pero $\mathbf{N}$ es un vector unitario, de modo que $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{N} = 0$. Entonces, $\beta = 0$. Por determinar α y γ.

Si queremos determinar el valor de γ, hacemos producto punto con $\mathbf{B}$ y consideramos que este es unitario. Es decir,

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{B}$$

La pregunta es entonces cómo determinamos el valor de este producto punto. Observe que esa expresión es muy sencilla obtenerla a partir de la derivada del producto punto entre $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{B} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{N} = 0 \leftarrow \text{pues } \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Por definición de torsión:

$$\tau = -\mathbf{N} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}$$

Es decir,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{B} - \tau = 0 \rightarrow \gamma = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{B} = \tau$$

Para calcular α razonamos análogamente, multiplicando la combinación lineal por $\mathbf{T}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{T} = \alpha$$

Para calcular este producto punto, hacemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{T} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{N} = 0$$

Recordemos la primera ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{N} \to \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{N} = \kappa$$

Luego, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{T} + \kappa = 0 \to \alpha = -\kappa$. Finalmente,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}} \quad \blacksquare$$

(b) Para los problemas siguientes no basta más que aplicar las identidades anteriormente obtenidas:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{N}\cdot -\tau\mathbf{B} = -\kappa\tau \quad \blacksquare$$

(c) Reemplazando $\mathrm{d}\mathbf{N}/\mathrm{d}s$ con $-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} &= \mathbf{B}\cdot(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) \\ &= -\kappa\mathbf{B}\cdot\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \\ &= \tau \quad \blacksquare\end{aligned}$$

(d) Nuevamente haciendo el reemplazo:

$$\mathbf{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{T}\cdot(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) = -\kappa \quad \blacksquare$$

Problema 4.24: Determine $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ tal que:

$$\mathbf{x}\times\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \quad ; \quad \mathbf{x}\times\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \quad ; \quad \mathbf{x}\times\mathbf{N} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}$$

Ayuda: $\{\mathbf{B},\mathbf{T},\mathbf{N}\}$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$. Luego, existen $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{T} + \gamma\mathbf{N}$$

Solución:

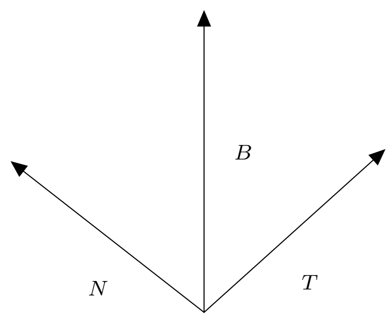
Sigamos la indicación de la ayuda. Entonces, reemplazando en la primera ecuación:

$$(\alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{T} + \gamma\mathbf{N})\times\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}$$

Tendremos que calcular diversos productos cruz. Para ellos, podemos ayudarnos de la regla de la mano derecha y de la ubicación en el plano del Triedro de Frenêt-Serret en un punto cualquiera de una curva:

Regla de la mano derecha:

Triedro de Frenêt-Serret:



Se sigue que:

$$\alpha\,\cancel{\mathbf{B}\times\mathbf{B}} + \beta\,\underbrace{\mathbf{T}\times\mathbf{B}}_{-\mathbf{N}} + \gamma\,\underbrace{\mathbf{N}\times\mathbf{B}}_{\mathbf{T}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}$$

Entonces, aplicando el Teorema Fundamental de Curvas:

$$-\beta\mathbf{N} + \gamma\mathbf{T} = -\tau\mathbf{N} \to \beta = \tau \quad \text{y} \quad \gamma = 0$$

Análogamente,

$$(\alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{T} + \gamma\mathbf{N}) \times \mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{N}$$

Luego,

$$\alpha\,\underbrace{\mathbf{B}\times\mathbf{T}}_{\mathbf{N}} + \beta\,\cancel{\mathbf{T}\times\mathbf{T}} + \gamma\,\underbrace{\mathbf{N}\times\mathbf{T}}_{-\mathbf{B}} = \kappa\mathbf{N}$$

Se sigue que $\alpha = \kappa$ y $\gamma = 0$. Finalmente, reemplazamos en la última ecuación:

$$\mathbf{x}\times\mathbf{N} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

Es decir,

$$\alpha\,\underbrace{\mathbf{B}\times\mathbf{N}}_{-\mathbf{T}} + \beta\,\underbrace{\mathbf{T}\times\mathbf{N}}_{\mathbf{B}} + \gamma\,\cancel{\mathbf{N}\times\mathbf{N}} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

de donde se confirma que $\alpha = \kappa$ y $\beta = \tau$. Finalmente,

$$\boxed{\mathbf{x} = \kappa\mathbf{B} + \tau\mathbf{T}}$$

Problema 4.25: Si $\mathbf{r}$ representa una curva dos veces diferenciable, pruebe que:

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{T}}{\mathrm{d}s^2} \right\| = \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

Solución:

A partir del Teorema Fundamental de Curvas sabemos que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa \mathbf{N}$$

Esta identidad es en extremo útil en este problema pues hace la conexión entre vector tangente y curvatura. Luego, derivando para obtener el segundo término:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{T}}{\mathrm{d}s^2} = \kappa' \mathbf{N} + \kappa \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = \kappa' \mathbf{N} + \kappa \left(-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \right)$$

Es decir, expandiendo en términos de estos vectores:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{T}}{\mathrm{d}s^2} &= \cancel{\kappa \mathbf{N} \times \kappa' \mathbf{N}} - \kappa^3 \underbrace{\mathbf{N} \times \mathbf{T}}_{\mathbf{B}} + \kappa^2 \tau \underbrace{\mathbf{N} \times \mathbf{B}}_{\mathbf{T}} \\ &= \kappa^3 \mathbf{B} + \kappa^2 \tau \, \mathbf{T} \end{aligned}$$

Como ambos son vectores unitarios, al tomar el módulo de este vector, la norma será la suma de ambos ponderadores al cuadrado. Es decir,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{T}}{\mathrm{d}s^2} \right\| &= \left\| \kappa^3 \mathbf{B} + \kappa^2 \tau \, \mathbf{T} \right\| \\ &= \sqrt{\kappa^6 + \kappa^4 \tau^2} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{T}}{\mathrm{d}s^2} \right\| = \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2},$$

demostrando así lo pedido. ■

Problema 4.26: Sea $\vec{\gamma}$ la curva definida por $\vec{\gamma}(t) = \left(t, \sqrt{2} \ln(\sec t), \tan t - t\right)$ con $t \in [0, \pi/3]$.

(a) Reparametrice la curva en longitud de arco.

(b) Sabiendo que:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\left(1, \sqrt{2} \tan t, \tan^2 t\right)}{\sec^2(t)} \quad ; \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\left(-\sqrt{2} \tan t, 1 - \tan^2 t, \sqrt{2} \tan t\right)}{\sec^2 t}$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\left(\tan^2 t, -\sqrt{2} \tan t, 1\right)}{\sec^2 t}$$

Determine $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ para todo $s \in [0, \ell]$.

Solución:

(a) Calculamos $s(t)$ en primer lugar, para ello partimos derivando la curva:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}'(t) &= \left(1, \sqrt{2}\frac{\tan t \cdot \sec t}{\sec t}, 1 + \tan^2 t - 1\right) \\ &= \left(1, \sqrt{2}\tan t, \tan^2 t\right)\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|\vec{\gamma}'(t)\| &= \sqrt{1 + 2\tan^2 t + \tan^4 t} \\ &= \sqrt{(1 + \tan^2 t)} \\ &= 1 + \tan^2 t \quad \text{pues } 1 + \tan^2 t > 0\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t 1 + \tan^2 \tau \, \mathrm{d}\tau \\ &= \tan(t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Se sigue que $t = \arctan(s)$. Reemplazando en la parametrización de la curva concluimos que:

$$\vec{\gamma}(s) = \left(\arctan(s), \sqrt{2}\ln(\sec\arctan s), s - \arctan(s)\right)$$

Tenemos que:

$$1 + \tan^2 \arctan s = \sec^2 \arctan s \to \sec \arctan s = \sqrt{1 + s^2}$$

Es decir,

$$\boxed{\vec{\gamma}(s) = \left(\arctan(s), \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(1 + s^2\right), s - \arctan(s)\right)}$$

(b) Dado que por definición $\kappa(s) = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right\|$, es evidente entonces que nos conviene reparametrizar $\mathbf{T}$ en el arcoparámetro y a continuación derivar y tomar la norma.

$$\to \mathbf{T}(s) = \frac{\left(1, \sqrt{2}s, s^2\right)}{1 + s^2}$$

Derivando,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= -\frac{2s}{\left(1 + s^2\right)^2}\left(1, \sqrt{2}s, s^2\right) + \frac{\left(0, \sqrt{2}, 2s\right)}{\left(1 + s^2\right)} \\ &= \frac{\left(-2s, \sqrt{2} + \sqrt{2}s^2 - 2\sqrt{2}s^2, 2s + 2s^3 - 2s^3\right)}{\left(1 + s^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(-2s, \sqrt{2}\left(1 - s^2\right), 2s\right)}{\left(1 + s^2\right)^2}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \frac{\sqrt{4s^2+2\left(1-s^2\right)^2+4s^2}}{\left(1+s^2\right)^2} = \frac{\sqrt{4s^2+2-4s^2+2s^4+4s^2}}{\left(1+s^2\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{\left(1+s^2\right)^2}}{\left(1+s^2\right)^2}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\kappa(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1+s^2\right)}}$$

Ahora calculemos la torsión, también a partir de la definición, lo cual nos entrega inmediatamente el resultado en términos del arcoparámetro:

$$\tau(s) = -\mathbf{N}(s)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}$$

Reparametrizamos $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ en términos del arcoparámetro. Se tiene entonces que:

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\left(-\sqrt{2}s, 1-s^2, \sqrt{2}s\right)}{1+s^2}$$

$$\mathbf{B}(s) = \frac{\left(s^2, -\sqrt{2}s, 1\right)}{1+s^2}$$

Observe que las componentes de $\mathbf{B}(s)$ son las mismas que las de $\mathbf{T}(s)$, salvo que se alterna el orden y un signo. De esta forma,

$$\mathbf{B}'(s) = \frac{\left(2s, \sqrt{2}\left(s^2-1\right), -2s\right)}{\left(1+s^2\right)^2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\tau(s) &= \frac{2\sqrt{2}s^2+\sqrt{2}\left(s^2-1\right)^2+2\sqrt{2}s^2}{\left(1+s^2\right)^3} = \frac{\sqrt{2}}{\left(1+s^2\right)^3}\left(4s^2+s^4-2s^2+1\right) \\ &= \sqrt{2}\frac{\left(s^2+1\right)^2}{\left(1+s^2\right)^3}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\tau(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1+s^2\right)}}$$

Problema 4.27: Sea $\vec{\gamma} : [0,\ell] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por arco y sea $\mathbf{N}$ su vector normal unitario.

(a) Pruebe que si

$$\vec{\gamma}\times\mathbf{N} = 0$$

para todo $s \in [0,\ell]$, entonces la curvatura es constante.

(b) Demuestre que si existe $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^3$ unitario tal que $\gamma \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$ para todo $s \in [0, \ell]$ entonces

$$\kappa(s) = 0 \quad \text{ó} \quad \tau(s) = 0$$

para todo s.

Solución:

(a) Partamos interpretando geométricamente el enunciado: el vector posición (**¡no el tangente!**) es paralelo al vector normal en todo punto. Un ejemplo típico de este caso es en una circunferencia centrada en el origen, en la cual la normal siempre apunta al centro del círculo osculador, el origen. Por lo tanto, es esperable que la curvatura sea constante.

Ahora bien, que $\gamma \times \mathbf{N} = 0$ para todo s implica que los vectores son paralelos. La forma de conectar esta ecuación con la curvatura es a través de la represnetación ponderada. Como $\mathbf{N}$ es unitario, entonces:

$$\vec{\gamma}(s) = \pm \|\vec{\gamma}(s)\| \, \mathbf{N}$$

Derivando,

$$\vec{\gamma}'(s) = \alpha'(s)\, \mathbf{N} + \alpha(s) \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}$$

donde $\alpha(s) = \|\vec{\gamma}(s)\|$ para no complicarnos derivando por ahora. Aplicando el Teorema Fundamental de Curvas y notando que $\mathbf{T} = \gamma'(s)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(s) &= \alpha'(s)\mathbf{N}(s) + \alpha(s)\left(-\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s)\right) \\
&= \alpha'(s)\,\mathbf{N}(s) - \alpha(s)\,\kappa(s)\,\mathbf{T}(s) + \alpha(s)\,\tau(s)\,\mathbf{B}(s)
\end{aligned}$$

Reordenando términos,

$$[1 + \alpha(s)\,\kappa(s)]\,\mathbf{T}(s) - \alpha'(s)\,\mathbf{N}(s) + \alpha(s)\,\tau(s)\,\mathbf{B}(s) = 0$$

El Triedro de Frenêt-Serret forma una base ortonormal. Luego, para que esta combinación lineal entregue cero como resultado las componentes de cada vector deben ser nulas.

$$1 + \alpha(s)\,\kappa(s) = 0 \to \kappa(s) = -\frac{1}{\alpha(s)}$$

lo cual parece a priori contradictorio pues queremos demostrar que $\kappa(s)$ es constante. Sin embargo, notemos que de la segunda contiene se puede observar que:

$$\alpha'(s) = 0 \to \alpha(s) = \text{cte.}$$

Es decir, $\kappa(s) = 1/\text{cte.}$ y por lo tanto la curvatura es constante. ■

(b) Como $\hat{\mathbf{e}}$ es un vector fijo, seguimos la misma lógica anterior: si derivamos obtenemos la ecuación:

$$\vec{\gamma}'(s) \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0 \to \mathbf{T}(s) \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$$

Derivando nuevamente,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0 \to \kappa\mathbf{N}(s) \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$$

Como el vector normal es siempre unitario y $\hat{\mathbf{e}}$ no nulo (pues también es unitario), entonces si los vectores no son normales entonces se sigue necesariamente que $\kappa(s) = 0$. Si $\kappa(s) \neq 0$, entonces podemos derivar nuevamente:

$$\left[\kappa'(s)\,\mathbf{N}(s) + \kappa(s)\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}\right]\cdot\hat{\mathbf{e}} = 0$$

Pero $\mathbf{N}(s)\cdot\hat{\mathbf{e}} = 0$ bajo la suposición de que $\kappa(s) \neq 0$. Luego, aplicando el Teorema Fundamental de Curvas se llega a que:

$$\kappa(s)\left(-\kappa(s)\,\mathbf{T}(s) + \tau(s)\,\mathbf{B}(s)\right)\cdot\hat{\mathbf{e}} = 0$$

Como $\kappa(s) \neq 0$ entonces

$$\kappa(s)\,\mathbf{T}(s)\cdot\hat{\mathbf{e}} = \tau(s)\,\mathbf{B}(s)\cdot\hat{\mathbf{e}}$$

Pero ya demostramos que $\mathbf{T}(s)\cdot\hat{\mathbf{e}} = 0$ al hacer la primera derivación. Luego,

$$\tau(s)\,\mathbf{B}(s)\cdot\hat{\mathbf{e}} = 0$$

Esto implica que o $\tau(s) = 0$ ó $\mathbf{B}(s)\cdot\hat{\mathbf{e}} = 0$. Sin embargo, ya vimos que $\mathbf{T}(s)\cdot\hat{\mathbf{e}} = 0$ y que $\mathbf{N}(s)\cdot\hat{\mathbf{e}} = 0$ bajo el supuesto de que $\kappa(s) \neq 0$. Por lo tanto, como $\hat{\mathbf{e}}$ es unitario entonces necesariamente $\mathbf{B}(s) = \pm\hat{\mathbf{e}}$. Luego, no queda más opción que $\tau(s) = 0$.

Por lo tanto, $\tau(s) = 0$ ó bien $\kappa(s) = 0$. $\blacksquare$

Problema 4.28:

(a) Demuestre que para una curva $\mathbf{r}(t)$ con derivadas continuas de segundo orden se cumple que:

$$\mathbf{r}''(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\right)\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathbf{N}$$

donde s es el arcoparámetro. Interprete este resultado.

(b) Considere la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, e^t)$. Sea $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ la velocidad de la curva, $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ su rapidez y $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ su aceleración. Pruebe que:

$$\|\mathbf{a}(t)\|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \kappa^2 v^4$$

y use esta ecuación para determinar la curvatura κ de la curva.

Solución:

(a) Tomemos entonces la curva y realicemos la derivación. Para ello, recordamos que:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Entonces,

$$\mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| \, \mathbf{T}(t)$$

Observe que la expresión final involucra $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, por lo cual es pertinente hacerla aparecer en esta ecuación. Recordamos que:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{r}'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \to \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

Es decir,

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathbf{T}(t)$$

Esto es un resultado más que razonable desde el punto de vista físico: la velocidad en cualquier instante se compone de la ponderación del vector tangente unitario por su rapidez (el módulo de la velocidad).

Ahora bien, derivando nuevamente,

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{T}(t) + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t}$$

Debemos manipular el segundo término para llegar a la expresión pedida. La forma más conveniente de hacerlo es recordar el Triedro de Frenêt-Serret:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa \mathbf{N}$$

Sin embargo, esta expresión involucra una derivada de s, y la expresión que tenemos involucra una derivada de t según la parametrización. ¿Cómo solucionamos esto? ¡Usando regla de la cadena!

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \kappa \mathbf{N}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

Es decir,

$$\boxed{\mathbf{r}''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{T}(t) + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathbf{N}(t)} \quad \blacksquare$$

Esta fórmula debiese resultar para el lector muchísimo más conocida de lo que se puede imaginar. Lo que dice esta fórmula es que la aceleración de la curva es la suma de una aceleración tangencial ($\mathrm{d}^2 s/\mathrm{d}t^2$) en la dirección del vector tangente unitario y una aceleración en el sentido de la normal dada por:

$$\frac{\text{rapidez}^2}{\text{radio de curvatura}} := \frac{v^2}{r}$$

Es decir, la componente normal representa una aceleración centrípeta apuntando al centro de curvatura, o bien, se puede entender como la aceleración de la circunferencia a la cual localmente se asemeja. De esta forma, este resultado es más que razonable de acuerdo a lo que sabemos de cinemática:

$$\text{aceleración} = a_{\text{tangencial}}\mathbf{T} + a_{\text{centrípeta}}\mathbf{N}$$

(b) Observe que basta tomar la ecuación anterior y en primer lugar reemplazar con lo visto:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{T}(t) + \kappa(t)\, v^2(t)\, \mathbf{N}(t)$$

Entonces, dado que **T** y **N** forma un conjunto ortonormal, entonces tomar la norma de la aceleración al cuadrado es equivalente a sumar cada un a de las componentes al cuadrado.

Es decir
$$\|\mathbf{a}(t)\|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \kappa^2 v^4 \quad \blacksquare$$

Observe que es muchísimo más sencillo manejar esta expresión, pues derivar la curva dos veces no es complicado:
$$\mathbf{r}'(t) = \left(-\operatorname{sen} t, \cos t, e^t\right) \to v(t) = \sqrt{1+e^{2t}}$$
$$\mathbf{r}''(t) = \left(-\cos t, -\operatorname{sen} t, e^t\right) \to \|\mathbf{a}(t)\|^2 = 1+e^{2t}$$

Entonces,
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{e^{2t}}{\sqrt{1+e^{2t}}}$$

Por lo tanto se cumple que:
$$1+e^{2t} = \frac{e^{4t}}{1+e^{2t}} + \kappa^2\left(1+e^{2t}\right)^2$$

Despejando κ:
$$\frac{\left(1+e^{2t}\right)^2 - e^{4t}}{\left(1+e^{2t}\right)^3} = \kappa^2 \to \kappa^2 = \frac{1+2e^{2t}+e^{4t}-e^{4t}}{\left(1+e^{2t}\right)} = \frac{1+2e^{2t}}{\left(1+e^{2t}\right)^3}$$

Finalmente, como todos los términos son positivos y el denominador nunca se anula:
$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\sqrt{1+2e^{2t}}}{\left(1+e^{2t}\right)^{3/2}}}$$

Problema 4.29: Un móvil sigue la trayectoria dada por la curva $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2-\alpha t, t^3)$. Determine el valor de α de modo que en $t=1$ la posición de la partícula tenga su dirección normal a la trayectoria.

Solución:

Sabemos del problema anterior que:
$$\mathbf{r}''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{T}(t) + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathbf{N}(t)$$

Para que la aceleración tenga dirección exclusivamente normal requerimos que:
$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{r}'(t)\| = 0$$

Por lo tanto, derivamos:
$$\mathbf{r}'(t) = \left(2t, 2t-\alpha, 3t^2\right) \to \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4t^2+4t^2-4\alpha t+\alpha^2+9t^4}$$

Es decir,
$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{(36t^3+16t-4\alpha)}{2\sqrt{9t^4+8t^2-4\alpha t+\alpha^2}}$$

Luego, en $t = 1$ el numerador toma valor $54 - 4\alpha$. Para que se anule la componente tangencial, imponemos que el numerador debe anularse en dicho punto, i.e:

$$4\alpha = 52 \rightarrow \boxed{\alpha = 13}$$

Problema 4.30: En este problema parametrizaremos vectorialmente una circunferencia plana $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$. Toda circunferencia plana en $\mathbb{R}^3$ puede entenderse como la intersección de un plano con una esfera, i.e. $\mathcal{C} = \Omega \cap \Pi$ donde Ω es una esfera de radio r y centro $\mathbf{c}$ y Π un plano de vector posición $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

(a) Determine condiciones para r, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{n}$ de modo que $\mathcal{C} \neq \varnothing$.

Para los siguientes problemas, asuma que se cumplen estas condiciones sobre r, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{n}$:

(b) Explique por qué la torsión de $\mathcal{C}$ es cero y demuestre que la curvatura de $\mathcal{C}$ es constante.

(c) Demuestre que para $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$ cualquiera su circunferencia osculatriz coincide con la curva $\mathcal{C}$.

(d) Parametrice vectorialmente la curva $\mathcal{C}$.

(e) Escriba una ecuación cartesiana para la intersección de la esfera $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$ con el plano $x + y + z = 2$. Grafique su resultado en Maple o MATLAB para comprobar.

Solución:

(a) Como la posición no tiene por qué estar contenida necesariamente en la esfera, no es tan directo como podría pensarse. Al trazar el plano con una circunferencia, lo que realmente se necesita es que la distancia del centro de la circunferencia al plano sea menor al radio, i.e.

$$d(\mathbf{c}, \Pi) < r$$

Reemplazando,

$$\boxed{d(\mathbf{c}, \Pi) = \frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{c})|}{\|\mathbf{n}\|} < r}$$

(b) Sea $\mathbf{r}(s)$ la parametrización en arcoparámetro de $\mathcal{C}$. Entonces, $\mathbf{r}(s) \subset \Pi$ pues $\mathbf{r}(s) = \Omega \cap \Pi$. Como existe un plano en el cual la curva está contenida, entonces la curva es plana, y tal como demostramos en un problema anterior, su torsión es cero.

Demostrar que la curvatura es constante es un trabajo más sofisticado. Para comprender esta demostración requeriremos mucha intuición geométrica. Observe que lo que esperamos es que se genere una circunferencia. Digamos por ahora que $\mathbf{o}$ es el centro de esta circunferencia. Se puede notar fácilmente de forma geométrica que

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{o} \parallel \mathbf{N}(s)$$

en todo punto puesto que la simetría radial así lo cumple. Esto es lo que tenemos entonces que demostrar. La pregunta subsecuente es, ¿qué es $\mathbf{o}$? El centro de la circunferencia se puede determinar tomando $\mathbf{c}$ y desplazándonos $d(\mathbf{c}, \Pi)\,\mathbf{n}$ unidades. Es decir,

$$\mathbf{c} + d(\mathbf{c}, \Pi)\,\mathbf{n} = \mathbf{o}$$

Se puede observar adicionalmente de forma geométrica que:

$$\|\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}\| = \text{cte.}$$

¿Cómo podemos demostrar esto? Observe que graficando la intersección de un plano cualquiera con una esfera, se pude notar que se cumple el Teorema de Pitágoras entre $\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}$, $d(\Omega, \Pi)\,\mathbf{n}$ y $\mathbf{r}(s) - \mathbf{c}$. Es decir,

$$\|\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}\|^2 = d^2(\Omega, \Pi) + \|\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}\|^2$$

Luego, como tanto $d^2(\Omega, \Pi)$ y $\|\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}\|$ son constantes, entonces necesariamente $\|\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}\|$ lo es. Se sigue que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}\|^2 = 0 \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) \cdot (\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) = 0$$

Es decir,

$$\mathbf{r}'(s) \cdot (\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) = 0 \to \boxed{\mathbf{T}(s) \cdot (\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) = 0}$$

Ya sabemos que $\mathbf{r}(s) \in \Pi$, pero adicionalmente observe el lector que $\mathbf{o} \in \Pi$ pues es en efecto el centro de la circunferencia tiene que estar en el plano. Esto no es convincente del todo, por lo que es necesario probarlo. En efecto, basta probar que $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{p}) = 0$ para demostrar la pertenencia al plano, lo cual se hace directamente:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c} + d(\mathbf{c}, \Pi)\,\mathbf{n} - \mathbf{p}) = (\mathbf{c} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} + d(\mathbf{c}, \Pi)\,\|\mathbf{n}\|$$

Pero $(\mathbf{c} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = -d(\Omega, \Pi)\,\|\mathbf{n}\|$ a partir de la definición que hicimos de distancia entre el centro de la circunferencia y el plano. Es decir,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{p}) = 0$$

y por lo tanto $\mathbf{o} \in \Pi$. ¿Qué implica todo esto? Pues que como $\mathbf{r}(s)$ y $\mathbf{o}$ pertenecen al plano, entonces $\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}$ es una dirección contenida en el plano y por lo tanto $(\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{n} = 0$.

Pero es evidente que como la curva es plana está contenida en un plano, luego el vector normal es proporcional al vector binormal de la curva en todo plano, y por lo tanto:

$$\boxed{(\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{B} = 0}$$

Se sigue entonces que $\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}$ es perpendicular a $\mathbf{T}$ y a $\mathbf{B}$. En particular, demostramos que:

- $\mathbf{r}(s) \in \Omega \to \mathbf{T}(s) \cdot (\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) = 0$.
- $\mathbf{r}(s) \in \Pi \to \mathbf{N}(s) \cdot (\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) = 0$.

Como este es un vector que evidentemente es no nulo, entonces se cumple que:

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{o} = \alpha(s)\,\mathbf{N}(s)$$

con $\alpha(s)$ real. Es evidente entonces que:

$$[\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}] \times \mathbf{N}(s) = 0$$

para todo s. En un problema anterior demostramos que si para todo s en una curva γ se cumple que:

$$\gamma \times \mathbf{N}(s) = 0$$

entonces la curvatura era constante. En efecto, este caso es similar (se puede notar fácilmente que restar $\mathbf{o}$ no afecta en nada al resultado). Utilizando este lema, concluimos que la curvatura es constante. ■

(c) Sea $\mathbf{r}(s)$ un punto cualquiera de $\mathcal{C}$. Recordemos que el centro de la circunferencia osculatriz viene dado por:

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N}$$

y su radio viene dado por $1/\kappa$. Observe que κ es constante por el problema anterior, por lo cual lo único que debemos demostrar para probar que la circunferencia osculatriz en cada punto es la misma es demostrando que el centro es el mismo en todo punto (dos circunferencias son iguales si sus radios y centros lo son). Esto se puede demostrar por simple derivación:

$$\mathbf{c}'(s) = \mathbf{T}(s) + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

como la curva es plana, entonces $\tau = 0$ y por lo tanto $\mathbf{c}'(s) = 0$. Se concluye entonces que el centro de curvatura es siempre el mismo y así se demuestra lo pedido: la circunferencia osculatriz es la misma en todo punto, y por lo tanto corresponde exactamente a la circunferencia. ■

(d) Ya vimos anteriormente que el centro de la circunferencia viene dado por $\mathbf{o} = \mathbf{c} + d(\mathbf{c}, \Pi)\,\mathbf{n}$. Finalmente, $\mathbf{r}(s) = (x, y, z)$ (con $x = x(s)$, $y = y(s)$ y $z = z(s)$) es la curva tal que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}\|^2 &= r_0^2 \\ (\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned}$$

En otras palabras,

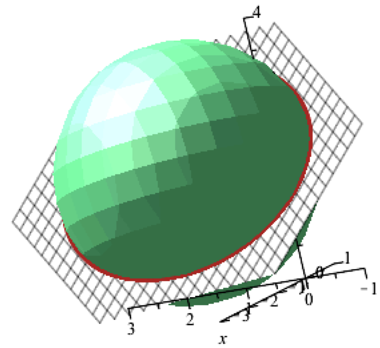
$$\begin{cases} (\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) \cdot (\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) & = r_0^2 \\ (\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{n} & = 0 \end{cases}$$

Restando,

$$\boxed{(\mathbf{r}(s) - \mathbf{o}) \cdot (\mathbf{r}(s) - \mathbf{o} + \mathbf{n}) = \|\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{o}\|^2}$$

con $\mathbf{r}(s_0)$ un punto cualquiera de la intersección, fácil de determinar asignando un valor a una de las tres coordenadas y despejando del sistema. A partir del reemplazo con $\mathbf{r}(s) = (x, y, z)$ y con el adecuado reemplazo se determina facilmente una parametrización.

(e) Este ejercicio no es más que directamente reemplazar en la fórmula anterior. Se deja el gráfico resultante para efectos de comprobación:



Problema 4.31: Cortamos la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano $x + y + z = 1$. Determine la curvatura y la torsión de la curva de corte.

Solución:

Si el problema anterior fue comprendido a cabalidad, este problema debiese resultar muy sencillo. En efecto, sabemos que esta intersección genera como resultado una circunferencia, que por lo tanto tiene curvatura constante.

Luego, si d es la distancia del plano al origen, en una deducción similar al problema anterior basta armar un triángulo entre el centro de la circunferencia, un punto cualquiera donde la circunferencia corta al plano y el origen.

Por el teorema de Pitágoras se cumplirá que:

$$d^2 + r^2 = 4$$

donde 4 es el cuadrado de la distancia del origen al punto cualquiera donde esfera y plano se cortan (como está en la esfera, está a distancia 4 del origen).

Aplicando la fórmula cartesiana de la distancia punto−plano, tenemos que:

$$d = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Es decir,

$$r = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

Como es una circunferencia, por definición $\boxed{\kappa = \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{3}{11}}}$ como ya demostramos.

Análogamente, la curva debe estar contenida en el plano, como debe ser plana, inmediatamente $\boxed{\tau = 0}$ tal como demostramos en el problema anterior.

Problema 4.32: [**Propuesto**] Para una curva $\vec{\gamma}$ se define el *centro de curvatura en* t como el centro de su círculo osculador en t y la *evoluta* de $\vec{\gamma}$ como la curva traza por los centros de curvatura.

(a) Sea $\vec{\gamma}$ una curva con parametrización $\mathbf{r}(t)$ y sea $\vec{\psi}$ su evoluta. Escriba una parametrización para $\vec{\psi}$ en términos de $\mathbf{r}(t)$.

(b) Demuestre que para todo t los vectores tangentes de $\vec{\gamma}$ y $\vec{\psi}$ son perpendiculares.

(c) Determine la evoluta de (t, t^2), (t, t^3) y $(a \cos t, b \operatorname{sen} t)$.
