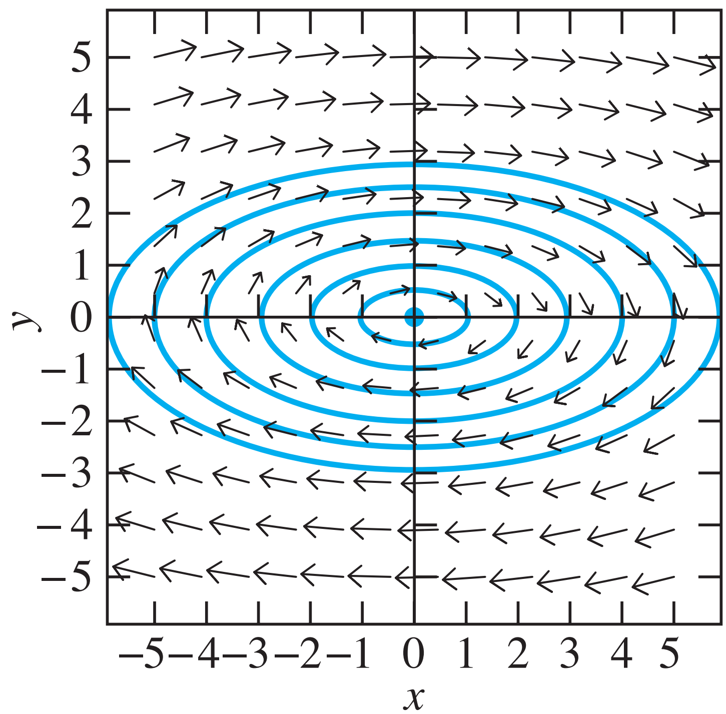
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT1640 ⋆ Ecuaciones Diferenciales

Resumen de conceptos y Compilado de problemas resueltos

Por: Sebastián Soto Rojas (spsoto@uc.cl)



Importante:

Este texto es una versión preliminar de la edición final, por lo cual se encuentra en constante construcción y revisión. Puede contener secciones sin desarrollar o errores, por lo cual se ruega leer con atención y revisar constantemente la página web de publicación para revisar nuevas versiones.

Cualquier comentario y/u observación es bien recibida en mi correo de contacto: spsoto@uc.cl.

Versión de publicación: 31 de Mayo, 2016

Puedes revisar nuevas versiones en:
www.spsoto.cl/publications

Índice

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. Introducción

En un curso de **Ecuaciones Diferenciales**, lo natural es partir definiendo qué es una ecuación diferencial.

Definición:

- Una ecuación que relaciona una función desconocida y una o más de sus derivadas se denomina *ecuación diferencial*.
- Una ecuación diferencial es *ordinaria* cuando la función desconocida depende solamente de una variable independiente. Es *parcial* cuando la función depende de una o más variables y aparecen involucradas las derivadas parciales de ella.
- El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparezca en ella.

De esta forma, una ecuación diferencial ordinaria (EDO) se puede notar como

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

- Se dice que $u = u(x)$ es solución (satisface) la ecuación diferencial en el intervalo I cuando las derivadas $u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)$ existan y

$$F\left(x, u, u', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

- Se denomina problema del valor inicial (PVI) a una ecuación diferencial junto a sus condiciones iniciales $y^{(n)}(x_0) = y_0$. La solución de este problema se denomina *solución particular*.

Para revisar el concepto de solución de una ecuación diferencial revisemos los siguientes problemas:

P1 Dada la ecuación diferencial:

$$x^2 y'' + xy' - y = \ln x$$

Demuestre que las siguientes funciones son soluciones de dicha ecuación:

$$y_1(x) = x - \ln x \quad ; \quad y_2(x) = \frac{1}{x} - \ln x$$

Solución:

Este problema se resuelve directamente reemplazando y sustituyendo en la ecuación diferencial. Partamos por $y_1(x)$:

$$y_1'(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad ; \quad y_1''(x) = \frac{1}{x^2}$$

Luego,

$$x^2 y_1'' + x y_1' - y_1 = x^2 \frac{1}{x^2} + x\left(1 - \frac{1}{x}\right) - x + \ln x = \ln x$$

Entonces se concluye que $y_1(x)$ satisface la ecuación diferencial. Para $y_2(x)$:

$$y_2'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \longrightarrow y_2''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} x^2 y_2'' + x y_2' - y_2 &= x^2\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) - x\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \ln x \\ &= \frac{2}{x} + 1 - \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x} + \ln x \\ &= \ln x \end{aligned}$$

Es decir, $y_2(x)$ satisface la ecuación diferencial y así se demuestra lo pedido.

$\square$

P2 Determine el valor de r de modo que $y(x) = e^{rx}$ sea solución de la ecuación:

$$3y'' + 3y' - 4y = 0$$

Solución:

El valor de r que escojamos debe ser tal que al derivar dos veces y reemplazar en la ecuación diferencial, esta se satisfaga. Se tiene que:

$$y'(x) = re^{rx} \longrightarrow y''(x) = r^2 e^{rx}$$

Es decir,

$$3r^2 e^{rx} + 3re^{rx} - 4e^{rx} = \left(3r^2 + 3r - 4\right) e^{rx}$$

Como $e^{rx} \neq 0$ para todo x, entonces:

$$3r^2 + 3r - 4 = 0 \longrightarrow r = \frac{-3 \pm \sqrt{9+48}}{6} \longrightarrow \boxed{r = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{6}}$$

De esta forma se encuentran los valores pedidos.

□

P3 (a) Si k es una constante, demuestre que una solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx^2$$

está dada por $x(t) = \dfrac{1}{c - kt}$ donde c es una constante arbitraria.

(b) Determine por inspección una solución del problema de valor inicial $x' = kx^2$, $x(0) = 0$.

(c) Determine todas las soluciones del problema de valor inicial $x' = kx^2$, $x(0) = \alpha \neq 0$.

Solución:

(a) Este problema se razona de forma similar a los dos problemas anteriores. Derivando, mediante regla de la cadena:

$$x'(t) = \frac{k}{(c - kt)^2} \longrightarrow \frac{k}{(c - kt)^2} = \frac{k}{(c - kt)^2}$$

Y por lo tanto, se satisface la ecuación diferencial. ■

(b) Observamos que kx^2 se anula cuando $x = 0$, por lo que por inspección una solución del problema es $\boxed{x(t) \equiv 0}$, debido a que $x'(t) = 0$ y por lo tanto se obtiene la igualdad $0 = 0$.

(c) Reemplazando en la solución:

$$x(0) = \frac{1}{c} = \alpha \longrightarrow \boxed{c = \frac{1}{\alpha}}$$

Este valor es indiferente al signo de k.

□

En el caso que $f(x, y)$ sea en realidad una función de la variable dependiente, es decir $f(x, y) = f(x)$, basta con integrar:

$$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c$$

Esta se define como solución general de la ecuación. Si $G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ y tenemos la condición inicial $y(x_0) = y_0$, entonces:

$$c = y_0 - G(x_0)$$

Reforcemos este concepto en el siguiente problema:

P4 En los siguientes problemas encuentre la función $y = f(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial dada y la condición inicial prescrita:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{x^2+9}$, $y(-4) = 0$.

(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xe^{-x}$, $y(0) =1$.

Solución:

(a) Mediante integración se deduce que:

$$y(x) = \int x\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x + c$$

Mediante la sustitución $u = x^2+9 \longrightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ obtenemos la integral:

$$y(x) = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u + c = \frac{1}{3}u^{3/2} + c \longrightarrow y(x) = \frac{1}{3}\left(x^2+9\right)^{3/2} + c$$

Es decir, tomando la condición inicial $y(-4) = 0$:

$$\frac{1}{3}(25)^{3/2} + c = 0 \longrightarrow c = -\frac{125}{3}$$

Finalmente,

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{125}{3}\right)^{3/2} + c}$$

(b) Procediendo de forma análoga,

$$y(x) = \int xe^{-x}\mathrm{d}x + c$$

Hacemos $u = x \longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ y$\mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x \longrightarrow v = -e^{-x}$, de modo que:

$$y(x) = -xe^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{d}x + c = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

Reemplazando en la condición inicial,

$$y(0) = -1 + c = 1 \longrightarrow c = 2$$

Finalmente,

$$\boxed{y(x) = 2 - xe^{-x} - e^{-x}}$$

□

Velocidad y aceleración. Conocida una fuerza $F(t)$, entonces a masa constante, se deduce de la segunda ley de Newton que:

$$F(t) = ma(t)$$

Como $a(t) = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$, entonces se puede obtener $x(t)$ integrando dos veces a partir de las condiciones iniciales dadas.

P5 [**Propuesto**] El conductor de un auto involucrado en un accidente sostenía que iba solamente a 40 km/h. Cuando la policía probó su vehículo y aplicó los frenos del automóvil a 40 km/h, este recorrió 15 metros antes de deternse. Sin embargo, las marcas del recorrido en la escena del accidente eran de 64 m. Asumiendo la misma desaceleración (constante), determine la velocidad aproximada a la cual viajaba el conductor antes de detenerse.

1.2. Técnicas de resolución

1.2.1. Ecuaciones diferenciales separables

El caso más sencillo de ecuaciones diferenciales de primer orden son las ecuaciones separables, las cuales estudiaremos a continuación.

Definición: La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = H(x, y)$$

se denomina *separable* si $H(x, y)$ puede escribirse como el producto de una función de x por una función de y, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)\,\phi(y) \tag{2}$$

Resolución. para $\phi(x) \neq 0$ se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\phi(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x$$

Integrando,

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\phi(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x + c$$

Se hace fundamental entonces tener un adecuado dominio de las técnicas de integración. Más aún, muchas de los tipos de ecuaciones que próximamente estudiaremos tienen como objetivo reducir la ecuación diferencial a una separable, por lo que la necesidad se hace aún más imperante.

Revisemos los siguientes ejemplos:

P6 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $2\sqrt{x}\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos^2 y,\ y(4) = \pi/4.$

(b) $x' = x - x^2.$

(c) $x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^2+1}{3y^2+1}.$

(d) $(x^2+1)(\tan y)\, y' = x$.

(e) $x^2 y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$.

Solución:

(a) Aplicando el procedimiento anteriormente descrito tendremos que:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 y} = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} \longrightarrow \sec^2 y\, \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$$

Integrando a ambos lados:

$$\tan y = \sqrt{x} + c$$

Es decir,

$$y = \arctan\left(\sqrt{x}+c\right) + k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Claramente existen infinitas curvas que cumplen la ecuación diferencial tanto por efecto de c como por efecto de $k\pi$. Reemplazando en la primera ecuación con la condición inicial:

$$\tan\frac{\pi}{4} = 2 + c \longrightarrow c = -1$$

Es decir,

$$\boxed{y = \arctan\left(\sqrt{x}-1\right) + k\pi}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Basta notar que la ecuación diferencial es en efecto separable:

$$x' = x - x^2 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - x^2$$

Luego,

$$\frac{\mathrm{d}x}{x-x^2} = \mathrm{d}t$$

Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1-x)} = t + c$$

Aplicando el método de fracciones parciales:

$$\frac{1}{x\,(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x} \longrightarrow a\,(1-x) + bx = 1$$

Haciendo $x=1$ obtenemos que $b=1$ y haciendo $x=0$ obtenemos que $a=1$. Luego,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = t + c \longrightarrow \ln|x| - \ln|1-x| = t + c$$

Es decir,

$$\ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = t + c \longrightarrow \left|\frac{x}{1-x}\right| = e^{t+c} = ke^t$$

con $k = e^c$. Luego, abriendo el módulo:

$$\frac{x}{1-x} = \pm k e^t \longrightarrow x = \pm k e^t \mp x k e^t \longrightarrow x\left(1 \pm k e^t\right) = \pm e^t$$

Finalmente,

$$\boxed{x\left(t\right) = \pm \frac{1}{1 \pm k e^t}}$$

(c) Notando que la ecuación es separable, se puede entonces multiplicar cruzado, obteniendo así que:

$$\left(3y^2 + 1\right) \mathrm{d}y = \frac{x^2+1}{x^2} \mathrm{d}x \longrightarrow \left(3y^2 + 1\right) \mathrm{d}y = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$$

Integrando a ambos lados de la ecuación:

$$\boxed{y^3 + y = x - \frac{1}{x} + c}$$

Luego, esta curva implícita define la solución de la ecuación diferencial.

(d) Nuevamente, separando:

$$\tan y \, \mathrm{d}y = \frac{x}{x^2+1} \mathrm{d}x$$

Integrando,

$$-\log\left|\cos y\right| = \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + c \longrightarrow \log\left|\cos y\right| = -\frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) - c$$

Tomando exponencial a ambos lados,

$$\left|\cos y\right| = \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}$$

con $k = e^{-c}$. Tomando módulo:

$$\cos y = \pm \frac{k}{\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow \begin{cases} y_1\left(x\right) = \cos^{-1}\left(\pm \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 2n\pi \\ \\ y_2\left(x\right) = -\cos^{-1}\left(\pm \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 2m\pi \end{cases}$$

con $n, m \in \mathbb{Z}$. Cuál de las dos soluciones se escoja, así como el signo que debe tomarse al interior de la función trigonométrica inversa dependerá de las condiciones iniciales.

(e) $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$. La clave de esta pregunta consiste en detectar que, si bien no lo parece, la ecuación es separable, y esto puede lograrse notando que el lado derecho puede factorizarse:

$$\longrightarrow x^2y' = \left(1 + y^2\right)\left(1 - x^2\right)$$

Luego,

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x$$

Integrando,

$$\arctan\left(y\right) = -\frac{1}{x} - x + c$$

Es decir, tomando tangente a ambos lados de la ecuación:

$$\boxed{y\left(x\right) = -\tan\left(\frac{1}{x} + x - c\right)}$$

□

P7 Resuelva la ecuación

$$\left(t^2 - xt^2\right)x' + x^2 + tx^2 = 0$$

Solución:

Notemos que la ecuación puede reescribirse como:

$$t^2\left(1-x\right)x' + x^2\left(1+t\right) = 0 \longrightarrow t^2\left(x-1\right)x' = x^2\left(1+t\right)$$

Es decir,

$$x' = \frac{x^2\left(1+t\right)}{\left(x-1\right)t^2}$$

Aquí se evidencia que la ecuación es claramente separable. Procediendo como corresponde:

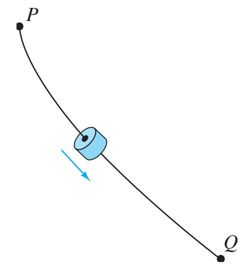
$$\frac{\left(x-1\right)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{t+1}{t^2}\mathrm{d}t \longrightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

Integrando, obtenemos la relación implícita:

$$\boxed{\ln\left|x\right| + \frac{1}{x} = \ln\left|t\right| - \frac{1}{t} + c}$$

□

P8 [**Propuesto**] La siguiente figura muestra una cuenta deslizándose hacia abajo en una cuerda sin fricción del punto P al punto Q:



El *problema de la braquistócrona* pregunta qué forma debe tener la cuerda a fin de minimizar el tiempo de deslizamiento para descender de P a Q. Se puede demostrar mediante principios físicos y de cálculo variacional que la curva $y\,(x)$ que minimiza el tiempo debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

donde a es una constante apropiada. Sustituyendo $y = 2a\,\mathrm{sen}^2\,t$ en la ecuación anterior obtenga la solución

$$x\,(t) = a\,(2t - \mathrm{sen}\,2t) \quad ; \quad y\,(t) = a\,(1 - \cos 2t)$$

que corresponde a un arco de cicloide.

1.2.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Un tipo de ecuación diferencial inmediato que puede resolverse a partir de las ecuaciones diferenciales separables son las ecuaciones diferenciales homogéneas, las cuales se definen como se muestra a continuación:

Definición: Una función $f\,(x, y)$ se dice *homogénea* si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que $f\,(\alpha x, \alpha y) = f\,(x, y)$. Por extensión, una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\,(x, y)$$

se dice homogénea si $f\,(x, y)$ es una función homogénea.

El hecho clave que debe notarse es que una función homogénea puede escribirse de la forma $F\,(y/x)$. En efecto,

$$f\,(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right) \longrightarrow f\,(\alpha x, \alpha y) = F\left(\frac{\alpha y}{\alpha x}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right) = f\,(x, y)$$

Resolución. Se hace la sustitución $v(x) = y(x)/x \longrightarrow y = vx$. Derivando la segunda relación mediante regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v$$

La ecuación se reescribe como:

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=F\left(v\right)\longrightarrow\boxed{x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=F\left(v\right)-v} \tag{3}$$

Esta ecuación es en efecto separable, de modo que:

$$\frac{\mathrm{d}v}{F\left(v\right)-v}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\longrightarrow\int\frac{\mathrm{d}v}{F\left(v\right)-v}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+c$$

y podemos obtener así las soluciones particular y/o general de la ecuación.

P9 Encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy+3y^2 \quad (x>0)$$

Solución:

Reescribiendo la ecuación diferencial se tendrá que:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy+3y^2}{x^2}=f\left(x,y\right)$$

Observe que tanto en el numerador como en el denominador todos los términos son de grado 3, lo cual nos hace sospechar que la ecuación es homogénea. En efecto,

$$f\left(\alpha x,\alpha y\right)=\frac{\alpha^2xy+3\alpha^2y^2}{\alpha^2x^2}=\frac{xy+3y^2}{x^2}=f\left(x,y\right)$$

Aplicamos entonces la sustitución $v\left(x,y\right)=y/x\longrightarrow y=vx$. Luego, derivando mediante regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}x+v$$

Podemos escribir $f\left(x,y\right)$ exclusivamente en términos de v. En efecto,

$$f\left(x,y\right)=\frac{xy+3y^2}{x^2}=\frac{y}{x}+3\frac{y^2}{x^2}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Es decir, $F\left(v\right)=v+3v^2$. Luego,

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-v$$

Pero de acuerdo a la definición de la ecuación diferencial,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy+3y^2}{x^2}=F\left(v\right)$$

Es decir,

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=F\left(v\right)-v=v+3v^2-v=3v^2$$

Reordenando términos,

$$\frac{\mathrm{d}v}{3v^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \longrightarrow -\frac{1}{3v} = \ln|x| + c$$

Despejando v:

$$v = -\frac{1}{3\left(\ln|x| + c\right)}$$

Finalmente, como $y = vx$ concluimos así que:

$$\boxed{y\left(x\right) = -\frac{x}{3\left(\ln|x| + c\right)}}$$

□

1.2.3. Ecuación diferenciales lineales

Otro tipo básico de ecuaciones diferenciales de primer orden son las ecuaciones *lineales*, las cuales se definen como se muestra a continuación:

Definición: La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = H\left(x, y\right)$$

se denomina *lineal* si puede expresarse como:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P^*\left(x\right) y + Q(x)$$

O bien en su forma estándar:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P\left(x\right) y = Q(x) \tag{4}$$

con $P^*\left(x\right) = -P\left(x\right)$.

Resolución. Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales multiplicamos ambos lados de la ecuación en su forma estándar por un factor conocido como *factor integrante*, tal que la multiplicación de cada miembro por este factor produce una ecuación en la que cada miembro se conoce como una derivada.

Digamos que este factor es $\mu\left(x\right)$ y busquemos una expresión en términos de x, P y Q para resolver cualquier ecuación diferencial. Multiplicando a ambos lados por la ecuación:

$$\mu y' + \mu P y = \mu Q$$

Buscamos que el lado derecho pueda escribirse como una derivada, y la forma más sencilla de lograrlo es imponiendo que μ sea tal que genere el producto de una derivada. Es decir, buscamos que μ sea tal que:

$$\mu y' + \mu P y = (\mu y)'$$

Es decir,

$$\mu y' + \mu P y = \mu y' + \mu' y \longrightarrow \mu' y = \mu P y$$

Obtenemos así la ecuación separable

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = P(x)$$

Integrando a ambos lados obtenemos que:

$$\ln|\mu(x)| = \int P(x)\mathrm{d}x + c$$

Debe notarse que para cualquier valor de c se satisfará la ecuación diferencial, por lo que encontrando un solo factor integrante tendremos la ecuación resuelta. Luego, es suficiente tomar la rama positiva del módulo y hacer $c = 0$, de modo que:

$$\boxed{\mu(x) = \exp\left[\int P(x)\,\mathrm{d}x\right]} \tag{5}$$

Luego, la ecuación diferencial se escribe como:

$$(\mu y)' = \mu Q$$

Integrando:

$$\mu(x)\,y(x) = \int \mu(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x + c$$

Es decir, la solución general de la ecuación lineal viene dada por:

$$\boxed{y(x) = \exp\left[-\int P(x)\,\mathrm{d}x\right]\int \exp\left[\int P(x)\,\mathrm{d}x\right]Q(x)\mathrm{d}x + c\exp\left[-\int P(x)\,\mathrm{d}x\right]} \tag{6}$$

Evidentemente, no se recomienda memorizar la fórmula de la solución general, si no que la del factor integrante y aplicarla consecuentemente.

Apliquemos esta metodología en los siguientes ejemplos:

P10 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales y encuentre el intervalo de solución:

(a) $y' - 3y = e^x$ con $y(0) = y_0$.

(b) $x' - \dfrac{2}{t+1}x = (t+1)^2$ con $x(0) = 0$.

(c) $y + 2xy' = y^2 y'$.

Solución:

(a) En este caso el factor integrante es:

$$P(x) = -3 \longrightarrow \mu(x) = e^{-\int 3\,\mathrm{d}x} = e^{-3x}$$

Entonces,

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = e^{-3x}e^x = e^{-2x}$$

Es decir,

$$\left(e^{-3x}y\right)' = e^{-2x} \longrightarrow e^{-3x}y(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

Por lo tanto,

$$y\left(x\right) = -\frac{1}{2}e^{x} + ce^{-3x}$$

Reemplazando con la condición inicial:

$$y\left(0\right) = -\frac{1}{2} + c = y_0 \longrightarrow c = y_0 + \frac{1}{2}$$

Finalmente,

$$\boxed{y\left(x\right) = -\frac{1}{2}e^{x} + \left(y_0 + \frac{1}{2}\right)e^{-3x}}$$

(b) Procedemos de forma similar con el factor integrante:

$$\mu\left(t\right) = e^{-\int \frac{2}{t+1}\mathrm{d}t} = e^{-2\ln|t+1|} = \frac{1}{\left(t+1\right)^2}$$

Es decir, multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante:

$$\frac{1}{\left(t+1\right)^2}x' - \frac{2}{\left(t+1\right)^3}x = 1 \longrightarrow \left[\frac{x}{\left(t+1\right)^2}\right]' = 1$$

Integrando,

$$\frac{x}{\left(t+1\right)^2} = t + c \longrightarrow x\left(t\right) = \left(t+1\right)^2\left(t+c\right)$$

De la condición inicial $x\left(0\right) = 0$:

$$x\left(0\right) = 1^2 \cdot c = 0 \longrightarrow c = 0$$

Finalmente,

$$\boxed{x\left(t\right) = t\left(t+1\right)^2}$$

(c) La pregunta es: ¿qué tipo de ecuación diferencial es esta? Reordenando términos,

$$y + \left(2x - y^2\right)y' = 0 \longrightarrow y' = \frac{y}{y^2 - 2x}$$

Claramente no es ningún tipo de ecuación que dominemos por ahora. Sin embargo la pregunta es: ¿podemos convertir esta ecuación diferencial en una ecuación lineal? Notemos que:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{x'}$$

Entonces,

$$x' = \frac{y^2 - 2x}{y} \longrightarrow yx' + 2x = y^2$$

O bien,

$$x' + \frac{2}{y}x = y$$

Es claro que en esta ecuación debemos despejar x en función de y. Entonces, si $P(y) = 2/y$ deducimos que el factor integrante es:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y} \mathrm{d}y} = e^{2\ln|y|} = y^2$$

Luego,

$$y^2x' + 2yx = y^3 \longrightarrow \left(y^2x\right)' = y^3 \longrightarrow y^2x = \frac{y^4}{4} + c$$

Despejando x en función de y obtenemos finalmente:

$$\boxed{x(y) = \frac{y^4}{4} + \frac{c}{y^2}}$$

□

P11 Considere la ecuación $y' + (\cos x)\, y = e^{-\operatorname{sen} x}$.

(a) Encuentre la solución y_1 que satisface $y_1(\pi) = \pi$.

(b) Muestre que toda solución y tiene la propiedad

$$y(\pi k) - y(0) = \pi k$$

para todo entero k .

Solución:

(a) Dado que la ecuación es claramente lineal, utilizamos el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \cos x \, \mathrm{d}x} = e^{\operatorname{sen} x}$$

Multiplicando a ambos lados:

$$\left(e^{\operatorname{sen} x} y\right)' = 1 \longrightarrow e^{\operatorname{sen} x} y = x + c \longrightarrow y = (x + c)\, e^{-\operatorname{sen} x}$$

De la condición inicial,

$$y(\pi) = \pi + c = \pi \longrightarrow c = 0$$

Se cumple entonces que:

$$y(x) = xe^{-\operatorname{sen} x}$$

(b) Se tiene que para una solución **cualquiera**:

$$y(\pi k) = (\pi k + c)\, e^{-\operatorname{sen} \pi k} = \pi k + c$$

Asimismo,

$$y(0) = ce^{-\operatorname{sen} \pi k} = c$$

Finalmente,

$$\boxed{y(\pi k) - y(0) = \pi k}$$

demostrando así lo pedido. ■

□

P12 Resolver el Problema de Valor Inicial

$$xy'' + y' = 0 \quad ; \quad y(-2) = 1 \quad ; \quad y'(-2) = 1.$$

Solución:

Notamos que no aparece y explícitamente en la ecuación diferencial, si no que su primera y segunda derivada. Por esta razón, es conveniente realizar la sustitución $u = y'$, con lo cual se obtiene la ecuación diferencial:

$$xu' + u = 0 \longrightarrow u' + \frac{1}{x}u = 0$$

Utilizando el factor integrante $\rho(x) = e^{\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x} = e^{\ln|x|} = |x|$ se tendrá que:

$$|x|\, u'(x) + \frac{|x|}{x} u(x) = 0$$

Si $x > 0$ el módulo se abre positivo y por lo tanto se obtiene la ecuación diferencial:

$$xu'(x) + u(x) = 0$$

De la misma forma, se obtiene exactamente la misma ecuación diferencial si abrimos el módulo negativo:

$$-xu'(x) - u(x) = 0 \longrightarrow xu'(x) + u(x) = 0$$

Integrando,

$$[xu(x)]' = 0 \longrightarrow xu(x) = c \longrightarrow u(x) = \frac{c}{x}$$

Integrando nuevamente,

$$y'(x) = \frac{c}{x} \longrightarrow y(x) = c \ln|x| + d$$

De $y'(-2) = 1 = -\frac{c}{2} \longrightarrow c = -2$. Es decir,

$$y(x) = -2\ln|x| + d$$

De $y(-2) = 1$, obtenemos que:

$$y(-2) = -2\ln(2) + d = 1 \longrightarrow d = 1 + 2\ln(2)$$

Es decir, la solución al PVI es:

$$\boxed{y(x) = -2\ln|x| + 1 + 2\ln(2)}$$

$\square$

1.2.4. Ecuación diferencial de Bernoulli

Revisaremos ahora las ecuaciones de Bernoulli, las cuales son un tipo particular de ecuaciones lineales en que se complica la resolución debido a la aparición de una potencia de $y^n(x)$ como sumando.

Definición: Una *ecuación de Bernoulli* es una ecuación lineal de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\,y(x) = Q(x)\,y^n(x) \tag{7}$$

Resolución. El objetivo es convertir esta ecuación en una ecuación lineal de primer orden. Esto se logra mediante la sustitución $\boxed{v(x) = y^{1-n}(x)}$, de modo que:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = (1-n)\,y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^n}{1-n}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Reordenando la ecuación 1.6:

$$\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^{1-n}P(x) = Q(x)$$

Es decir,

$$\frac{1}{y^n}\frac{y^n}{1-n}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + vP(x) = Q(x)$$

Finalmente, la ecuación diferencial queda reescrita como:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + (1-n)\,P(x)\,v(x) = (1-n)\,Q(x)} \tag{8}$$

Esta ecuación es lineal de primer orden y puede resolverse mediante el factor integrante ya estudiado en la sección anterior.

P13 Resuelva la ecuación $xy^2y' + y^3 = \dfrac{\cos(x)}{x}$, $x > 0$.

Solución:

Dado que aparece y^3 en uno de los sumandos, intuimos que esta es una ecuación de Bernoulli. Dejamos la ecuación de la forma,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

Se tiene que:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos(x)}{x^2y^2} \longrightarrow y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos(x)}{x^2}y^{-2}$$

Es decir,

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$$

Luego, $n = -2$ y por lo tanto se toma $v = y^3$. De acuerdo a lo ya estudiado, la ecuación queda de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{3}{x}v = 3\frac{\cos(x)}{x^2}$$

Calculamos el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}\mathrm{d}x} = e^{3\ln x} = x^3$$

Entonces, multiplicando por este factor a la ecuación lineal:

$$x^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 3x^2 v(x) = 3x\cos(x)$$

Reconociendo la derivada del producto al lado izquierdo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3 v\right) = 3x\cos(x) \longrightarrow x^3 v = 3\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x + c$$

Esta integral puede calcularse por partes derivando x e integrando coseno, obteniendo así que:

$$x^3 v = 3\left(x\operatorname{sen}x - \int \operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x\right) + c = 3(x\operatorname{sen}x + \cos x) + c$$

Despejando v:

$$v(x) = \frac{3}{x^3}(x\operatorname{sen}x + \cos x) + \frac{c}{x^3}$$

Es decir,

$$y^3(x) = \frac{3}{x^3}(x\operatorname{sen}x + \cos x) + \frac{c}{x^3} \longrightarrow \boxed{y(x) = \frac{\sqrt[3]{3(x\operatorname{sen}x + \cos x) + c}}{x}}$$

□

P14 Resuelva la siguiente ecuación diferencial de Bernoulli:

$$y'(x) + 6y(x) = 30y^{2/3}(x)$$

Solución:

Reconocemos $P(x) = 6$, $Q(x) = 30$ y $n = 2/3$. Entonces, hacemos $v = y^{1-2/3} = y^{1/3}$. De esta forma, la ecuación se reescribe como:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{3}6v = \frac{1}{3}30 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2v = 10$$

Esta es una ecuación lineal para la cual utilizamos el factor integrante $\mu(x) = e^{\int 2\mathrm{d}x} = e^{2x}$. Entonces,

$$e^{2x}v' + 2e^{2x}v = 10e^{2x} \longrightarrow \left(e^{2x}v\right)' = 10e^{2x}$$

Luego,

$$e^{2x}v = 5e^{2x} + c \longrightarrow \boxed{v\left(x\right) = 5 + ce^{-2x}}$$

Ahora bien, $v = y^{1/3}$, elevando al cubo obtenemos finalmente:

$$\boxed{y\left(x\right) = \left(5 + ce^{-2x}\right)^3}$$

$\square$

1.2.5. Ecuaciones diferenciales exactas

En cursos de cálculo vectorial estaremos interesados en determinar funciones escalares $f\left(x, y\right)$ tales que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\left(x, y\right) &= M\left(x, y\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y\right) &= N\left(x, y\right) \end{aligned}$$

En particular, el vector $\mathbf{F} = \left(M, N\right)$ representa un *campo vectorial*, es decir, una función $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Por motivaciones físicas, en particular de mecánica clásica y electromagnetismo, dado un campo $\mathbf{F}$ es de interés buscar curvas $\vec{\varphi}\left(t\right)$ que sean ortogonales a estos campos vectoriales. En otras palabras, buscamos una curva $\vec{\varphi}\left(t\right) = \left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)$ tal que:

$$\mathbf{F} \cdot \vec{\varphi}'\left(t\right) = 0 \longrightarrow M\left(x, y\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + N\left(x, y\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \longrightarrow \boxed{M\left(x, y\right)\mathrm{d}x + N\left(x, y\right)\mathrm{d}y = 0}$$

La familia de ecuaciones $M\left(x, y\right)\mathrm{d}x + N\left(x, y\right)\mathrm{d}y = 0$ es la que estudiaremos en esta sección. Mediante conocimientos adicionales de un curso de cálculo vectorial, puede demostrarse que la curva $\vec{\varphi}\left(t\right)$ que satisface la ecuación diferencial anterior es la curva $f\left(x, y\right) = c$ con c una constante arbitraria. Es decir, en otras palabras, la curva que lo satisface es cualquier curva de nivel de f.

En otras palabras, ¡el problema se reduce a determinar f que satisfaga las condiciones anteriores! Sin embargo, no siempre es posible determinar estas funciones f, pues no siempre existen. Indistintamente de ello, no todo es negativo, pues en el mismo curso puede determinarse una condición necesaria para poder determinar estas funciones, y es que:

$$\forall\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{\partial M}{\partial y}\left(x, y\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Esto motiva la siguiente definición:

Definición: Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{9}$$

se dice *exacta* si es que se cumple la condición:

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{10}$$

De cumplirse esta condición, la solución a la ecuación exacta es $f(x,y) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ una constante cualquiera donde $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$.

Revisemos a continuación un ejemplo de ecuación exacta y su método de resolución:

P15 Demuestre que la ecuación diferencial

$$\frac{xy+1}{y}\mathrm{d}x + \frac{2y-x}{y^2}\mathrm{d}y = 0$$

es exacta y resuélvala.

Solución:

En efecto, digamos:

$$M(x,y) = \frac{xy+1}{y} \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{xy-xy-1}{y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

De la misma forma,

$$N(x,y) = \frac{2y-x}{y^2} \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-y^2}{y^4} = -\frac{1}{y^2}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación es exacta. Integramos para resolver la ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy+1}{y} = x + \frac{1}{y} \longrightarrow \boxed{f(x,y) = \int x + \frac{1}{y}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + h(y)}$$

En otras palabras, se integró asumiendo que y es una constante y x la variable de integración. Derivando, la función f obtenida:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} + h'(y)$$

Es decir,

$$\frac{2y-x}{y^2} = -\frac{x}{y^2} + h'(y) \longrightarrow h'(y) = \frac{2}{y} \longrightarrow h(y) = 2\ln(y) + c$$

De esta forma,

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2\ln(y) + c$$

Y por lo tanto, la solución general a esta ecuación es:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2\ln(y) + c = d$$

con c y d constantes arbitrarias. En otras palabras, la solución es:

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + 2\ln(y) = C}$$

con $C = d - c$.

□

La pregunta es, sin embargo: **¿qué podemos hacer con este tipo de ecuaciones cuando no son exactas?** Podemos multiplicarlas por una función $\mu(x,y)$ conocida como factor integrante, que la hace exacta. Por lo general, en la tipología estándar de estos problemas suele sugerirse la estructura que tiene el factor integrante: polinomial, exponencial, etc.

Revisemos a continuación ejemplos de ecuaciones no exactas y cómo estas pueden ser resueltas mediante la aplicación de un factor integrante:

P16 Dada la ecuación diferencial $(3xy^3 + 4y)\,\mathrm{d}x + (3x^2y^2 + 2x)\,\mathrm{d}y = 0$.

(a) Demuestre que no es exacta pero que admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ y encuéntrelo.

(b) Encuentre la solución general de la ecuación.

Solución:

(a) Calculemos las derivadas parciales cruzadas:

$$M(x,y) = 3xy^3 + 4y \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 9xy^2 + 4$$

Asimismo:

$$N(x,y) = 3x^2y^2 + 2x \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 + 2$$

Ahora bien, buscamos $\mu = \mu(x)$ tal que la ecuación

$$\mu(x) M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x) N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

sí sea exacta. Debe ocurrir entonces que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x) M(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x) N(x,y)$$

Es decir,

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + \mu' N \longrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

Reemplazando con los valores,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{9xy^2 + 4 - 6xy^2 - 2}{3x^2y^2 + 2x} = \frac{3xy^2 + 2}{3x^2y^2 + 2x} = \frac{1}{x}$$

Integrando,

$$\ln|\mu(x)| = \ln|x| + c$$

Dado que nos basta encontrar un solo factor integrante, hacemos $c = 0$ y tomamos ambos módulos positivos, obteniendo así que:

$$\boxed{\mu(x) = x}$$

(b) La ecuación no exacta anterior se convierte en la ecuación exacta:

$$\left(3x^2y^3 + 4xy\right)\mathrm{d}x + \left(3x^3y^2 + 2x^2\right)\mathrm{d}y = 0$$

obtenida multiplicando la ecuación original por el factor integrante obtenido. Para hallar la solución de la ecuación diferencial debemos hallar una función $f(x,y)$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2y^3 + 4xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x^3y^2 + 2x^2 \end{aligned}$$

Integrando la primera igualdad con respecto a x obtenemos que:

$$f(x,y) = x^3y^3 + 2x^2y + \varphi(y)$$

Derivando esta ecuación con respecto a y podemos determinar el valor de $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3y^2 + 2x^2 + \varphi'(y) = 3x^3y^2 + 2x^2 \longrightarrow \varphi'(y) = 0$$

Es decir,

$$\varphi(y) = c$$

La solución general de la ecuación es entonces:

$$x^3y^3 + 2x^2y - c = d \longrightarrow \boxed{x^3y^3 + 2x^2y = C}$$

$\square$

P17 Muestre que la ecuación $(2y - 6x)\,\mathrm{d}x + (3x - 4x^2y^{-1})\,\mathrm{d}y = 0$ no es exacta y encuentre un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^my^n$. Luego use tal factor integrante para resolver la ecuación.

Solución:

Procedemos de forma análoga al problema anterior:

$$M(x,y) = 2y - 6x \longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2$$

$$N(x,y) = 3x - 4x^2y^{-1} \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 3 - 8\frac{x}{y}$$

Luego, claramente $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ y por lo tanto la ecuación **no** es exacta.

Ahora bien, buscamos μ tal que

$$\mu M\,\mathrm{d}x + \mu N\,\mathrm{d}y = 0$$

genere una ecuación exacta. Debe cumplirse la condición necesaria de las derivadas parciales cruzadas, razón por la cual:

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)\,M(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)\,N(x,y) \longrightarrow \mu_yM + \mu M_y = \mu_xN + \mu N_x$$

pero $\mu(x,y) = x^my^n \longrightarrow \mu_x = mx^{m-1}y^n$ y $\mu_y = nx^my^{n-1}$. Es decir, debe cumplirse que:

$$nx^my^{n-1}M + x^my^nM_y = mx^{m-1}y^nN + x^my^nN_x$$

Multiplicando tanto el numerador como el denominador por $1/x^{m-1}y^{n-1}$ obtenemos:

$$nxM + xyM_y = myN + xyN_x$$

Reemplazando con M, N y sus derivadas parciales:

$$nx(2y - 6x) + 2xy = my\left(3x - 4x^2y^{-1}\right) + xy\left(3 - 8xy^{-1}\right)$$

Expandiendo términos:

$$2nxy - 6nx^2 + 2xy = 3mxy - 4mx^2 + 3xy - 8x^2$$

Reordenando:

$$(2n+2)\,xy - 6nx^2 = (3m+3)\,xy - (4m+8)\,x^2$$

De aquí se deduce que:

$$\begin{aligned} 2\,(n+1) &= 3\,(m+1) \\ 4\,(m+2) &= 6n \end{aligned}$$

Despejando este sistema obtenemos que $m = 1$ y $n = 2$, de modo que el factor integrante es $\boxed{\mu\,(x,y) = xy^2}$. Multiplicando la ecuación no exacta por este factor integrante obtenemos la ecuación exacta:

$$\left(2xy^3 - 6x^2y^2\right)\mathrm{d}x + \left(3x^2y^2 - 4x^3y\right)\mathrm{d}y = 0$$

Buscamos $f\,(x,y)$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^3 - 6x^2y^2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} &= 3x^2y^2 - 4x^3y \end{cases}$$

Integrando la primera ecuación con respecto a x:

$$f\,(x,y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 + \varphi\,(y)$$

Derivando con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4x^3y + \varphi'\,(y) = 3x^2y^2 - 4x^3y$$

Es decir,

$$\varphi'\,(y) = 0 \longrightarrow \varphi\,(y) = c$$

Finalmente, la solución a esta ecuación exacta es:

$$\boxed{3x^2y^2 - 4x^3y = C}$$

□

P18 La ecuación:

$$\left(xy + 1 + \frac{2x}{e^{xy}}\right)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$$

es exacta cuando se multiplica por un factor integrante de la forma $e^{\alpha xy}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine α y resuelva la ecuación ocupando el factor integrante.

Solución:

La ecuación exacta modificada sería:

$$\left[xye^{\alpha xy} + e^{\alpha xy} + 2xe^{(\alpha-1)xy}\right]\mathrm{d}x + x^2e^{\alpha xy}\mathrm{d}y = 0$$

Se tiene que:

$$M(x,y) = xye^{\alpha xy} + e^{\alpha xy} + 2xe^{(\alpha-1)xy}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = xe^{\alpha xy} + \alpha x^2 ye^{\alpha xy} + \alpha xe^{\alpha xy} + 2(\alpha-1)x^2 e^{(\alpha-1)xy}$$

$$N(x,y) = x^2 e^{\alpha xy} \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2xe^{\alpha xy} + \alpha x^2 ye^{\alpha xy}$$

Es decir, debe cumplirse que:

$$xe^{\alpha xy} + \alpha x^2 ye^{\alpha xy} + \alpha xe^{\alpha xy} + 2(\alpha-1)x^2 e^{(\alpha-1)xy} = 2xe^{\alpha xy} + \alpha x^2 ye^{\alpha xy}$$

Reordenando términos:

$$(\alpha-1)xe^{\alpha xy} + 2(\alpha-1)x^2 e^{(\alpha-1)xy} = 0$$

Ambos términos deben ser anulados mediante los coeficientes y esto se logra con $\alpha = 1$. Por lo tanto, e^{xy} es el factor integrante que debe utilizarse. Obtenemos así la ecuación diferencial exacta:

$$(xye^{xy} + e^{xy} + 2x)\,\mathrm{d}x + x^2 e^{xy}\mathrm{d}y = 0$$

Buscamos $f(x,y)$ tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= xye^{xy} + e^{xy} + 2x \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 e^{xy}
\end{aligned}$$

Resulta mucho más sencillo en este caso integrar la segunda función con respecto a y, obteniendo así:

$$f(x,y) = xe^{xy} + \varphi(x) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + \varphi'(x) = xy^{xy} + e^{xy} + 2x$$

Es decir,

$$\varphi'(x) = 2x \longrightarrow \varphi(x) = x^2 + c$$

Finalmente, $f(x,y) = xe^{xy} + x^2 + c$ y por lo tanto la solución a la ecuación diferencial es:

$$\boxed{xe^{xy} + x^2 = C}$$

□

1.2.6. Uso de sustituciones

Las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden no es posible resolverlas mediante las técnicas de integración utilizadas en secciones anteriores. Sin embargo, mediante el uso de sustituciones adecuadas estas pueden ser reducidas a ecuaciones diferenciales que sí pueden ser resueltas mediante los métodos conocidos.

P19 Usando la sustitución $u = ye^x$ encuentre la solución de

$$y\,\mathrm{d}x + (1 + ye^x)\,\mathrm{d}y = 0$$

Solución:

Equivalentemente,

$$y + (1 + ye^x)\,y' = 0$$

De la ecuación de la sustitución:

$$y = e^{-x}u \longrightarrow y' = -e^{-x}u + e^{-x}u'$$

Reemplazando,

$$e^{-x}u + (1+u)\left(e^{-x}u' - e^{-x}u\right) = 0$$

O bien multiplicando por e^x:

$$u + (1+u)(u' - u) = 0 \longrightarrow u + (1+u)\,u' - u - u^2 = 0$$

Reordenando términos:

$$(1+u)\,u' = u^2 \longrightarrow \frac{(1+u)}{u^2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x \longrightarrow \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

Integrando,

$$-\frac{1}{u} + \ln|u| = x + c$$

Volviendo a la variable original obtenemos finalmente la relación implícita:

$$\boxed{-\frac{1}{ye^x} + \ln|ye^x| = x + c}$$

□

P20 Resuelva $xyy' + y^2 = \operatorname{sen}(x)$, con $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ haciendo $y^2 = u$.

Solución:

A partir de la sustitución observamos que al derivar con respecto a x:

$$2yy' = u'$$

La ecuación se reescribe entonces como:

$$x\frac{u'}{2} + u = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow u' + \frac{2}{x}u = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Esta ecuación es lineal de primer orden, razón por la cual utilizamos el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x} = e^{2\ln|x|} = |x|^2 = x^2$$

Multiplicando la ecuación por este factor:

$$x^2u' + 2xu = x \operatorname{sen} x \longrightarrow \left(x^2u\right)' = x \operatorname{sen} x$$

Integrando a ambos lados:

$$x^2u = \int x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x + c$$

Esta integral la resolvemos mediante integración por partes:

$$\begin{cases} u = x & \longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x & \longrightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

Es decir,

$$x^2u = -x\cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x + c = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c$$

Por lo tanto,

$$u(x) = \frac{c + \operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2} \longrightarrow \boxed{y^2(x) = \frac{c + \operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2}}$$

Finalmente, la solución general viene dada por:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{c + \operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2}}$$

Como $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, entonces tomamos la rama positiva de la raíz y:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{c+1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}} \longrightarrow \sqrt{c+1} = \frac{2}{\pi} \longrightarrow \boxed{c = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 - 1}$$

□

P21 Calcule la solución del problema no lineal

$$yy' + \frac{1}{x} = \frac{e^{-y^2}}{x^2}$$

con condición inicial $y(2) = \sqrt{\ln 2}$. Determine su intervalo máximo de definición. *Ayuda:* Trate con una sustitución adecuada.

Solución:

Observe que uno de los términos *complicados* que aparece en la ecuación diferencial es e^{-y^2}, el cual genera una alta no linealidad en la ecuación diferencial. Por lo tanto, podemos probar simplificando la ecuación mediante la sustitución $u = e^{-y^2}$. Luego, derivando la sustitución con respecto a x:

$$u'(x) = -2ye^{-y^2}y'(x) = -2yu(x)y'(x) \longrightarrow -\frac{u'}{2u} = yy'$$

Reemplazando en la ecuación:

$$-\frac{u'}{2u} + \frac{1}{x} = \frac{u}{x^2}$$

Multiplicando por $-2u$:

$$u' - \frac{2}{x}u = -\frac{2}{x^2}u^2$$

obtenemos así una ecuación de Bernoulli con $P(x) = -2/x$, $Q(x) = -2/x^2$ y $n = 2$. Bajo la sustitución $v = u^{1-2} = u^{-1}$ obtenemos la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + (1-n)\,P\,(x)\,v(x) = (1-n)\,Q(x) \longrightarrow v' + \frac{2}{x}v = \frac{2}{x^2}$$

Usamos el factor integrante $\mu\,(x) = e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x} = x^2$, de modo que:

$$x^2v' + 2xv = 2 \longrightarrow \left(x^2v\right)' = 2 \longrightarrow x^2v = 2x + c$$

Por lo tanto,

$$v(x) = \frac{2}{x} + \frac{c}{x^2} \longrightarrow u(x) = \frac{1}{\dfrac{2}{x} + \dfrac{c}{x^2}}$$

Volviendo a la variable y:

$$e^{-y^2(x)} = \frac{1}{\dfrac{2}{x} + \dfrac{c}{x^2}} \longrightarrow e^{y^2(x)} = \frac{2}{x} + \frac{c}{x^2} \longrightarrow y^2\,(x) = \ln\left(\frac{2}{x} + \frac{c}{x^2}\right)$$

Finalmente, la solución general viene dada por:

$$y(x) = \pm\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x} + \frac{c}{x^2}\right)}$$

Haciendo $y\,(2) = \sqrt{\ln\,(2)}$ deducimos que debe tomarse la rama positiva como solución de la ecuación diferencial y que:

$$y\,(2) = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{c}{4}\right)} = \sqrt{\ln\,(2)} \longrightarrow 1 + \frac{c}{4} = 2 \longrightarrow c = 4$$

Es decir, la solución particular de la ecuación es:

$$\boxed{y\,(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}}$$

Esta solución está definida para x tales que se satisface simultáneamente:

- $\dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} > 0$
- $\ln\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right) \geq 0 \longrightarrow \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} \geq 1$

Luego, para encontrar el intervalo maximal basta con resolver la segunda inecuación:

$$\frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} - 1 \geq 0 \longrightarrow \frac{x^2 - 2x - 4}{x^2} \leq 0$$

La parábola $x^2 - 2x - 4$ tiene por raíces:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Como esta se abre hacia arriba y $x^2 \geq 0$ para todo x, entonces la solución de la inecuación es:

$$x \in \left[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right] \setminus \{0\} \longrightarrow \boxed{\mathrm{Dom}\,\{y\,(x)\} = \left[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right] \setminus \{0\}}$$

Debe notarse que descartamos $x = 0$ pues en este punto tanto la función como la inecuación se indeterminan.

$\square$

P22 **[Propuesto]** Recuerde que la curvatura κ de una curva $y = y\,(x)$ en el punto (x, y) está dada por:

$$\kappa \triangleq \frac{|y''\,(x)|}{\left[1 + y'\,(x)^2\right]^{3/2}}$$

y que la curvatura de una circunferencia de radio r es $\kappa = 1/r$. Sustituya $\rho = y'$ para obtener una solución general de la ecuación de segundo orden

$$ry'' = \left[1 + (y')^2\right]^{3/2}$$

con r constante de la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Así, una circunferencia de radio r es la única curva en el plano con curvatura constante $1/r$.

1.2.7. Ecuaciones de repaso

Si bien es fundamental adquirir los conocimientos necesarios para resolver cada tipo relevante de ecuación de primer orden, tal como se hizo en apartados anteriores, también es importante desarrollar la capacidad de resolver una ecuación diferencial de este orden desconociendo a priori qué tipo de ecuación es.

Por esta razón se propone revisar los siguientes problemas, donde se sugiere la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden sin especificar su tipo, agregando así una dificultad adicional.

La sugerencia evidente entonces es saber reconocer la estructura y característica de cada uno de los tipos de ecuaciones estudiados.

P23 Resuelva explícitamente las siguientes ecuaciones diferenciales y determine en cada caso el intervalo máximo de definición de la solución:

(a) $yy' = -x$, $y(4) = 3$.

(b) $y' + (\tan x)\, y = \cos^2 x$, $y(0) = -1$.

(c) $x^2 y' = 4x^2 + 7xy + 2y^2$ con $y(1) = -2$ e $y(1) = 4$.

(d) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$, $x \geq 1$, $y(1) = 1$.

(e) $xy' + y = x^4 y^3$.

Solución:

(a) Si bien la ecuación es claramente homogénea, resulta mucho más sencillo resolverla utilizando separación. En efecto,

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x \longrightarrow \frac{y^2}{2} = c - \frac{x^2}{2} \longrightarrow y^2 = 2c - x^2$$

Despejando y obtenemos que $y(x) = \pm\sqrt{2c - x^2}$ y de la condición inicial $y(4) = 3$ deducimos que debemos quedarnos exclusivamente con la rama positiva de la solución. Asimismo,

$$\sqrt{2c - 16} = 3 \longrightarrow 2c = 25$$

por lo que finalmente la solución del PVI es $\boxed{y(x) = \sqrt{25 - x^2}}$ cuyo intervalo máximo de definición es claramente $\boxed{x \in [-5, 5]}$.

(b) Podemos observar que esta ecuación es lineal de primer orden. Utilizamos entonces el factor integrante:

$$\mu(x) = \exp\left(\int \tan x\,\mathrm{d}x\right) = \exp\left(-\log|\cos x|\right) = \frac{1}{\cos x}$$

donde obviamos el módulo ya que estamos evaluando la ecuación diferencial en el entorno de $x = 0$, donde coseno es positivo. Multiplicando por el factor integrante obtenemos que:

$$\left[\frac{y}{\cos(x)}\right]' = \cos x \longrightarrow \frac{y(x)}{\cos(x)} = \operatorname{sen}(x) + c$$

Entonces,

$$y(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x) + c\cos(x)$$

De la condición inicial $y(0) = -1$ reemplazamos y obtenemos que:

$$y(0) = \boxed{c = -1}$$

Con esto concluimos que:

$$y(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x) - \cos(x)$$

y la ecuación queda definida para todo $\mathbb{R}$.

(c) Despejando y:

$$y' = \frac{4x^2 + 7xy + 2y^2}{x^2}$$

El grado del numerador es el mismo grado que el denominador, por lo cual la ecuación es homogénea. La dejamos en la forma $F(y/x)$ dividiendo por x^2 tanto el numerador como el denominador:

$$y' = 4 + 7\frac{y}{x} + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Entonces, $F(v) = 4 + 7v + 2v^2$. Hacemos la sustitución $v = y/x$ y obtenemos así la ecuación diferencial:

$$xv' + v = 4 + 7v + 2v^2 \longrightarrow xv' = 2\left(2 + 3v + v^2\right) = 2(v+1)(v+2)$$

Por inspección reconocemos de inmediato las soluciones especiales como aquellas en las cuales el lado derecho se anula. Estas son:

$$v = -1 \longrightarrow y = -x$$

$$v = -2 \longrightarrow y = -2x$$

Excluyendo estas soluciones, la ecuación se hace separable, obteniendo así que:

$$\frac{\mathrm{d}v}{(v+1)(v+2)} = \frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

Integrando a ambos lados, en particular aplicando fracciones parciales al lado izquierdo:

$$a\int \frac{\mathrm{d}v}{v+1} + b\int \frac{\mathrm{d}v}{v+2} = 2\ln|x| + c$$

Entonces,

$$a\ln|v+1| + b\ln|v+2| = 2\ln|x| + c$$

donde a y b son tales que:

$$a(v+2) + b(v+1) = 1$$

Haciendo $v = -1$ obtenemos que $a = 1$ y haciendo $v = -2$ obtenemos que $b = -1$. Luego,

$$\ln\left|\frac{v+1}{v+2}\right| = 2\ln|x| + c$$

Sacando los logaritmos:

$$\frac{v+1}{v+2} = \pm e^c x^2 = kx^2$$

con $k = \pm e^{c\ a}$. Luego,

$$v + 1 = kx^2 v + 2kx^2 \longrightarrow v\left(1 - kx^2\right) = 2kx^2 - 1$$

Es decir,

$$v(x) = \frac{2kx^2 - 1}{1 - kx^2}$$

Como $y = vx$ entonces:

$$\boxed{y(x) = -x} \quad ; \quad \boxed{y(x) = -2x} \quad ; \quad \boxed{y(x) = x\frac{2kx^2 - 1}{1 - kx^2}}$$

Ahora evaluamos cada una de las condiciones iniciales:

- Si $y(1) = -2$ es claro que la primera solución no puede satisfacerla. Asimismo, para la tercera solución:

$$y(1) = \frac{2k-1}{1-k} = -2 \longrightarrow 2k - 1 = 2k - 2$$

genera una ecuación incosistente. Por lo tanto, para esta condición inicial la única solución posible es $\boxed{y(x) = -2x}$. La solución queda definida para todo $\mathbb{R}$.

- Si $y(1) = 4$, por restricción de signos ninguna de las primeras dos soluciones puede satisfacerla. En cambio, la tercera solución:

$$y(1) = \frac{2k-1}{1-k} = 4 \longrightarrow 2k - 1 = 4 - 4k \longrightarrow \boxed{k = \frac{5}{6}}$$

Es decir,

$$\boxed{y(x) = x\frac{10x^2 - 6}{6 - 5x^2} = 2\frac{5x^3 - 3x}{6 - 5x^2}}$$

La solución queda definida para todo $x \in \left(-\sqrt{\frac{6}{5}}, \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$.

(d) Nuevamente, nos enfrentamos a una ecuación homogénea pues el grado del denominador es igual al del numerador. Dejamos la expresión de la forma $F(y/x)$ multiplicando arriba y abajo por $1/x^2$:

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} \longrightarrow F(v) = \frac{1 + v^2}{v}$$

Hacemos ahora la sustitución $v = y/x$, con lo cual obtenemos la ecuación diferencial:

$$xv' = \frac{1+v^2}{v} - v = \frac{1+v^2-v^2}{v} \longrightarrow xv' = \frac{1}{v}$$

Esta ecuación es claramente separable:

$$v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \longrightarrow v^2 = \ln|x| + c$$

Es decir,

$$v = \pm\sqrt{\ln|x|+c} \longrightarrow y(x) = \pm x\sqrt{\ln|x|+c}$$

Como $x \geq 1$, entonces $|x| = x$ y de la condición inicial $y(1) = 1$:

$$y(1) = \pm\sqrt{c} = 1$$

Estamos obligados entonces a quedarnos en este caso con la rama positiva y se obtiene que $c = 1$. Finalmente,

$$\boxed{y(x) = x\sqrt{\ln x + 1}}$$

(e) Bajo el mismo análisis de la parte anterior, deducimos que esta ecuación no es homogénea, separable ni lineal. Sin embargo, reescribiéndola:

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3y^3$$

obtenemos una ecuación de Bernoulli, donde $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x^3$ y $n = 3$. Hacemos $u = y^{1-3} = y^{-2}$ y obtenemos así la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x}v = -2x^3$$

Para esta ecuación lineal utilizamos el factor integrante:

$$\mu(x) = \exp\left[-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\right] = \exp(-2\ln x) = \frac{1}{x^2}$$

obteniendo así la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{x^2}v' - \frac{2}{x^3}v = -2x \longrightarrow \left(\frac{v}{x^2}\right)' = -2x$$

Integrando,

$$\frac{v}{x^2} = -x^2 + c \longrightarrow v(x) = cx^2 - x^4$$

Es decir,

$$\frac{1}{y^2} = cx^2 - x^4 \longrightarrow \boxed{y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{cx^2-x^4}}}$$

□

[a] Observe la utilidad de esto: guardamos el hecho de que los signos pueden ser positivos o negativos en la constante de la condición inicial, y luego cuando la despejemos decidiremos el signo.

P24 Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{t^3 + x\,\mathrm{sen}\,(t)}{\cos(t) - 2x}$.

(b) $(x^2t + t^2x)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^3 + t^3$.

(c) $x' + 5x = tx^3$.

(d) $(1 - x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y$.

(e) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

(f) $2y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^{-1}$.

Solución:

(a) La ecuación diferencial puede reescribirse como:

$$(\cos t - 2x)\,\mathrm{d}x = \left(t^3 + x\,\mathrm{sen}\,t\right)\mathrm{d}t \longrightarrow \underbrace{\left(t^3 + x\,\mathrm{sen}\,t\right)}_{M(t,x)}\mathrm{d}t \underbrace{-\,(\cos t - 2x)}_{N(t,x)}\,\mathrm{d}x = 0$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \mathrm{sen}\,t \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \mathrm{sen}\,t$$

Luego, como $M_x = N_t$ la ecuación es exacta y existe $f(t,x)$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= t^3 + x\,\mathrm{sen}\,t \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - \cos t \end{aligned}$$

Integrando la primera ecuación:

$$f(t,x) = \frac{t^4}{4} - x\cos t + \varphi(x)$$

Derivando con respecto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos t + \varphi'(x) = 2x - \cos t \longrightarrow \varphi'(x) = 2x$$

Integrando:

$$\varphi(x) = x^2 + c$$

Haciendo arbitrariamente $c = 0$ deducimos finalmente que:

$$f(t,x) = \frac{t^4}{4} - x\cos t + x^2 \longrightarrow \boxed{\frac{t^4}{4} - x\cos t + x^2 = C}$$

(b) La ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x^3 + t^3}{x^2 t + t x^2}$$

Como el numerador de la ecuación es igual al denominador de la fracción, entonces la ecuación es homogénea. La reescribimos de la forma x/t:

$$\frac{x^3 + t^3}{x^2 t + t^2 x} = \frac{\frac{x^3}{t^3} + 1}{\frac{x^2}{t^2} + \frac{x}{t}} \longrightarrow F\left(v\right) = \frac{v^3 + 1}{v^2 + v}$$

Haciendo $v = x/t$ y la ecuación se reescribe como:

$$t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F\left(v\right) - v \longrightarrow t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v^3 + 1}{v^2 + v} - v = \frac{v^3 + 1 - v^3 - v^2}{v\left(1 + v\right)}$$

Es decir,

$$t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1 - v^2}{v\left(1 + v\right)} = \frac{\left(1 + v\right)\left(1 - v\right)}{v} = \frac{1 - v}{v}$$

Esta ecuación es claramente separable, por lo cual hacemos:

$$\frac{v}{1 - v}\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}t}{t} \longrightarrow \left(\frac{v - 1}{1 - v} + \frac{1}{1 - v}\right)\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Integrando a ambos lados:

$$-\ln\left|1 - v\right| - v = \ln\left|t\right| + c$$

Reemplazando con la variable original obtenemos la curva implícita:

$$\boxed{-\ln\left|1 - \frac{x}{t}\right| - \frac{x}{t} = \ln\left|t\right| + c}$$

(c) Dado que aparece un término con x^3 al lado derecho y una ecuación lineal al lado izquierdo, reconocemos una ecuación de Bernoulli, donde $P(t) = 5$, $Q\left(t\right) = t$ y $n = 3$. Por lo tanto, hacemos la sustitución $v = y^{1-3} = y^{-2}$ y obtenemos así la ecuación lineal:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(1 - n\right)P\left(t\right)v(t) = \left(1 - n\right)Q(t) \longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - 10v = -2t$$

Utilizamos el factor integrante $\mu\left(t\right) = e^{-\int 10\,\mathrm{d}t} = e^{-10t}$. Luego, obtenemos la ecuación integrable

$$\left(e^{-10t}v\right)' = -2t \longrightarrow e^{-10t}v(t) = -t^2 + c$$

Es decir,

$$v(t) = ce^{10t} - t^2 e^{-10t}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{y^2} = ce^{10t} - t^2 e^{-10t} \longrightarrow \boxed{y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{ce^{10t} - t^2 e^{-10t}}}}$$

(d) Observamos que la ecuación es separable, obteniendo así:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{(1-x)(1+x)}$$

Integrando la ecuación a ambos lados:

$$\ln|y| = 2a \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} + 2b \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} + c$$

donde, aplicando el método de las fracciones parciales, a y b son tales que:

$$a(1+x) + b(1-x) = 1$$

Haciendo $x = 1$ obtenemos que $a = 1/2$ y haciendo $x = -1$ obtenemos que $b = 1/2$. Es decir,

$$\ln|y| = -\ln|1-x| + \ln|1+x| + c \longrightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

Tomando exponencial a ambos lados y eliminando el módulo:

$$\boxed{y(x) = \pm e^c \frac{1+x}{1-x} = k\frac{1+x}{1-x}}$$

donde $k = \pm e^c$.

(e) Observe que $\sqrt{x^2+y^2}$ se comporta *aproximadamente* como un polinomio de grado $2/2 = 1$. Por lo tanto, dividiendo:

$$y'(x) = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = f(x,y)$$

obtenemos una ecuación homogénea. En efecto,

$$f(\alpha x.\alpha y) = \frac{\alpha y + \alpha\sqrt{x^2+y^2}}{\alpha x} = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = f(x,y)$$

Ahora bien, identificamos nuestra función $F(y/x)$ dividiendo tanto el numerador como el denominador por x:

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \longrightarrow F(v) = v + \sqrt{1+v^2}$$

Hacemos la sustitución $v = y/x$ y obtenemos así la ecuación diferencial

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(v) - v \longrightarrow xv' = v + \sqrt{1+v^2} - v = \sqrt{1+v^2}$$

que es claramente separable. En efecto,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}} = \ln|x| + c$$

Para calcular la integral, hacemos $v = \operatorname{senh} t \longrightarrow \mathrm{d}v = \cosh t\,\mathrm{d}t$, de modo que:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}} = \int \mathrm{d}t = t = \operatorname{senh}^{-1} v$$

Es decir,

$$\operatorname{senh}^{-1} v = \ln|x| + c \longrightarrow v = \operatorname{senh}(\ln|x| + c) = \frac{e^{\ln|x|+c} - e^{-\ln|x|-c}}{2}$$

Por lo tanto,

$$v(x) = \frac{1}{2}\left(k|x| - \frac{1}{k|x|}\right)$$

con $k = e^c$. Finalmente, como $y(x) = xv(x)$ se tendrá que:

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{2}\left(k|x| - \frac{1}{k|x|}\right)}$$

(f) La estructura de la ecuación es claramente Bernoulli. Reordenándola:

$$y' + \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2}y^{-1}$$

con $P(x) = 1/2x$, $Q(x) = x^2/2$ y $n = -1$. Hacemos la sustitución $v = y^{1--1} = y^2$ y obtenemos así la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + (1-n)\,P(x)\,v(x) = (1-n)\,Q(x) \longrightarrow v' + \frac{1}{x}v = x^2$$

Usamos el factor integrante $e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = x$:

$$(xv)' = x^3 \longrightarrow xv(x) = \frac{x^4}{4} + c \longrightarrow v(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$$

Es decir,

$$y^2(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x} \longrightarrow \boxed{y(x) = \pm\sqrt{\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}}}$$

□

1.3. Problemas de modelamiento matemático

1.3.1. Ley de enfriamiento de Newton

De acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton, la tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo es proporcional a la diferencia entre el ambiente y la temperatura del ambiente. En otras palabras,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k\,(A - T) \tag{11}$$

Si $T > A$ (la temperatura del cuerpo es mayor que la temperatura ambiente), entonces la temperatura disminuirá y el cuerpo de enfriará. De la misma forma, si $T < A$ el cuerpo se calentará.

Cabe notar que esta ecuación es separable, por lo cual su resolución es sencilla y la estudiaremos en los siguientes problemas de modelamiento.

P25 Un objeto con temperatura desconocida es llevado a una habitación la cual se mantiene a temperatura constante de 30º F. Diez minutos después la temperatura del objeto es de 0º F y veinte minutos después (del instante inicial) la temperatura del objeto llega a 15º F. Asumiendo a la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton, determine la temperatura inicial del objeto.

Solución:

Sea $T(t)$ la temperatura del objeto en el instante t (en minutos). El objeto se calienta/enfría de acuerdo a la ley de Newton, de modo que el modelo que gobierna la temperatura está dado por el PVI

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k\,(A - T) = k\,(A - T)$$

con $T(0) = T_0$ por determinar. La ecuación es separable, de modo que:

$$\frac{\mathrm{d}T}{A - T} = k\,\mathrm{d}t \longrightarrow -\ln|A - T| = kt + c$$

Es decir,

$$A - T = \phi e^{-kt} \longrightarrow T(t) = A - \phi e^{-kt}$$

con $\phi = \pm e^{-c}$. Entonces,

$$T(0) = T_0 = A - \phi \longrightarrow \phi = A - T_0 \longrightarrow T(t) = A - (A - T_0)\, e^{-kt}$$

De acuerdo a la información del enunciado se tiene que $A = 30$, $T(10) = 0$ y $T(20) = 15$. Es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= 30 - (30 - T_0)\, e^{-10k} \\ 15 &= 30 - (30 - T_0)\, e^{-20k} \end{aligned}$$

De la primera ecuación,

$$30 - T_0 = 30 e^{10k}$$

De la segunda,

$$30 - T_0 = 15 e^{20k}$$

Dividiendo ambas ecuaciones,

$$1 = \frac{1}{2} e^{10k} \longrightarrow 2 = e^{10k} \longrightarrow k = \frac{1}{10} \ln 2$$

Reemplazando en la primera ecuación,

$$T_0 = 30 - 30 e^{\ln 2} = 30 - 30 \cdot 2 = -30^{\text{o}} \text{ F}$$

Es decir, la temperatura inicial del objeto es -30^{o} F.

$\square$

P26 Un cadáver fue hallado dentro de un cuarto que estaba a temperatura constante de 70^{o} F. Al momento del descubrimiento la temperatura del cadáver era de 85^{o} F y una hora después, una segunda medición mostró que la temperatura del cadáver era de 80^{o} F. Suponiendo que en el momento de la muerte el cuerpo estaba a 98^{o} F, determine cuántas horas pasaron antes de que el cadáver fuera encontrado. Asuma que la temperatura del cadáver cambia con rapidez proporcional a la diferencia entre ella y la temperatura del cuarto.

Solución:

Nuevamente, asumimos la ley de enfriamiento de Newton. Sea T la temperatura del cadáver en el instante t (en minutos). Entonces,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k\,(A - T)$$

Del problema anterior ya sabemos que:

$$T(t) = A - (A - T_0)\, e^{-kt}$$

Interpretemos ahora los datos del problema. En efecto, sabemos que $A = 70$, $T(0) = 85$, $T(60) = 80$ y $T(t_d) = 98$ con t_d el instante de descubrimiento (por determinar). Luego,

$$85 = 70 - (70 - T_0) \longrightarrow T_0 = 85$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial es:

$$T(t) = 70 + 15e^{-kt}$$

Interpretando la tercera ecuación:

$$T(60) = 80 = 70 + 15e^{-kt} \longrightarrow \frac{2}{3} = e^{-60k} \longrightarrow k = \frac{1}{60}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Finalmente, t_d es tal que:

$$98 = 70 + 15e^{-\frac{1}{60}\ln\left(\frac{3}{2}\right)t_d} \longrightarrow \frac{1}{60}\ln\left(\frac{3}{2}\right)t_d = \frac{15}{28} \longrightarrow \boxed{t_d = \frac{60 \times 15}{28\ln(3/2)} \approx 79{,}27}$$

Es decir, el cadáver es descubierto aproximadamente 79.27 minutos después del instante de muerte.

□

1.3.2. Modelamiento de poblaciones y ecuación logística

Se desea modelar y estudiar el comportamiento y evolución de una población de individuos de una especie en el tiempo dada la ocurrencia de cierta fenómeno. Lo primero que debe realizarse es la determinación de un modelo matemático que describa tales sucesos.

Supongamos que la población cambia solo por la ocurrencia de nacimientos y muertes (descartando así inmigración y emigración de individuos). Suele tratarse el crecimiento o disminución de una población en términos de funciones de tasas de natalidad y mortalidad:

- $\beta(t)$ es el número de nacimientos por unidad de población por unidad de tiempo en el tiempo t.
- $\delta(t)$ es el número de muertes por unidad de población por unidad de tiempo en el tiempo t.

Entonces, el número de nacimientos y muertes registrado en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ es:

$$\begin{aligned} \text{nacimientos} &= \beta(t)\, P(t)\Delta t \\ \text{muertes} &= \delta(t)\, P(t)\, \Delta t \end{aligned}$$

Por lo tanto, la variación de población ΔP en el instante Δt es:

$$\Delta P = [\beta(t) - \delta(t)]\, P(t)\, \Delta t$$

Haciendo $\Delta t \to 0$ para eliminar el error de aproximación obtenemos la *ecuación de población general.*

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \left[\beta\left(t\right) - \delta\left(t\right)\right] P\left(t\right) \tag{12}$$

La ecuación logística. En muchas situaciones se ha observado que la tasa de nacimientos decrece en la medida que la población se incrementa. A modo de ejemplo, esto sucede cuando los recursos del medio son limitados. Supongamos entonces que $\beta\left(t\right)$ en el caso más sencillo es una función lineal de la población en el instante t, i.e. $\beta\left(t\right) = \beta_0 - \beta_1 P\left(t\right)$ y que la tasa de mortalidad permanece constante como $\delta\left(t\right) = \delta_0$. Luego,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \left(\beta_0 - \beta_1 P - \delta_0\right) P \longrightarrow \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(M - P\right) \tag{13}$$

donde $k = \dfrac{1}{\beta_1}$ y $M = \dfrac{\beta_0 - \delta_0}{\beta_1}$. Asumimos una población inicial $P\left(0\right) = P_0$.

Si k y M son positivos, entonces esta ecuación se conoce como *ecuación logística.*

Resolución de la ecuación logística. Observamos que esta ecuación es separable. En efecto,

$$\frac{\mathrm{d}P}{P\left(M - P\right)} = k\,\mathrm{d}t$$

Aplicando el método de las fracciones parciales:

$$\frac{1}{P\left(M - P\right)} = \frac{1}{M}\frac{1}{P} + \frac{1}{M}\frac{1}{M - P}$$

Luego, integrando,

$$\frac{1}{M}\ln\left|\frac{P}{M - P}\right| = kt + c$$

Luego,

$$\frac{P}{M - P} = \phi e^{Mkt}$$

donde $\phi = \pm e^{Mc}$. Despejando P:

$$P\left(1 + \phi e^{Mkt}\right) = M\phi e^{Mkt}$$

Es decir,

$$P\left(t\right) = \frac{M\phi e^{Mkt}}{1 + \phi e^{Mkt}}$$

Haciendo $P\left(0\right) = P_0$ obtenemos que:

$$P\left(0\right) = \frac{M\phi}{1 + \phi} = P_0 \longrightarrow \left(M - P_0\right)\phi = P_0 \longrightarrow \phi = \frac{P_0}{M - P_0}$$

Reemplazando en $P\left(t\right)$:

$$P\left(t\right) = \frac{M\dfrac{P_0}{M - P_0}e^{Mkt}}{1 + \dfrac{P_0}{M - P_0}e^{Mkt}} = \frac{MP_0 e^{Mkt}}{M - P_0 + P_0 e^{Mkt}}$$

Finalmente,

$$\boxed{P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)\, e^{-Mkt}}}$$

Observe que:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{MP_0}{P_0} = M$$

Por lo tanto, la población logística se aproxima a la población límite finita M conforme $t \to \infty$. Asimismo, salvo en el caso $M = P_0$, en el cual la población es constante e igual M, el comportamiento de una población logística depende de P_0 y M (ambos valores positivos):

- Si $P_0 < M$, entonces $M - P_0 > 0$ y por lo tanto

  $$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + \underbrace{(M - P_0)\, e^{-Mkt}}_{>0}} < \frac{MP_0}{P_0} = M$$

  Asimismo, $P'(t) = kP(M - P) > 0$, por lo que la población tiende a crecer monotónicamente hasta el valor límite M.

- Si $P_0 > M$, entonces $M - P_0 < 0$ y por lo tanto

  $$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + \underbrace{(M - P_0)\, e^{-Mkt}}_{<0}} > \frac{MP_0}{P_0} = M$$

  Como $P'(t) = kP(M - P) < 0$, por lo que la población tiende a decrecer monotónicamente hasta el valor límite M.

Importante: Se recomienda no memorizar la solución de la ecuación diferencial, si no que estudiar su técnica de resolución.

P27 Una persona de un pueblo de 1000 habitantes contrajo la gripe. Si se supone que la gripe se propaga con una rapidez directamente proporcional al número de contagiados como también al número de no contagiados, determinar el número de contagiados cinco días después, si se observa que el número de contagiados después de un día es de 100.

Solución:

Digamos que $x(t)$ es el número de contagiados en el día t. Entonces, de acuerdo al modelo descrito se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(1000 - x)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Entonces,

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(1000 - x)} = k\,\mathrm{d}t$$

Integrando a ambos lados obtenemos que:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1000-x)} = kt + c$$

Aplicando el método de fracciones parciales,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1000-x)} = a\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + b\int \frac{\mathrm{d}x}{1000-x} = a\ln|x| - b\ln|1000-x|$$

donde a y b son tales que:

$$a\,(1000-x) + bx = 1$$

Haciendo $x = 1000$ obtenemos que $b = 1/1000$ y haciendo $x = 0$ obtenemos que $a = 1/1000$, con lo cual:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1000-x)} = \frac{1}{1000}\ln\left|\frac{x}{1000-x}\right|$$

Luego,

$$\frac{1}{1000}\ln\left|\frac{x}{1000-x}\right| = kt + c$$

Es decir,

$$\ln\left|\frac{x}{1000-x}\right| = 1000kt + 1000c$$

Elevando al cuadrado y haciendo $d = e^{1000c}$ obtenemos que:

$$\frac{x}{1000-x} = de^{1000kt} \longrightarrow x = de^{1000kt}\,(1000-x)$$

Por lo tanto,

$$x\left(1 + de^{1000kt}\right) = 1000de^{1000kt} \longrightarrow x\,(t) = 1000d\frac{e^{1000kt}}{1 + de^{1000kt}}$$

En $t = 0$ la cantidad de contagiados es 1, con lo cual:

$$x\,(0) = \frac{1000d}{1+d} = 1 \longrightarrow 1000d = 1 + d \longrightarrow d = \frac{1}{999}$$

Asimismo, podemos determinar k considerando que $x\,(1) = 100$:

$$x\,(1) = \frac{1000}{999}\frac{e^{1000k}}{1 + \frac{1}{999}e^{1000k}} = 100 \longrightarrow k = \frac{\ln(111)}{1000}$$

Por lo tanto, la cantidad de contagiados en el instante t queda dada por:

$$x\,(t) = \frac{1000}{999}\frac{111^t}{1 + \frac{111^t}{999}}$$

Finalmente, la cantidad de contagiados 5 días después ($t = 5$) es:

$$\boxed{x(5) = \frac{1000}{999} \frac{111^5}{1 + \dfrac{111^5}{999}} \approx 999{,}99}$$

Es decir, prácticamente la totalidad de la población está contagiada.

$\square$

Sin desmedro del problema anterior, existen modelos más complejos para describir la evolución de una población, los cuales pueden ser enunciados, planteados y posteriormente resuelta la ecuación diferencial asociada utilizando las técnicas ya aprendidas. Revisemos los siguientes ejemplos:

P28 Considere una población $P(t)$ de animales simples en la cual las hembras solamente sostienen encuentros casuales con los machos para propósitos reproductivos, de modo que la tasa de nacimientos es proporcional a P^2. La tasa de mortalidad es proporcional a la población P, de modo que la ecuación que describe el comportamiento de la población está dada por el problema con valores iniciales:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP^2 - \delta P = kP(P - M) \quad ; \quad M = \frac{\delta}{k}$$

con condición inicial $P(0) = P_0$. Este problema se conoce como el **problema de extinción–explosión**.

(a) Determine la solución general del problema.

(b) ¿Cómo es el comportamiento de $P(t)$ conforme t se incrementa?, ¿depende de que $0 < P_0 < M$ o de que $P_0 > M$?

Solución:

(a) La ecuación es claramente separable, de modo que

$$\frac{\mathrm{d}P}{P(P - M)} = k\,\mathrm{d}t$$

Aplicando el método de las fracciones parciales,

$$\frac{1}{P(P - M)} = \frac{a}{P} + \frac{b}{P - M}$$

donde $a(P - M) + bP = 1$ con lo que haciendo $P = 0$ obtenemos que $a = -1/M$ y haciendo $P = M$ obtenemos que $b = 1/M$. De esta forma, integrando la ecuación diferencial a ambos lados:

$$\frac{1}{M} \ln\left|\frac{P - M}{P}\right| = kt + c \longrightarrow \frac{P - M}{P} = \phi e^{Mkt}$$

donde $\phi = \pm e^{Mc}$. Entonces, obtenemos la ecuación algebraica

$$\frac{P-M}{P} = \phi e^{Mkt} \longrightarrow P\left(1-\phi e^{Mkt}\right) = M \longrightarrow P(t) = \frac{M}{1-\phi e^{Mkt}}$$

Reemplazando con la condición inicial

$$P(0) = P_0 = \frac{M}{1-\phi} \longrightarrow P_0 - P_0\phi = M \longrightarrow \phi = \frac{P_0 - M}{P_0}$$

Es decir,

$$\boxed{P(t) = \frac{M}{1-\dfrac{P_0-M}{P_0}e^{Mkt}} = \frac{MP_0}{P_0 + (M-P_0)\,e^{Mkt}}}$$

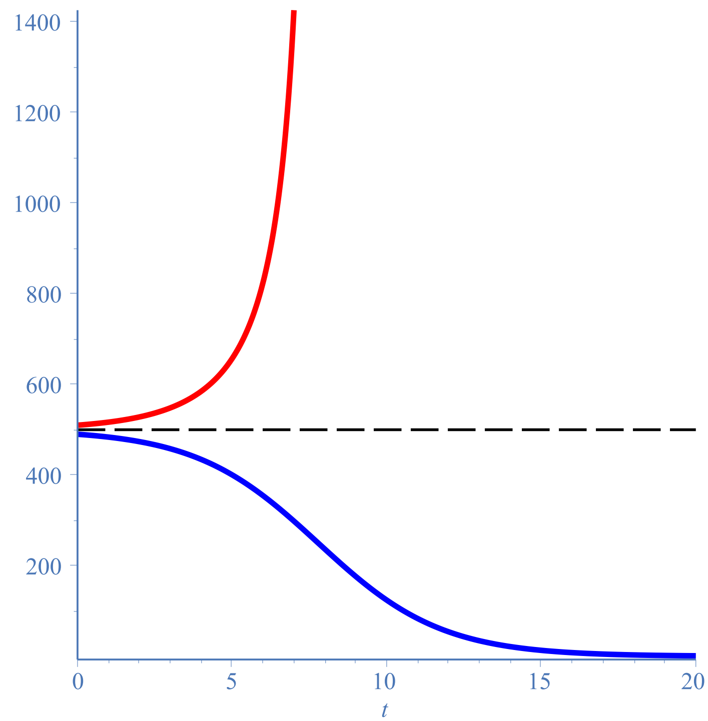
(b) El comportamiento depende del signo de $M - P_0$:

- Si $P_0 < M$ entonces $M - P_0$ es positivo y por lo tanto $P(t)$ es monótona decreciente, con $P(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \to \infty$, por lo que la población tiende a la extinción.
- Si $P_0 > M$ entonces $M - P_0$ es negativo y por lo tanto $P(t)$ es monótona creciente. No solo ello, el denominador puede anularse en:

$$P_0 + (M-P_0)\,e^{Mkt} = 0 \longrightarrow e^{Mkt} = \frac{P_0}{P_0 - M} \longrightarrow t = \frac{1}{Mk}\ln\left(\frac{P_0}{P_0-M}\right)$$

  por lo que la población crecerá de forma verticalmente asintótica a medida que se aproxima ese valor. De aquí que se observa un comportamiento *explosivo*.

En la siguiente gráfica asumimos una tasa k de 0.1 %, $M = 500$ y $P_0 = M \pm 10$, obteniendo así las siguientes dinámicas de población:



Queda de manifiesto que M es un valor crítico de población en el sentido de que la posición relativa de la población inicial P_0 con respecto a M determina la evolución de la población.

¿Qué sucede si $P_0 = M$? En dicho caso la solución se convierte en $P(t) = M$, por lo que la población se mantiene constante en M.

$\square$

P29 ($\star$) Comúnmente las tasas de natalidad y mortalidad en poblaciones de animales no son constantes, sin embargo, varían periódicamente con el paso de las estaciones. Encuentre $P(t)$ si la población P satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (k + b\cos 2\pi t)\, P$$

donde t está en años, y k y b son constantes positivas. De este modo, la función de la tasa de crecimiento $r(t) = k + b\cos 2\pi t$ varía periódicamente alrededor del valor medio k. Diseñe una gráfica que contraste el crecimiento de esta población con otra que tenga el mismo valor inicial P_0 pero que satisfaga la ecuación de crecimiento natural kP (con la misma constante k). ¿Cómo son las dos poblaciones al paso de muchos años?

Solución:

La ecuación diferencial sigue siendo separable, de modo que:

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = (k + b\cos 2\pi t)\, \mathrm{d}t$$

Integrando,

$$\ln|P| = kt + \frac{b}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi t + c$$

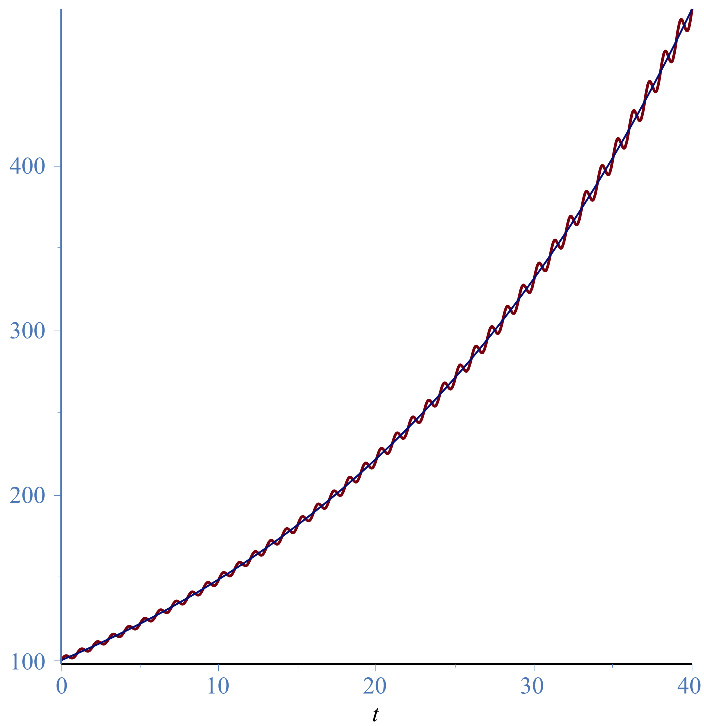
Es decir,

$$P(t) = \phi e^{kt + \frac{b}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi t}$$

con $\phi = \pm e^c$. Luego, si $P(0) = P_0$, entonces $\phi = P_0$ y por lo tanto:

$$\boxed{P(t) = P_0 e^{kt + \frac{b}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi t}}$$

Para el crecimiento natural, ya sabemos que la solución es $P_n(t) = P_0 e^{kt}$, por lo que graficando ambas soluciones con $P_0 = 100$ y $k = b = 0{,}01$:



Gráficamente puede apreciarse que la diferencia entre ambas curvas se hace mínima a medida que la población aumenta. En efecto,

$$P(t) - P_n(t) = P_0 e^{kt}\left(e^{\frac{b}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi t} - 1\right)$$

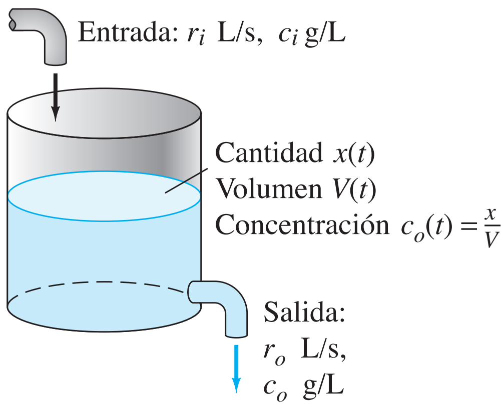
Para valores de b pequeños $e^{\frac{b}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi t} \approx 1$, por lo que la diferencia entre ambas poblaciones es aproximadamente cero.

$\square$

1.3.3. Problema de mezclas

En este tipo de problemas se considera un tanque que contiene una solución (soluto y solvente). Hay tanto flujo que entra como que sale del tanque y se desea calcular la cantidad $x(t)$ de soluto en el tanque en el instante t dada la cantidad inicial $x(0) = x_0$.

Suponemos que la solución con una concentración de c_i gramos de soluto por litro fluye al interior del tanque a una tasa constante de r_i litros por segundo, y que la solución en el tanque fluye hacia afuera con una tasa de r_0 litros por segundo. Es decir, el problema del estanque puede resumirse en el siguiente gráfico:



Se sigue que la variación de masa de soluto Δx_i producto del ingreso de flujo puede aproximarse por:

$$\Delta x_i \approx r_i c_i \Delta t$$

De forma análoga, la variación de masa de soluto Δx_o producto de la salida de flujo puede aproximarse por:

$$\Delta x_o \approx r_o c_o \Delta t$$

En todo instante el tanque tiene una cantidad $x(t)$ de soluto y un volumen $V(t)$. Por lo tanto, asumiendo que se produce la mezcla se tendrá que la concentración de salida viene dada por $c_0 = {}^{x(t)}/_{V(t)}$. Luego, la variación total de masa de soluto queda expresada como:

$$\Delta x = \Delta x_i - \Delta x_i \approx \Delta t \left[r_i c_i - r_o \frac{x(t)}{V(t)} \right]$$

Tomando $\Delta t \to 0$ eliminamos el error en la aproximación, obteniendo así que:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r_i c_i - r_o \frac{x(t)}{V(t)}$$

Sin embargo, $V(t)$ no es una función arbitraria, pues la evolución para un volumen inicial V_0 puede determinarse como:

$$V(t) = V_0 + (r_i - r_o)\, t$$

Luego,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{r_o}{V_0 + (r_i - r_o)\, t} x(t) = r_i c_i} \tag{14}$$

Esta es una ecuación lineal de primer orden que puede resolverse mediante los métodos del factor integrante.

P30 Un estanque con capacidad de 400 litros contiene 200 litros de agua en la que se hallan disueltos 100 kg. de sal. Se comienza a introducir, a razón de 3 litros por minuto, salmuera con una concentración de 100 grs. de sal por litro de agua y la mezcla, que se mantiene homogénea por agitación, sale del estanque a razón de 2 litros por minuto. Hallar la cantidad de sal (en kgs.) presente en el estanque en el instante preciso que éste se llena.

Solución:

Identificando los parámetros de acuerdo al modelo descrito anteriormente, se tiene que:

- $V_0 = 200$ litros.
- $x(0) = x_0 = 100$ kg.
- $r_i = 3$ litros/minuto.
- $c_i = 0{,}1$ kg/litro.
- $r_o = 2$ litros/minuto.

Para resolver la ecuación 1.11 utilizamos el factor integrante:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \exp\left[\int \frac{r_o}{V_0 + (r_i - r_o)\,t}\mathrm{d}t\right] = \exp\left[\frac{r_o}{r_i - r_o}\ln|V_0 + (r_i - r_o)\,t|\right] \\ &= [V_0 + (r_i - r_o)\,t]^{r_o/(r_i - r_o)} \end{aligned}$$

Luego,

$$(\mu x)' = r_i c_i\,[V_0 + (r_i - r_o)\,t]^{r_o/(r_i - r_o)}$$

Integrando,

$$\mu x = \frac{r_i c_i}{r_i - r_o}\frac{1}{\frac{r_o}{r_i - r_o} + 1}[V_0 + (r_i - r_o)\,t]^{\frac{r_o}{r_i - r_o}+1} + c = c_i\,[V_0 + (r_i - r_o)\,t]^{\frac{r_i}{r_i - r_o}} + c$$

Dividiendo por μ:

$$x(t) = c_i\,[V_0 + (r_i - r_o)\,t] + c\,[V_0 + (r_i - r_o)\,t]^{-\frac{r_o}{r_i - r_o}}$$

Reemplazando con la condición inicial:

$$x(0) = c_i V_0 + c V_0^{-\frac{r_o}{r_i - r_o}} = x_0 \longrightarrow c = V_0^{\frac{r_0}{r_i - r_0}}(x_0 - c_i V_0)$$

Reemplazando,

$$\boxed{x(t) = c_i\,[V_0 + (r_i - r_o)\,t] + (x_0 - c_i V_0)\left[\frac{V_0}{V_0 + (r_i - r_o)\,t}\right]^{\frac{r_o}{r_i - r_o}}} \qquad (15)$$

El estanque se llena cuando:

$$V_0 + (r_i - r_o)\, t_f = V_t \longrightarrow t_f = \frac{V_t - V_0}{r_i - r_o}$$

Reemplazando,

$$x(t_f) = c_i V_t + (x_0 - c_i V_0) \left(\frac{V_0}{V_t}\right)^{\frac{r_o}{r_i - r_o}}$$

Asignando los valores numéricos:

$$x(t_f) = 0{,}1 \times 400 + (100 - 0{,}1 \times 200) \left(\frac{200}{400}\right)^{\frac{2}{3-2}} = 40 + 80 \cdot \frac{1}{4} = 60\,\mathrm{kg}$$

Es decir, hay 60 kg de sal presentes en el estanque cuando este rebalsa.

□

P31 En un estanque ingresan 3 litros/seg de salmuera con una concentración de sal de 10 grs/litro. Desde el estanque salen 6 litros/seg de solución homogénea. Si inicialmente en el estanque hay 600 litros de salmuera con una concentración de sal de 20 grs/litro, determine la cantidad de sal en el estanque cuando quedan 300 litros de salmuera y el valor límite de la concentración de sal cuando el estanque se vacía.

Solución:

Nuevamente, interpretando los datos:

- $r_i = 3$ litros/seg.
- $c_i = 0{,}01$ kg/litro.
- $r_o = 6$ litros/seg.
- $V_0 = 600$ litros.
- $x_0 = 0{,}02 V_0 = 12$ kg.

El modelo es exactamente el mismo que el del problema anterior, por lo cual la evolución de la concentración en el tiempo queda dada por:

$$x(t) = c_i \left[V_0 + (r_i - r_o)\, t\right] + (x_0 - c_i V_0) \left[\frac{V_0}{V_0 + (r_i - r_o)\, t}\right]^{\frac{r_o}{r_i - r_o}}$$

La evolución del volumen en el tiempo queda dada por:

$$V(t) = V_0 + (r_i - r_o)\, t$$

Entonces, digamos que t^* es cuando se alcanzan los V^* litros de salmuera:

$$V_0 + (r_i - r_o)\, t^* = V^* \longrightarrow t^* = \frac{V^* - V_0}{r_i - r_o}$$

Es decir,

$$x\left(t^*\right)=c_iV^*+\left(x_0-c_iV_0\right)\left(\frac{V_0}{V^*}\right)^{\frac{r_o}{r_i-r_o}}$$

Como $r_i-r_0<0$ entonces la expresión es equivalente a:

$$x\left(t^*\right)=c_iV^*+\left(x_0-c_iV_0\right)\left(\frac{V^*}{V_0}\right)^{\frac{r_o}{r_o-r_i}}$$

Haciendo $V^*=300$ litros obtenemos que:

$$x\left(t^*\right)=0{,}01\times 300+\left(12-0{,}01\times 600\right)\left(\frac{600}{300}\right)^{\frac{6}{3-6}}=3+6\left(\frac{1}{2}\right)^2\longrightarrow \boxed{x\left(t^*\right)=4{,}5\text{ kg}}$$

La concentración en el instante en que se alcanza el volumen V^* viene dada por:

$$\frac{x\left(t^*\right)}{V^*}=c_i+\frac{x_0-c_iV_0}{V_0^{r_o/(r_o-r_i)}}V^{*\left(\frac{r_o}{r_o-r_i}-1\right)}=c_i+\frac{x_0-c_iV_0}{V_0^{r_o/(r_o-r_i)}}V^{*\left(\frac{r_i}{r_o-r_i}\right)}$$

Luego, tomando el límite:

$$\lim_{t\to 0}\frac{x\left(t^*\right)}{V^*}=\lim_{t\to 0}c_i+\frac{x_0-c_iV_0}{V_0^{r_o/(r_o-r_i)}}V^{*\left(\frac{r_i}{r_o-r_i}\right)}$$

Como $r_i>0$ y $r_o-r_i>0$, el término que depende de V^* tiende a cero. Finalmente,

$$\boxed{\lim_{V^*\to 0}\frac{x\left(t^*\right)}{V^*}=c_i=0{,}01\ \frac{\text{kg}}{\text{litro}}}$$

□

1.3.4. Otros problemas

Los problemas de modelamiento estudiados con anterioridad pueden considerarse los tipos de problemas estándar de esta sección. Sin embargo, existen otro tipo de problemas de modelamiento en que pueden emplearse ecuaciones diferenciales de primer orden tal como los que se presentan a continuación.

La metodología de resolución es similar en cada problema:

- A partir de conocimientos básicos se plantea el modelo que describe la evolución del fenómeno en el tiempo, así como sus condiciones iniciales.
- Mediante las técnicas de resolución ya aprendidas se resuelve la ecuación diferencial.

P32 Un cable se encuentra suspendido entre dos postes fijos de altura a. Se puede deducir que la ecuación que representa la forma que tiene el cable está dada por el problema de valores iniciales:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

$$y\left(0\right) = a \quad ; \quad y'\left(0\right) = 0$$

Determine la curva $y = y\left(x\right)$, que representa la forma que tiene el cable.

Solución:

Partimos notando que en la ecuación diferencial no aparece $y\left(x\right)$, si no que su primera y segunda derivada, razón por la cual resulta conveniente realizar la sustitución $v = y'$. De esta forma, la ecuación diferencial se escribe como:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{a}\sqrt{1+v^2}$$

Esta ecuación puede resolverse mediante integración directa:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{d}x \longrightarrow \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}}}_{(*)} = \frac{x}{a} + c$$

Cálculo de la integral. Calculemos $(*)$. Para ello, recordamos de los primeros cursos de Cálculo que puede realizarse la sustitución $v = \tan\left(t\right) \to \mathrm{d}v = \sec^2\left(t\right)\mathrm{d}t$ y para aplicar la condición de inyectividad asumimos que t está en el primer cuadrante. Es decir,

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}} = \int \frac{\sec^2\left(t\right)}{\sqrt{1+\tan^2\left(t\right)}}\mathrm{d}t = \int \sec\left(t\right)\mathrm{d}t$$

Recordando que la primitiva de $\sec\left(t\right)$ es $\ln\left|\sec t + \tan t\right|$, entonces:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}} = \ln\left|\sec t + \tan t\right|$$

Pero $v = \tan t$ y como $1+\tan^2 t = \sec^2 t \longrightarrow 1+v^2 = \sec^2 t \longrightarrow \sec t = \sqrt{1+v^2}$ dado el cuadrante de t. Entonces,

$$\ln\left|v \pm \sqrt{1+v^2}\right| = \frac{x}{a} + c$$

Podemos eliminar la constante inmediatamente notando que $y'\left(0\right) = 0 \longrightarrow v\left(0\right) = 0$. Es decir $c = 0$. Despejando,

$$\left|v + \sqrt{1+v^2}\right| = e^{x/a} \longrightarrow \boxed{v + \sqrt{1+v^2} = \pm e^{x/a}}$$

Solución de la ecuación. Entonces, de la ecuación $av' = \sqrt{1+v^2}$ obtenemos sustituyendo que:

$$v + av' = \pm e^{x/a} \longrightarrow v' + \frac{1}{a}v = \pm\frac{1}{a}e^{x/a}$$

Usando el factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{a}\mathrm{d}x} = e^{x/a}$, entonces:

$$e^{x/a}v' + \frac{e^{x/a}}{a}v = \pm\frac{1}{a}e^{2x/a} \longrightarrow \left(e^{x/a}v\right)' = \pm\frac{1}{a}e^{2x/a}$$

Integrando la relación anterior obtenemos que:

$$e^{x/a}v = \pm\frac{1}{2}e^{2x/a} + d \longrightarrow v(x) = \pm\frac{1}{2}e^{x/a} + de^{-x/a}$$

Como $v(0) = 0$, entonces:

$$0 = \pm\frac{1}{2} + d \longrightarrow d = \mp\frac{1}{2}$$

Es decir,

$$v(x) = \pm\frac{1}{2}e^{x/a} \mp \frac{1}{2}e^{-x/a} = \pm\frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} = \pm\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Como $v = y'$, entonces:

$$y(x) = \pm\int \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x + c = \pm a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Como $y(0) = a$, entonces:

$$a = \pm a + c \longrightarrow c = a \mp a$$

Así,

$$y(x) = \pm a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + a \mp a$$

Sin embargo, si nos quedamos con la rama negativa, entonces,

$$y(x) = 2a - a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Derivando,

$$y'(x) = -\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) \longrightarrow y''(x) = -\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Pero observando la ecuación diferencial original, notamos que $y''(x) > 0$ para todo x y $\cosh(\square) > 0$ para todo $\square$ por tratarse de una suma de exponenciales. Esta inconsistencia de signos nos lleva a concluir que no es posible considerar la rama negativa, por lo cual finalmente la única solución posible es la positiva:

$$\boxed{y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$\square$

P33 Un paracaidista se deja caer de un avión a 3000 m de altura. La aceleración de gravedad es $g = 9{,}8$ m/s^2 y la desaceleración debido a la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad con constante de proporción $\rho = 0{,}25$ m^{-1}. Determine el tiempo que toma para llegar al piso y la velocidad del impacto.

Solución:

Lo primero que debemos hacer es escribir el modelo asociado a este problema. La dinámica vertical queda describa por la segunda ley de Newton. Digamos que y es la posición vertical del paracaidista, luego:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g + \rho \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

donde consideramos la componente de la velocidad sumada bajo el siguiente razonamiento: de forma natural el paracaidísta caerá hacia abajo, por lo tanto su aceleración será negativa, luego, a medida que aumenta el cuadrado de la velocidad. Completamos el PVI considerando $y(0) = y_0 = 3000$. Hacemos $u = y'$ de forma similar a problemas anteriores, obteniendo así que:

$$u' = -g + \rho u^2$$

Es decir,

$$\frac{\mathrm{d}u}{-g + \rho u^2} = \mathrm{d}t$$

Integrando a ambos lados,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{-g + \rho u^2} = t + c$$

Cálculo de la integral. Calculemos I, para ello hacemos el método de fracciones parciales:

$$\frac{1}{\rho u^2 - g} = \frac{1}{\rho}\frac{1}{u^2 - \frac{g}{\rho}} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{a}{u - \sqrt{\frac{g}{\rho}}} + \frac{b}{u + \sqrt{\frac{g}{\rho}}}\right)$$

De aquí,

$$a\left(u + \sqrt{\frac{g}{\rho}}\right) + b\left(u - \sqrt{\frac{g}{\rho}}\right) = 1$$

Haciendo $u = \sqrt{\frac{g}{\rho}}$ obtenemos que:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{g}}$$

De la misma forma, con $u = -\sqrt{\frac{g}{\rho}}$ obtenemos que:

$$b = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{g}}$$

Es decir,

$$\frac{1}{\rho u^2 - g} = \frac{1}{2\sqrt{\rho g}}\left(\frac{1}{u-\sqrt{\dfrac{g}{\rho}}} - \frac{1}{u+\sqrt{\dfrac{g}{\rho}}}\right)$$

Integrando,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\rho u^2 - g} = \frac{1}{2\sqrt{\rho g}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{\dfrac{g}{\rho}}}{u+\sqrt{\dfrac{g}{\rho}}}\right|$$

Despeje de la función u. Se tiene entonces que:

$$\frac{1}{2\sqrt{\rho g}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{\dfrac{g}{\rho}}}{u+\sqrt{\dfrac{g}{\rho}}}\right| = t + c$$

Dado que el paracaidista parte del reposo, entonces $u\left(0\right) = y'\left(0\right) = 0$ y por lo tanto $c = 0$. Es decir,

$$-\frac{u-\sqrt{\dfrac{g}{\rho}}}{u+\sqrt{\dfrac{g}{\rho}}} = e^{2\sqrt{\rho g}\,t}$$

Observe que antepusimos el signo $-$ debido a que en caso contrario para $u = 0$ y $t = 0$ no se satisface la igualdad.

Despejando u obtenemos que:

$$u - \sqrt{\frac{g}{\rho}} = -e^{2\sqrt{\rho g}t}u - e^{2\sqrt{\rho g}t}\sqrt{\frac{g}{\rho}}$$

Es decir,

$$u\left(1+e^{2\sqrt{\rho g}t}\right) = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\left(1-e^{2\sqrt{\rho g}t}\right) \longrightarrow \boxed{u\left(t\right) = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\frac{1-e^{2\sqrt{\rho g}t}}{1+e^{2\sqrt{\rho g}t}}}$$

Es claro que cuando $t \to \infty$, $u\left(t\right) \to -\sqrt{\dfrac{g}{\rho}}$ la cual será la velocidad terminal.

Cálculo de la posición. Luego,

$$u\left(t\right) = y'\left(t\right) = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\frac{1-e^{2\sqrt{\rho g}t}}{1+e^{2\sqrt{\rho g}t}} \longrightarrow y\left(t\right) = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\int \frac{1-e^{2\sqrt{\rho g}t}}{1+e^{2\sqrt{\rho g}t}}\mathrm{d}t + c$$

En esta expresión de la integral es claro que el término *complicado* es la exponencial, razón por la cual hagamos la sustitución $v = e^{2\sqrt{\rho g}t} \longrightarrow \mathrm{d}v = 2\sqrt{\rho g}e^{2\sqrt{\rho g}t}\mathrm{d}t = 2\sqrt{\rho g}\,v\,\mathrm{d}t$.

Luego,

$$y(t) = \frac{1}{2\sqrt{\rho g}}\sqrt{\frac{g}{\rho}}\int \frac{1-v}{v(1+v)}\mathrm{d}v = \frac{1}{2\rho}\int \frac{1-v}{v(1+v)}\mathrm{d}v$$

Aplicando nuevamente fracciones parciales, se tiene que:

$$\frac{1-v}{v(1+v)} = \frac{a}{v} + \frac{b}{1+v} \longrightarrow a(1+v) + bv = 1-v$$

Haciendo $v=-1$ se tiene que $b=-2$ y haciendo $v=0$ se tiene que $a=1$, de modo que:

$$y(t) = \frac{1}{2\rho}\left(\int \frac{\mathrm{d}v}{v} - 2\int \frac{\mathrm{d}v}{1+v}\right) + c = \frac{1}{2\rho}\left(\ln|v| - 2\ln|1+v|\right) + c$$

Es decir,

$$y(t) = \frac{1}{2\rho}\ln\left|\frac{v}{(v+1)^2}\right| + c = \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{e^{\sqrt{\rho g}t}}{e^{2\sqrt{\rho g}t}+1}\right) + c$$

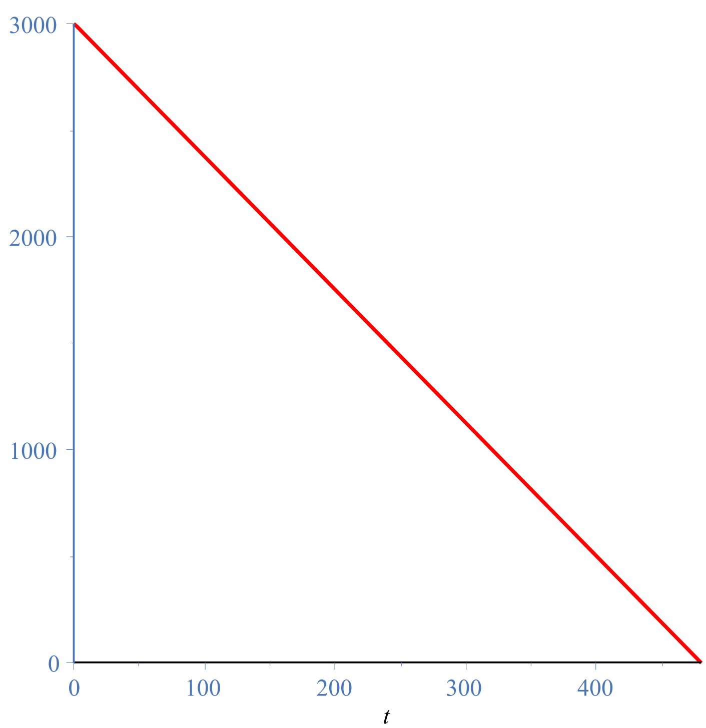
Reemplazando en la condición inicial,

$$y(0) = \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + c = y_0 \longrightarrow c = y_0 + \frac{\ln 2}{\rho}$$

Finalmente,

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{2e^{\sqrt{\rho g}t}}{e^{2\sqrt{\rho g}t}+1}\right) + y_0}$$

Graficando esta función con los valores de ρ, g e y_0 dados obtenemos que:



Aquí se observa que la caída es prácticamente lineal pues el crecimiento exponencial hace que la caída sea con velocidad aproximadamente constante.

Determinamos la velocidad que tarda en llegar al piso igualando a cero:

$$\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{2e^{\sqrt{\rho g}t}}{e^{2\sqrt{\rho g}t}+1}\right)+y_0=0\longrightarrow\frac{e^{\sqrt{\rho g}t}}{e^{2\sqrt{\rho g}t}+1}=\frac{1}{2}e^{-y_0\rho}$$

Entonces,

$$\frac{e^{\sqrt{\rho g}t}}{e^{2\sqrt{\rho g}t}+1}=\frac{1}{2}e^{-y_0\rho}\longrightarrow e^{\sqrt{\rho g}t}=\frac{1}{2}e^{-y_0\rho}e^{2\sqrt{\rho g}t}+\frac{1}{2}e^{-y_0\rho}$$

Reordenando términos,

$$\left(e^{\sqrt{\rho g}t}\right)^2-2e^{y_0\rho}\left(e^{\sqrt{\rho g}t}\right)+1=0$$

Despejando al ecuación cuadrática:

$$e^{\sqrt{\rho g}t}=e^{y_0\rho}\pm\sqrt{e^{2y_0\rho}-1}$$

Dado que el lado izquierdo de la igualdad tiene que ser positivo, nos quedamos con la solución positiva al lado derecho. Entonces,

$$e^{\sqrt{\rho g}t}=e^{y_0\rho}+\sqrt{e^{2y_0\rho}-1}$$

Finalmente,

$$\boxed{t_f=\frac{1}{\sqrt{\rho g}}\ln\left(e^{y_0\rho}+\sqrt{e^{2y_0\rho}-1}\right)}$$

Reemplazando en la velocidad obtenemos la velocidad al momento del impacto:

$$\boxed{u\left(t_f\right)=\sqrt{\frac{g}{\rho}}\frac{1-\left(e^{y_0\rho}+\sqrt{e^{2y_0\rho}-1}\right)^2}{1+\left(e^{y_0\rho}+\sqrt{e^{2y_0\rho}-1}\right)^2}\approx-\sqrt{\frac{g}{\rho}}}$$

□

P34 La venta esperada de un nuevo libro se describe por el modelo siguiente:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} & =c\left(P_0-p\right)t\\[2ex] p(0) & =0\end{cases}$$

Aquí $p\left(t\right)$ es la cantidad de personas quienes han comprado el libro hasta el momento $t\geq 0$, P_0 es la población total y $c>0$ es una constante de proporcionalidad. Se sabe que después de la primera hora una décima parte de la población ha comprado el libro.

(a) Dé la forma general de la solución $p\left(t\right)$ en cualquier $t>0$.

(b) Encuentre el tiempo t_0 para el cual la mitad de la población haya comprado el libro.

Solución:

(a) Partimos notando que la ecuación es separable, por lo que esta puede escribirse como.

$$\frac{\mathrm{d}p}{P_0 - p} = ct\,\mathrm{d}t \longrightarrow \ln|P_0 - p| = -\frac{ct^2}{2} - d$$

Despejando $p\,(t)$:

$$P_0 - p = k\exp\left(-\frac{ct^2}{2}\right) \longrightarrow p\,(t) = P_0 - k\exp\left(-\frac{ct^2}{2}\right)$$

con $k = \pm e^{-d}$. Haciendo $t = 0$ se tiene que:

$$p\,() = P_0 - k = 0 \longrightarrow k = P_0$$

Es decir,

$$p\,(t) = P_0\left[1 - \exp\left(-\frac{ct^2}{2}\right)\right]$$

Podemos determinar la constante de proporcionalidad del hecho que a la primera hora una décima parte de la población ha comprado el libro. Entonces,

$$p\,(1) = P_0\left[1 - \exp\left(-\frac{c}{2}\right)\right] = \frac{P_0}{10} \longrightarrow \exp\left(-\frac{c}{2}\right) = \frac{9}{10} \longrightarrow \boxed{c = 2\ln\left(\frac{10}{9}\right)}$$

Finalmente,

$$p\,(t) = P_0\left[1 - \exp\left(t^2\ln\frac{9}{10}\right)\right] \longrightarrow \boxed{p\,(t) = P_0\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{t^2}\right]}$$

(b) t_0 es tal que:

$$p\,(t_0) = \frac{P_0}{2} \longrightarrow P_0\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{t_0^2}\right] = \frac{P_0}{2} \longrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{t_0^2} = \frac{1}{2}$$

Es decir,

$$\boxed{t_0 = \sqrt{\log_{\frac{9}{10}}\frac{1}{2}}} \approx 6{,}58 \text{ horas}$$

$\square$

P35 ($\star$) **Curva de persecución.** Un ratón se encontraba pacíficamente en el origen comiendo su queso, cuando un gato hambriento localizado en el punto $\mathbf{g}_0 = (a, 0)$ lo descubre y parte en su dirección. De forma instantánea, el ratón presiente a su enemigo y toma la decisión de escapar a lo largo del eje y en el sentido positivo y lo hace con velocidad constante v_r. La estrategia del gato es correr siempre en la dirección en que se encuentra el ratón, y lo hace con velocidad constante v_g.

En este problema determinaremos la curva descrita por el gato.

(a) Siendo $\mathbf{g}(t) = [x(t), y(t)]$ la curva que describe la posición del gato y $\mathbf{r}(t) = (0, r(t))$ la curva que describe la posición del ratón, escriba un modelo diferencial que describa el comportamiento de la posición del gato.

(b) Determine la posición del ratón para instante de tiempo arbitrario.

(c) Pruebe que la trayectoria del gato satisface la ecuación diferencial:

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - v_r t$$

Luego, derive la ecuación anterior con respecto a x para probar que:

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -v_r\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

(d) Sea $s(t)$ la parametrización con respecto a arcoparámetro de la curva descrita por el gato. Utilizando la sustitución:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$$

pruebe que $x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{v_r}{v_g}\sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$.

Ayuda: Puede serle útil recordar que $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$.

(e) Haciendo $u = y'$, resuelva la ecuación diferencial del inciso anterior.

(f) **[Propuesto]** Determine condiciones sobre a, v_r y v_g para que el gato encuentre al ratón.

Solución:

(a) El gato siempre corre en la dirección del ratón, dada por $\mathbf{d}(t) = [0, r(t)] - \mathbf{g}(t) = [-x(t), r(t) - y(t)]$. La rapidez por otra parte será constante e igual a v_g. En otras palabras,

$$\mathbf{g}'(t) = v_g\frac{\mathbf{d}(t)}{\|\mathbf{d}(t)\|}$$

Es decir, obtenemos el PVI:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{v_g}{\sqrt{x^2(t) + [r(t) - y(t)]^2}}\begin{pmatrix} -x(t) \\ r(t) - y(t) \end{pmatrix}}$$

donde $x(0) = a$ e $y(0) = 0$.

(b) Claramente la dinámica del ratón queda descrita por el PVI:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_r \quad ; \quad r(0) = 0$$

Integrando,

$$\boxed{r(t) = v_r t}$$

(c) La observación que se realizará a continuación no es del todo evidente pero simplifica sustancialmente los cálculos: dividiendo $y'(t)$ por $x'(t)$ obtenemos $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ y eliminamos el término exterior al vector. De esta forma,

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{r(t) - y(t)}{x(t)} = -\frac{v_r t - y(t)}{x(t)}$$

Es decir,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y - v_r t}{x} \longrightarrow \boxed{x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - v_r t}$$

Derivando con respecto a x obtenemos que:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - v_r\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

En otras palabras,

$$\boxed{x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -v_r\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}$$

(d) Notemos que:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$$

donde claramente $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{v_g}$ pues es la rapidez descrita por el gato.

Por su parte, para el segundo término de la multiplicación notamos que:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

De esta forma,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v_g}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\boxed{x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{v_r}{v_g}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}$$

Donde $y(a) = 0$.

(e) Haciendo la sustitución sugerida obtenemos que:

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{v_r}{v_g}\sqrt{1 + u^2}$$

Es decir,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{v_r}{v_g}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Integrando a ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{v_r}{v_g}\ln|x| + c$$

Notamos que:

- La integral ya la calculamos en el problema anterior, obteniendo así que:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$$

- Para efectos de modelación la componente x siempre será positivo (¿tiene algún sentido que el gato cruce el eje y?), por lo que el módulo siempre lo tomamos positivo.

De esta forma,

$$\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) = \frac{v_r}{v_g}\ln(x) + c$$

Como $u(x) = y'(x)$ y el gato parte desde el reposo, entonces $u(0) = y'(0) = 0$ y por lo tanto $c = 0$. Es decir,

$$\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) = \frac{v_r}{v_g}\ln(x)$$

Pero si recordamos que $\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) = \operatorname{senh}^{-1}(u)$ entonces:

$$\operatorname{senh}^{-1}(u) = \frac{v_r}{v_g}\ln(x) \longrightarrow u(x) = \operatorname{senh}\left[\frac{v_r}{v_g}\ln(x)\right]$$

Escribiendo en términos de exponenciales:

$$u(x) = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{v_r}{v_g}\ln(x)} - e^{-\frac{v_r}{v_g}\ln(x)}\right]$$

Es decir,

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{v_r}{v_g}} - x^{-\frac{v_r}{v_g}}\right)$$

Integrando con respecto a x obtenemos $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{2\left(1+\frac{v_r}{v_g}\right)}x^{1+\frac{v_r}{v_g}} - \frac{1}{2\left(1-\frac{v_r}{v_g}\right)}x^{1-\frac{v_r}{v_g}} + k$$

Como $y(a) = 0$, entonces:

$$y(a) = \frac{1}{2\left(1 + \frac{v_r}{v_g}\right)} a^{1+\frac{v_r}{v_g}} - \frac{1}{2\left(1 - \frac{v_r}{v_g}\right)} a^{1-\frac{v_r}{v_g}} + k = 0$$

De aquí se sigue que:

$$k = \frac{1}{2\left(1 - \frac{v_r}{v_g}\right)} a^{1-\frac{v_r}{v_g}} - \frac{1}{2\left(1 + \frac{v_r}{v_g}\right)} a^{1+\frac{v_r}{v_g}}$$

Reemplazando con la constante y reordenando términos obtenemos que:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2\left(1 + \frac{v_r}{v_g}\right)} \left(x^{1+\frac{v_r}{v_g}} - a^{1+\frac{v_r}{v_g}}\right) - \frac{1}{2\left(1 - \frac{v_r}{v_g}\right)} \left(x^{1-\frac{v_r}{v_g}} - a^{1-\frac{v_r}{v_g}}\right)}$$

□

1.4. Teorema de existencia y unicidad

Partimos enunciado el Teorema de Existencia y Unicidad de ecuaciones diferenciales de primer orden:

Teorema: Sea el problema con valores iniciales:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \quad ; \quad y(a) = b$$

- Si $f(x, y)$ es continua en algún rectángulo del plano XY que contiene a (a, b), entonces existe $\epsilon > 0$ de modo que el problema tiene solución en el intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$.
- Si además $f_y(x, y)$ es continua en ese rectángulo, entonces existe un $\delta > 0$ que cumple $\epsilon \geq \delta$ y tal que el problema tiene solución única en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

Pueden realizarse las siguientes observaciones al respecto:

- El teorema de existencia y unicidad asegura la existencia en un intervalo, pero este puede ser perfectamente toda la recta real.
- Las condiciones presentadas son suficientes pero **no** necesarias. Un punto donde la derivada parcial o la función son discontinuas no garantiza que en dichos puntos la solución no existe o no es única.

A partir de la correcta aplicación de este teorema puede resolverse una amplia tipología de problemas. Revisemos a continuación algunos de ellos:

P36 Encuentre todos los valores de a y b para los cuales el problema

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \quad ; \quad y\left(a\right) = b$$

- Posee una solución única (y encuéntrela).
- No posee ninguna solución.
- Posee infinitas soluciones (y encuéntrelas).

Solución:

La ecuación se puede escribir de forma análoga como:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} = f\left(x, y\right)$$

Derivando con respecto a y obtenemos:

$$f_y\left(x, y\right) = \frac{1}{x}$$

Esto nos permite responder cada una de las preguntas.

- $f_y\left(x, y\right)$ es continua para todo $x \neq 0$, de la misma forma que $f\left(x, y\right)$. Luego, en todo punto $a \neq 0$ la solución existe y es única. La ecuación es claramente separable, luego:

  $$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \longrightarrow \ln|y| = \ln|x| + c$$

  Tomando exponencial,

  $$y = kx$$

  con $k = \pm e^c$. Reemplazando con la condición inicial

  $$ka = b \longrightarrow k = \frac{b}{a}$$

  Es decir, la **solución única** para el caso $a \neq 0$ y b cualquiera es:

  $$\boxed{y\left(x\right) = \frac{b}{a}x}$$

- $f\left(x, y\right)$ no es continua en $x = 0$, y de hecho no está definida en ese punto. Sin embargo, para toda función $y\left(x\right) = kx$ se tiene que $y\left(0\right) = 0$ y por lo tanto si $a = b = 0$, existen **infinitas soluciones** de la forma $y\left(x\right) = kx$.
- Sin embargo, si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces resulta imposible satisfacer la condición inicial por las mismas razones especificadas anteriormente. Por lo tanto, en este caso **no existe ninguna solución**.

$\square$

P37 ¿Qué afirma el Teorema de Existencia y Unicidad en relación al Problema de Valor Inicial $y' = y^2 - 1$, $y(\alpha) = \beta$? Encuentre todas las soluciones correspondientes al caso $\alpha = 0$, $\beta = -1$.

Solución:

Observamos que $f(x, y) = y^2 - 1$ y que $f_y(x, y) = 2y$ son continuas siempre. Luego, el teorema de existencia y unicidad garantiza que el problema tiene solución única **para todo** par de números (α, β).

Resolvamos la ecuación para obtener la solución general, observando para ello que la ecuación es separable:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 1} = \mathrm{d}x$$

Aplicando el método de fracciones parciales:

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{2}\frac{1}{y-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+1}$$

Es decir,

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + c \longrightarrow \frac{y-1}{y+1} = ke^{2x}$$

donde $k = \pm e^c$. Luego, despejando y obtenemos que:

$$y - 1 = yke^{2x} + ke^{2x} \longrightarrow \boxed{y(x) = \frac{1 + ke^{2x}}{1 - ke^{2x}}}$$

Reemplazando en la condición inicial $y(0) = -1$ se tendrá que:

$$\frac{1+k}{1-k} = -1 \longrightarrow 1 + k = k - 1$$

Esta ecuación es imposible de satisfacer, por lo que no existe solución de esta forma en el punto. Sin embargo, como el TEU garantiza la existencia de una solución, esta debe ser una solución singular. En particular, notamos que:

$$y^2 - 1 = (y+1)(y-1)$$

Entonces, basta hacer $\boxed{y(x) \equiv -1}$ para satisfacer la condición inicial y la ecuación diferencial.

$\square$

P38 Considere el siguiente PVI:

$$y' = t\sqrt{1-y} \quad ; \quad y(0) = 1/2$$

(a) Utilizando el teorema de existencia y unicidad demuestre que el PVI tiene solución única definida en algún intervalo abierto que contiene al punto $t = 0$.

(b) Resuelva explícitamente el problema.

(c) Encuentre el intervalo maximal para el PVI antes expuesto.

Solución:

(a) Se tiene que $f\left(t,y\right)=t\sqrt{1-y}$ es continua para todo t e $y<1$. Asimismo, tomando la derivada parcial con respecto a y:

$$f_y\left(t,y\right)=-\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{1-y}}$$

Esta función también es continua para todo t e $y<1$. Luego, para la condición inicial $(0,1/2)$ la solución existe y es única, demostrando así lo pedido. ■

(b) La ecuación es claramente separable, de modo que:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y}}=-\frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t\longrightarrow -2\sqrt{1-y}=-\frac{1}{4}t^2+c$$

Es decir,

$$\sqrt{1-y}=-\frac{c}{2}+\frac{t^2}{8}\longrightarrow 1-y=\left(\frac{t^2}{8}-\frac{c}{2}\right)^2\longrightarrow y(t)=1-\left(\frac{t^2}{8}-\frac{c}{2}\right)^2$$

Sin embargo, debe observarse que $y<1$ para satisfacer la condición de la raíz y que $c/2-t^2/8\geq 0\longrightarrow c-t^2/4\geq 0$. Haciendo $t=0$ obtenemos que:

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\frac{c}{2}\longrightarrow \boxed{c=-2\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

Es decir,

$$\boxed{y\left(t\right)=1-\left(\frac{t^2}{8}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

con t tal que $c-t^2/4\longrightarrow -2^{3/4}\leq t\leq 2^{3/4}$.

(c) Fuera del intervalo del intervalo anteriormente descrito la solución general no satisface la ecuación diferencial pues no está definida. Sin embargo, por el TEU sabemos que la solución existe para todo t. Luego, debe ser una solución singular, i.e.

$$\sqrt{1-y}=0\longrightarrow y\left(t\right)\equiv 1$$

Asimismo, notemos que:

$$\lim_{x\to -2^{3/4}} y(t)=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^{3/4}} y\left(t\right)=1$$

Esto quiere decir que podemos *pegar* ambas funciones y obtener una función continua que sea solución de la ecuación diferencial. Por lo tanto, definiendo la función:

$$\boxed{z(t)=\begin{cases}1, & \text{si } t<-2^{3/4},\\ 1-\left(\dfrac{t^2}{8}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^2, & \text{si } -2^{3/4}\leq t\leq 2^{3/4}\\ 1, & \text{si } t>2^{3/4},\end{cases}}$$

es una función que extiende $y(t)$ para satisfacer la EDO inicial. Por lo tanto, $\left(-2^{3/4},2^{3/4}\right)$ no es un intervalo maximal de existencia, si no que es el dominio de $z(t)$ que es todo $\mathbb{R}$.

$\square$

P39 Indique si los siguientes Problemas de Valor Inicial tienen solución o no, y de tenerla, indique cuántas soluciones hay. ¿Contradicen los resultados al Teorema de Existencia y Unicidad?

(a) $(t-1)\,x'(t)=x$, $x(1)=0$.

(b) $(t-1)\,x'(t)=x$, $x(1)=1$.

Solución:

La ecuación diferencial se puede escribir como:

$$x'(t)=\frac{x}{t-1}\longrightarrow f(t,x)=\frac{x}{t-1}$$

Se tiene que $f(t,x)$ es continua para todo $t\neq 1$ y $f_x(t,x)=\frac{1}{t-1}$ es continua para todo $t\neq 1$ (con x cualquiera). Asimismo, el problema es separable, de modo que:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}t}{t-1}\longrightarrow \ln|x|=\ln|t-1|+c$$

Es decir,

$$x(t)=k(t-1)$$

con $k=\pm e^c$. Hecho esto podemos responder las preguntas.

(a) Observe que en la solución general $x(1)=0$. Por lo tanto, existen infinitas funciones de la forma $k(t-1)$ que satisfacen la condición inicial, en particular $x(t)\equiv 0$.

(b) De la misma forma, la solución general no puede satisfacer la condición inicial $x(1)=1$. Por lo tanto, este problema no tiene ninguna solución.

El TEU plantea una condición suficiente para la existencia y unicidad de soluciones **¡pero no necesaria!**. En la parte (a) se hace evidente que si bien no se cumplen las hipótesis del TEU, sí se pueden encontrar infinitas soluciones. En la parte (b), en cambio, no existe solución. En otras palabras, como no se satisfacen las hipótesis del teorema, ambos problemas no tienen por qué tener soluciones únicas (y de hecho, ni siquiera tenerlas) sin que ello implique contradecir al TEU.

$\square$

P40 Exhiba dos soluciones distintas del PVI

$$x' = t^{1/3}(x-1)^{1/3} \quad ; \quad x(0) = 1$$

Explique por qué ello no contradice al Teorema de Existencia y Unicidad.

Solución:

Por inspección, basta hacer $x(t) \equiv 1$ para satisfacer la ecuación diferencial, es decir, esta es una solución singular. Asimismo, la ecuación es separable, de modo que:

$$\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{1/3}} = \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/3}}$$

Integrando,

$$\frac{3}{2}(x-1)^{2/3} = \frac{3}{2}t^{2/3} + c \longrightarrow x - 1 = \pm(t+c) \longrightarrow x(t) = 1 \pm (t+c)$$

Haciendo $x(0) = 1$ se tiene que $x(0) = 1 \pm c = 1 \longrightarrow c = 0$. Es decir, tanto $1+t$ como $1-t$ son soluciones del PVI, encontrando así no dos soluciones, si no que tres.

Ahora bien, $f(t,x) = t^{1/3}(x-1)^{1/3}$ es claramente continua en $(0,1)$. Sin embargo, $f_x(t,x) = \frac{1}{3}\frac{t^{1/3}}{(x-1)^{2/3}}$ no es continua para $x = 1$ (y t cualquiera), de modo que el TEU no puede garantizar la existencia de solución única, pero sí garantiza la existencia de soluciones. Esto **no** quiere decir que no pueda existir solución única, si no que el teorema no puede garantizarla.

$\square$

P41 Considere el problema de valor inicial:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\sqrt{y^2-1} \quad ; \quad y(a) = b$$

(a) Halle una solución general y una solución singular de la ecuación diferencial.

(b) Determine los puntos (a,b) en el plano para el cual el problema de valor inicial:

- No tiene solución.
- Tiene solución única.
- Tiene infinidad de soluciones.

Solución:

(a) La ecuación es claramente separable, por lo cual:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2-1}} = \mathrm{d}x$$

Integrando,

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2-1}} = \int \mathrm{d}x + c$$

Haciendo $y = \sec t \longrightarrow \mathrm{d}y = \tan t \sec t \, \mathrm{d}t$ se tiene que:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{\tan t \sec t}{\sec t\sqrt{\sec^2 t - 1}}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t$$

Volviendo a la variable original,

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2-1}} = \sec^{-1} y$$

Entonces,

$$\sec^{-1} y = x + c \longrightarrow \boxed{y = \sec(x+c)}$$

Sin embargo, notemos que $y\sqrt{y^2-1}$ se anula en $y = \pm 1$ (**descartamos** $y = 0$ **pues ahí la raíz se hace negativa**), por lo tanto $y(x) \equiv -1$ e $y(x) \equiv 1$ son soluciones singulares del problema.

(b) Se tiene que $f(x,y) = y\sqrt{y^2-1}$ es continua para todo $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ y todo valor de x. Luego, en todos las condiciones iniciales que satisfagan esta condición está garantizada la existencia de solución.
Asimismo, se tiene que $f_y(x,y) = \sqrt{y^2-1} + y^2/\sqrt{y^2-1}$ es continua para todo $y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y todo x, de modo que por el T.E.U. está garantizada la existencia de solución única en dicho intervalo.

- Por el T.E.U., para todos los puntos de la forma $y(a) = b$ con $b \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ existe **solución única**.
- En todos los puntos $b \in (-1, 1)$ ni las soluciones generales ni las soluciones singulares pueden satisfacer la ecuación diferencial. Por lo tanto, para estos valores **no existe solución**.
- Para $b = \pm 1$ no solo las soluciones singulares satisfacen el PVI, si no que se tiene que:

$$y(a) = \sec(a+c) = 1 \longrightarrow \cos(a+c) = 1 \longrightarrow c = 2k\pi - c$$

con $k \in \mathbb{Z}$, por lo que para estos valores de b y a cualquiera existen **infinitas soluciones**

□

P42 Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$y' = \frac{\sqrt{1+y}}{1+x^2} \quad ; \quad y(a) = b$$

(a) Encuentre todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el PVI no tiene solución.

(b) Encuentre todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el PVI tiene solución única y determínela.

(c) Encuentre todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el PVI tiene más de una solución y determínelas.

Solución:

Partamos definiendo $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1+y}}{1+x^2} \longrightarrow f_y(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+y}\,(1+x^2)}$.

Observamos que:

- $f(x,y)$ es continua para todo valor de x e $y \geq -1$. Luego, por el T.E.U. está garantizada la existencia de solución en las condiciones iniciales de la forma $y(a) = b$ con a cualquiera y $b \geq -1$.
- $f_y(x,y)$ es continua para todo valor de x e $y > -1$. Por lo tanto, bajo el mismo teorema existe solución y esta es única para todo juego de condiciones iniciales $y(a) = b$ con a cualquiera y $b- > 1$.
- Para todo punto $y < -1$ el T.E.U. no garantiza ningún resultado, y debe revisarse de acuerdo al problema los pasos a seguir.

Ahora bien, observamos que esta ecuación es separable, por lo que podemos determinar su solución general integrándola:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y}} = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \longrightarrow 2\sqrt{1+y} = \arctan(x) + c$$

Es decir,

$$y(x) = \frac{[\arctan(x) + c]^2}{4} - 1$$

Asimismo, $f(x,y)$ se anula en $y = -1$, por lo que $\boxed{y(x) \equiv -1}$ es una solución singular del problema. Esto nos permite responder cada una de las preguntas:

(a) Observamos que la solución general es la suma de un término siempre positivo y -1, por lo que su recorrido siempre será mayor o igual que -1. La solución singular, de la misma forma, siempre tiene recorrido $\{-1\}$, por lo que no existe solución para puntos tales que $b < -1$.

(b) Por el T.E.U. está garantizada la existencia de solución para puntos $b > -1$ y vienen dados por la solución general. Reemplazando con la condición inicial,

$$y(a) = \frac{[\arctan(a) + c]^2}{4} - 1 = b \longrightarrow \arctan(a) + c = 2\sqrt{b+1}$$

Es decir,

$$c = 2\sqrt{b+1} - \arctan(a)$$

Y finalmente,

$$y(x) = \frac{\left[\arctan(x) - \arctan(a) + 2\sqrt{b+1}\right]}{4} - 1$$

(c) Para puntos de la forma $y(a) = -1$ el T.E.U. no garantiza existencia de solución única (a pesar de que esta puede existir en dichos puntos). Sin embargo, sabemos que en estos puntos no solo podemos obtener solución a partir de la solución general, si no que también a partir de las soluciones singulares (pues para $y(x) \equiv -1$ se satisface que $y(x) = -1$ para todo x).

Luego, en puntos de esta forma las soluciones son:

$$y_1(x) = \frac{\left[\arctan(x) - \arctan(a)\right]}{4} - 1$$

$$y_2(x) \equiv -1$$

□

P43 Considere el problema con valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & = \sqrt{y-x} + 1, \\ \\ y(1) & = 1. \end{cases}$$

Encuentre explícitamente al menos dos soluciones distintas de la ecuación anterior definidas en todo $\mathbb{R}$. ¿Contradice esto al teorema de existencia y unicidad? Justifique su respuesta.

Solución:

Por inspección observamos que $y = x$ anula la raíz de la ecuación diferencial. Más aún, en dicho caso $y' = 1$ y esta queda satisfecha por dicha función, pues también se satisface la condición inicial. Esta solución está claramente definida en todo $\mathbb{R}$.

Para encontrar la solución general, resulta de utilidad utilizar la sustitución $u = y - x$. De esta forma, derivando con respecto a x:

$$u' = y' - 1 \longrightarrow u' + 1 = \sqrt{u} + 1 \longrightarrow u' = \sqrt{u}$$

Esta ecuación es claramente separable,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \mathrm{d}x \longrightarrow 2\sqrt{u} = x + c \longrightarrow \sqrt{u} = \frac{x+c}{2} \longrightarrow u(x) = \frac{(x+c)^2}{4}$$

Volviendo a la variable original con $y = u + x$:

$$y(x) = \frac{(x+c)^2}{4} + x$$

Reemplazando en la condición inicial $y(1) = 1$:

$$\frac{(1+c)^2}{4} + 1 = 1 \longrightarrow (1+c)^2 = 0 \longrightarrow c = -1$$

Finalmente,

$$y(x) = \frac{(x-1)^2}{4} + 1$$

es otra solución válida del PVI, definida en todo $\mathbb{R}$. Revisemos ahora la coherencia de este resultado con lo que plantea el T.E.U.

Para este caso se tiene que $f(x,y) = \sqrt{y-x} + 1$ y es continua para todo $y \geq x$, luego para toda condición inicial de la forma (a,b) con $b \geq a$ está garantizada la existencia de solución. Asimismo, $f_y(x,y) = 1/2\sqrt{y-x}$ es continua para todo $y > x$ (eliminamos el caso $y = x$ pues se anula el denominador) y por lo tanto para toda condición inicial de la forma (a,b) con $b > a$ está garantizada la existencia de solución única.

La condición inicial $(1,1)$ satisface la condición para garantizar la existencia de solución, pero no la de solución única. Si bien puede existir una solución única para puntos de esta forma (pues el T.E.U. es solo una condición suficiente), este no es el caso y hemos encontrado dos soluciones para una misma condición inicial, por lo que este resultado no contradice en forma alguna al teorema de existencia y unicidad.

$\square$

1.5. Análisis cualitativo en ecuaciones autónomas y estabilidad

En secciones anteriores revisamos una selección de técnicas para resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. Sin embargo, es equivocado pensar que el objetivo principal del estudio de las ecuaciones diferenciales es encontrar artificios para resolverlas. Basta ver que en casos tan simples como:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{x} + t$$

se desconocen soluciones analíticas. Ante este hecho se presentan algunas alternativas, como métodos numéricos, métodos de aproximación, o lo que revisaremos en esta sección, métodos cualitativos.

En muchos problemas es de interés el comportamiento cualitativo de las soluciones en términos de las condiciones iniciales o valores de sus parámetros. Determinar monotonía, concavidad o valores de los límites en infinito puede ser de ayuda en el entendimiento de algunos modelos matemáticos, y para nuestra suerte ¡dicha información puede obtenerse sin resolver necesariamente la ecuación diferencial!

Ejemplo inicial: la ecuación logística. Recordemos que para la dinámica de poblaciones disponemos del siguiente modelo logístico:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x\,(a - bx)$$

Sabemos por el T.E.U. que para este problema existe solución única para toda condición inicial y que las funciones constantes $x\,(t) \equiv {}^{a}\!/\!_{b}$ y $x\,(t) \equiv 0$ son soluciones cuyos gráficos son rectas que dividen al plano $t - x$. Más aún, sin determinar explícitamente las soluciones de la ecuación podemos determinar su monotonía para una condición inicial $x\,(t_0) = x_0$ y su concavidad. En efecto, derivando nuevamente:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = (a - 2bx)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Distinguimos tres casos:

- Si ${}^{a}\!/\!_{b} < x_0$, sabemos que el gráfico de la solución $x\,(t)$ es una función monótona decreciente y que en el límite tiende a ${}^{a}\!/\!_{b}$.
- Si $0 < x_0 < {}^{a}\!/\!_{b}$, sabemos que el gráfico de la solución $x\,(t)$ es una función monótona creciente que en el límite tiende a ${}^{a}\!/\!_{b}$.
- Si $x_0 < 0$ entonces la solución es estrictamente decreciente.

Ecuaciones diferenciales autónomas. El ejemplo anterior puede extender y motivar la siguiente definición:

Definición:

- Una ecuación diferencial de primer orden se dice *autónoma* si $f\,(t, x) = f\,(x)$. En otras palabras,
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\,(x) \tag{16}$$
- Las soluciones constantes $x\,(t) \equiv c$, $t \in \mathbb{R}$ se llaman *soluciones de equilibrio*.

Interpretando una ecuación diferencial como la descripción de un sistema dinámico, las soluciones de equilibrio son aquellas en las que el sistema no cambia con el tiempo. En efecto, derivando una solución de equilibrio:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\,[x\,(t)] = f\,(c) = 0$$

Es decir, las soluciones de equilibrio se determinan resolviendo $f\,(c) = 0$.

Respecto a ecuaciones autónomas pueden realizarse las siguientes observaciones:

Proposición:

- Cualquier solución de la ecuación diferencial autónoma es o bien una solución de equilibrio o una función estrictamente monótona.
- Sea $I = (\alpha, \beta)$, $x_0 \in I$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces,
$$A = \lim_{t \to a^+} x(t) \quad \text{y} \quad B = \lim_{t \to b^-} x(t)$$
existen (pudiendo ser infinitos). Más aún, si $a \neq -\infty$ entonces A debe valer α ó β y si $b \neq \infty$ entonces B debe valer α ó β.
- Si $c \in I$ y $\lim_{x \to \pm\infty} x(t) = c$, entonces $x(t) \equiv c$ es una solución de equilibrio.

Es de interés estudiar el comportamiento de las soluciones de equilibrio en lo que respecta a la evolución en el tiempo de su posición con respecto a la condición inicial. Esto motiva la siguiente definición:

Definición:

- Una solución de equilibrio de la ecuación diferencial autónoma es *estable* si toda solución $x(t)$ que en el instante inicial t_0 toma un valor x_0 suficientemente cercano a c permanece próxima a c para todo $t > t_0$. Es decir, si para todo $\epsilon > 0$ exista $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que:
$$|x_0 - c| < \delta \longrightarrow |x(t) - c| < \epsilon \quad (\forall t > t_0)$$
- Si además $\lim_{t \to \infty} x(t) = c$ se dice que el equilibrio es *asintóticamente estable*.
- Las soluciones de equilibrio no estables se llaman *equilibrios inestables*.

Presentamos a continuación un criterio para identificar los equilibrios estables e inestables de una ecuación autónoma.

Teorema:

- Se tiene que $x(t) \equiv c$ es una solución de equilibrio asintóticamente estable si y solo si $f'(c) < 0$.
- Análogamente, $x(t) \equiv c$ es una solución de equilibrio inestable si y solo si $f'(c) > 0$.

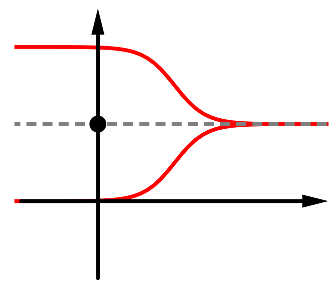
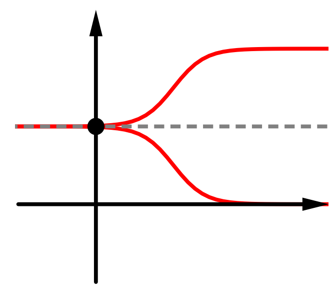
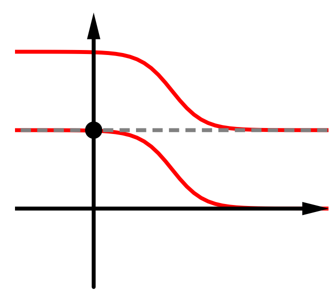
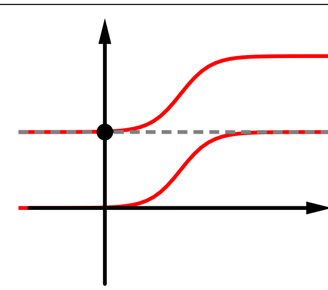
Teniendo claro el teorema anterior se motiva la siguiente definición para clasificar las soluciones de equilibrio.

Definición: Sea $x(t) \equiv c$ una solución de equilibrio. Entonces:

- c es un *atractor* (o *sumidero*) si en una vecindad pequeña se cumple que si $x(t_0) < c$ entonces $x'(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$ y si $x(t_0) > c$ entonces $x'(t) < 0$ para todo $t \geq t_0$.
- c es un *repulsor* (o *fuente*) si en una vecindad pequeña se cumple que si $x(t_0) < c$ entonces $x'(t) < 0$ para todo $t \geq t_0$ y si $x(t_0) > c$ entonces $x' > 0$ para todo $t \geq t_0$.
- c es un *nodo* si no se cumple ninguna de las definiciones anteriores.

Puede observarse mediante el Teorema del Valor Medio que todo atractor es una solución de equilibrio asintóticamente estable (con $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$) y que todo repulsor y nodo es una solución de equilibrio asintóticamente inestable.

Podemos resumir la información de la caracterización en la siguiente tabla:

Tipo	**Signo de $f(y)$**		**Estabilidad**	**Gráfico**
	$c-\epsilon < y < c$	$c < y < c+\epsilon$		
Atractor	$+$	$-$	Asint. Estable	
Repulsor	$-$	$+$	Inestable	
Nodo	$-$	$-$	Inestable	
Nodo	$+$	$+$	Inestable	

Teniendo claros estos conceptos podemos resolver los siguientes problemas:

P44 Dada la ecuación $x'(t) = 16 - x^4$.

(a) Describa todos los puntos de equilibrio y estudie su estabilidad.

(b) Esboce el gráfico de la función $x(t)$ que es solución de la ecuación anterior y que satisface $x(0) = 0$. En particular, determine $\lim_{t\to\infty} x(t)$ justificando su respuesta.

Solución:

(a) Partimos buscando los puntos de equilibrio. Como la ecuación es autónoma, basta igualar a cero:

$$16 - x^4 = \left(4 + x^2\right)\left(4 - x^2\right) = \left(4 + x^2\right)(2 - x)(x + 2)$$

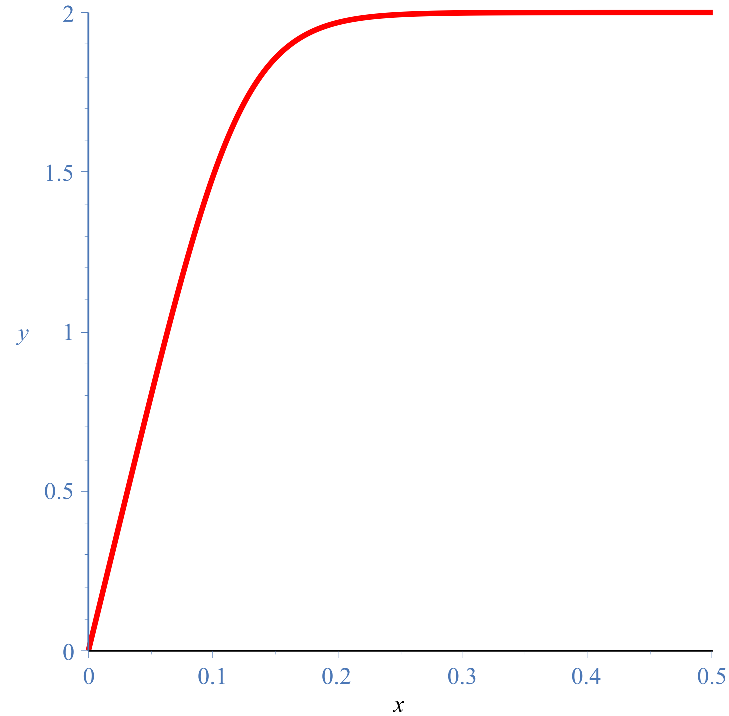
Es decir, los puntos de equilibrio son $x = 2$ y $x = -2$. Clasifiquemos los puntos realizando una tabla de signos:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$4 + x^2$	$+$	$+$	$+$
$2 - x$	$+$	$+$	$-$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$16 - x^4$	$-$	$+$	$-$

Con esto podemos clasificar los puntos:

- Como antes de -2 la función es decreciente y creciente después de -2, se tiene que $x(t) \equiv -2$ es un repulsor o fuente. Asimismo, es un equilibrio inestable.
- Como antes de 2 la función es creciente y decreciente después de 2, se tiene que $x(t) \equiv 2$ es un atractor o sumidero. Asimismo, es un equilibrio estable.

(b) Como la función parte en 0, se tiene que alejar de -2 y acercarse a 2 creciendo monotónicamente. Por lo tanto $\lim_{x\to\infty} x(t) = 2$ y un esbozo de la gráfica de la función será:



□

P45 Encuentre todos los puntos de equilibrio de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^4 - x^3 - 2x^2$$

y determine su estabilidad. ¿Cuáles son atractores (sumideros) y cuáles repulsores (fuentes)?

Solución:

Partimos determinando todos los puntos de equilibrio igualando a cero la ecuación autónoma:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 = 0 \longrightarrow x^2\left(x^2 - x - 2\right) = x^2(x-2)(x+1) = 0$$

Es decir, los puntos de equilibrio son $x = 0$, $x = 2$ y $x = -1$. Los clasificamos realizando una tabla de signos:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x^4 - x^3 - 2x^2$	$+$	$-$	$-$	$+$

De aquí se deduce que:

- Antes de -1 las soluciones son crecientes y después de -1 son decrecientes, por lo cual -1 es un atractor o sumidero y por lo tanto un equilibrio asintóticamente estable.
- Antes de 0 las soluciones son decrecientes y después del punto también, por lo cual 0 es un nodo y por lo tanto un equilibrio inestable.
- Antes de 2 las soluciones son decrecientes y después del mismo punto son crecientes, concluyendo así que 2 es una fuente o repulsor y por lo tanto un equilibrio inestable.

$\square$

P46 Considere el problema de valor inicial $y' = (1-y^2)(y+2)$, $y(0) = \alpha$.

Determine todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal manera que $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 1$.

Solución:

Analicemos los puntos de equilibrio y clasifiquémolos. Ello nos permitirá determinar el comportamiento asintótico de las soluciones y con ello las condiciones iniciales que satisfacen la condición pedida. Partimos igualando a cero la ecuación autónoma:

$$\left(1-y^2\right)(y+2) = (1-y)(1+y)(y+2)$$

Es decir, los puntos de equilibrio son $y = 1$, $y = -1$ e $y = -2$. Realizando una tabla para clasificarlos:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$1-y$	$+$	$+$	$+$	$-$
$1+y$	$-$	$-$	$+$	$+$
$y+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(1-y^2)(y+2)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Es decir, se tiene la siguiente clasificación de acuerdo a lo ya estudiado:

- El punto $x = -2$ es un atractor o sumidero y por lo tanto un equilibrio asintóticamente estable. Cualquier punto en la vecindad de -2 tenderá asintóticamente a este límite.
- El punto $x = -1$ es un repulsor o fuente y por lo tanto un equilibrio inestable. Cualquier punto antes de -1 tenderá a -2 y cualquier punto después a 1.
- El punto $x = 1$ es un atractor o sumidero y por lo tanto un equilibrio asintóticamente estable. Cualquier punto en la vecindad de 1 tenderá asintóticamente a este límite.

De lo anterior, se deduce que para toda condición inicial $y(x_0) > -1$ tendrá como límite 1, de modo que $\alpha \in (-1,\infty)$.

□

P47 Encuentre todos los puntos de equilibrio de la ecuación autónoma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(x^3 - x^2\right)\cos 2x \quad ; \quad \text{para } -2 \leq x \leq 2$$

y clasifíquelos. ¿Cuáles son atractores (sumideros) y cuáles repulsores (fuentes)?

Solución:

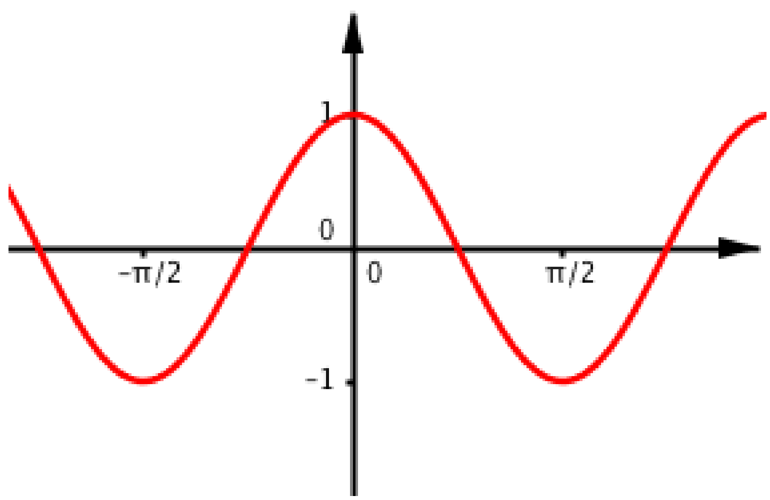
Partimos igualando a cero la ecuación autónoma para determinar los puntos de equilibrio. Se tiene que:

$$f\left(x\right) = \left(x^3 - x^2\right)\cos 2x = x^2\left(1 - x\right)\cos 2x$$

Luego, esta ecuación se anula cuando $x = 0$, cuando $x = 1$ y cuando $\cos 2x = 0$. Es decir, cuando:

$$2x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para el intervalo $[-2, 2]$ las soluciones útiles son $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$. Graficando la función $\cos\left(2x\right)$:



Luego, podemos confeccionar la siguiente tabla de signos:

	$\left(-2, -\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$(1, 2)$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$1 - x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\cos 2x$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f\left(x\right)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$

Se sigue que:

- $x = -\frac{\pi}{4}$ corresponde a un repulsor o fuente. $\rightarrow$ equilibrio inestable.
- $x = 0$ corresponde a un nodo. $\rightarrow$ equilibrio inestable.

- $x = \frac{\pi}{4}$ corresponde a un atractor o sumidero. $\rightarrow$ equilibrio asint. estable.
- $x = 1$ corresponde a un repulsor o fuente. $\rightarrow$ equilibrio inestable.

$\square$

P48 Para la ecuación diferencial $y' = (y-1)\,\mathrm{sen}\,(y^2)$:

(a) Determine y clasifique sus puntos de equilibrio.

(b) Para $y(t)$ solución de la ecuación, con $y(0) = a$, dependiendo del valor de a, con $-2 < a < 2$, determine:

$$L_1 = \lim_{t\to\infty} y(t) \quad \text{y} \quad L_2 = \lim_{t\to-\infty} y(t)$$

Solución:

(a) Partimos igualando a cero la ecuación autónoma para determinar los puntos de equilibrio:

$$(y-1)\,\mathrm{sen}\left(y^2\right) = 0 \longrightarrow y = 1 \vee \mathrm{sen}\left(y^2\right) = 0$$

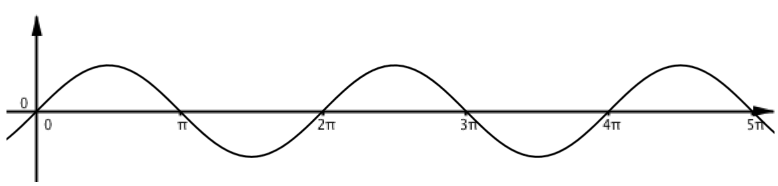
La segunda ecuación nos indica que:

$$y^2 = k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sin embargo, como y^2 es siempre positivo nos quedamos con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Despejando,

$$y = \pm\sqrt{k\pi}$$

Analizar los signos en este caso no resulta ser una tarea sencilla pues el comportamiento de la función seno es variable. La forma más sencilla de entender esto es recordando la gráfica de la función seno:



Aquí podemos observar lo siguiente:

- Para múltiplos de π impares, es decir $(2n+1)\pi$ con $n \in \mathbb{N}$, la función seno es positiva antes y negativa después.
- Para múltiplos de π pares, es decir $2n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$, la función seno es negativa antes y positiva después.

Luego, en general, podemos escribir la siguiente tabla:

	$\left(-\sqrt{(2n+2)\,\pi}, -\sqrt{(2n+1)\,\pi}\right)$	$\left(-\sqrt{(2n+1)\,\pi}, -\sqrt{2n\pi}\right)$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{\pi})$	$\left(\sqrt{(2n-1)\,\pi}, \sqrt{2n\pi}\right)$	$\left(\sqrt{2n\pi}, \sqrt{(2n+1)\,\pi}\right)$
$y-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\operatorname{sen}\left(y^2\right)$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$(y-1)\operatorname{sen}\left(y^2\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Analizando la tabla se deduce que: ($n \in \mathbb{N}$)

- Puntos de la forma $-\sqrt{(2n+1)\,\pi}$ son repulsores o fuentes y por lo tanto equilibrios inestables.
- Puntos de la forma $-\sqrt{2n\pi}$ son atractores o sumideros y por lo tanto equilibrios asintóticamente estables.
- El punto $x=0$ es un atractor o sumidero y por lo tanto un equilibrio asintóticamente estable.
- El punto $x=1$ es un repulsor o fuente y por lo tanto un equilibrio inestable.
- Puntos de la forma $\sqrt{(2n+1)\,\pi}$ son atractores o sumideros y por lo tanto equilibrios asintóticamente estables.
- Puntos de la forma $\sqrt{2n\pi}$ son repulsores o fuentes y por lo tanto equilibrios inestables.

(b) Para $a \in (-2,2)$ encontramos los siguientes puntos y desde ahí podemos deducir los valores de sus límites en $\pm\infty$:

- $-\sqrt{\pi} \approx -1{,}77$ que es un repulsor. Se sigue que:
  - Para $y \in (-2, -\sqrt{\pi})$:

$$\lim_{t\to\infty} y\,(t) = -\sqrt{2\pi} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to-\infty} y\,(t) = -\sqrt{\pi}$$

  - Para $y \in (-\sqrt{\pi}, 0)$:

$$\lim_{t\to\infty} y\,(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to-\infty} y\,(t) = -\sqrt{\pi}$$

- 0 que un atractor. Se sigue que para $y \in (0,1)$:

$$\lim_{t\to\infty} y\,(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to-\infty} y\,(t) = 1$$

- 1 que es un repulsor. Se sigue que para $y \in (1, \sqrt{\pi})$:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \sqrt{\pi} \quad \text{y} \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = 1$$

- $\sqrt{\pi} \approx 1{,}77$ que es un un atractor. Se sigue que para $y \in (\sqrt{\pi}, 2)$:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \sqrt{\pi} \quad \text{y} \quad \lim_{t \to -\infty} y(t) = \sqrt{2\pi}$$

$\square$

2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Definición: Sea la ecuación diferencial

$$G\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Se dice que una ecuación diferencial es *lineal* con tal que y y sus derivadas lo sean. Por lo tanto, una ecuación lineal de orden superior es de la forma:

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y + b(x) = 0 \tag{17}$$

Asimismo, esta se dice homogénea si $b(x) \equiv 0$.

2.1. Introducción: teoría general, existencia y unicidad

Teorema: *(Principio de superposición)* Sean $y_1, \ldots, y_n$ soluciones de la ecuación lineal homogénea en el intervalo I. Entonces,

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

también es solución de la ecuación en I.

Demostración:

Se tiene por hipótesis que:

$$\begin{aligned} a_n(x)\, y_1^{(n)} + \cdots + a_1(x)\, y_1' + a_0(x)\, y_1 &= 0 \\ &\vdots \\ a_n(x)\, y_n^{(n)} + \cdots + a_1(x)\, y_n' + a_0(x)\, y_n &= 0 \end{aligned}$$

Luego, para $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$:

$$\begin{aligned} y' &= c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= c_n y_1^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial y reordenando en términos de las constantes obtenemos que:

$$\begin{aligned} a_n(x)\, y^{(n)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y &= c_1 \left[a_n(x)\, y_1^{(n)} + \cdots + a_0(x)\, y_1\right] + \\ &\quad \cdots + c_n \left[a_n(x)\, y_n^{(n)} + \cdots + a_0(x)\, y_n\right] \end{aligned}$$

Como cada uno de los miembros que acompaña a las constantes es cero, entonces todo el resultado es cero, demostrando así lo pedido. ■

Teorema: *(Existencia y unicidad)* Suponga el problema con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) + c_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + c_0 y &= f(x) \\ y(a) &= b_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(a) &= b_{n-1} \end{aligned}$$

Si $f(x)$ y $c_i(x)$ son continuas para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ en un intervalo I tal que $a \in I$, entonces el problema tiene solución única en I.

Dependencia lineal de funciones. Si encontramos n soluciones particulares de la ecuación

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

y consideramos las condiciones iniciales $y(a) = b_0$, ..., $y^{(n-1)}(a) = b_0$. Recordamos que una solución puede escribirse de la forma

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$$

Luego, se verificará el sistema:

$$\begin{aligned} c_1 y_1(a) + \ldots + c_n y_n(a) &= b_0 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(a) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(a) &= b_n \end{aligned}$$

donde tenemos n ecuaciones, y n incógnitas: $c_1, \ldots, c_n$. La pregunta es: ¿cómo garantizamos que la solución sea única para $c_1, \ldots, c_n$? (no confundir con $y(x)$) Escribrimos matricialmente:

$$\begin{bmatrix} y_1(a) & \cdots & y_n(a) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(a) & \cdots & y_n^{(n-1)}(a) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

El álgebra lineal nos dice que tendrá solución única si y solo si la matriz es invertible, lo que verificamos por medio del determinante.

Definición: Sea el conjunto de funciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$:

- es *linealmente independiente* en el intervalo I si

$$c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0 \iff c_i = 0 \quad (\forall 1 \le i \le n)\,(\forall x \in I)$$

- es *linealmente dependiente* en I si existen constantes $c_1, \ldots, c_n$ no todas nulas tales que

$$c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0 \quad (\forall x \in I)$$

Definición: Se define el *Wronskiano* de las funciones $y_1, \ldots, y_n$ como la operación $\mathcal{W} : \mathcal{C}^{n-1} \times \ldots \times \mathcal{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\mathcal{W}\left\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\right\} = \mathcal{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Luego,

- $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes en I si $\mathcal{W}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.
- $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes en I si $\mathcal{W}(x) = 0$ para todo $x \in I$.

P49 Verifique que las funciones $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = xe^x$ son linealmente independientes en cualquier intervalo.

Solución:

De acuerdo a lo visto anteriormente, basta demostrar que el Wronskiano es distinto de cero. Para ello, derivamos:

$$\mathcal{W}\left\{e^x, xe^x\right\} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

Por lo tanto, como el Wronskiano es distinto de cero para todo x, el conjunto de funciones es l.i. en cualquier intervalo.

$\square$

P50 Demuestre que el conjunto de funciones

$$\left\{\arctan(x), \arctan(2x), \arctan\left(\frac{3x}{1-2x^2}\right)\right\}$$

es linealmente dependiente y muestre una forma de expresar alguno de sus elementos como combinación lineal de los otros.

Solución:

Derivando para determinar el Wronskiano:

$$y_1'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad y_2'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

$$
\begin{aligned}
y_3'(x) &= \frac{1}{1+\dfrac{9x^2}{(1-2x^2)}}\frac{3(1-2x^2)+12x^2}{(1-2x^2)^2} \\
&= \frac{3(1+2x^2)}{(1-2x^2)^2+9x^2} = \frac{3(1+2x^2)}{1+5x^2+4x^4} \\
&= \frac{3(1+2x^2)}{(1+x^2)(1+4x^2)}
\end{aligned}
$$

Podríamos seguir derivando, pero aquí ya estamos en condiciones de notar que:

$$y_3'(x) = y_1'(x) + y_2'(x)$$

Integrando:

$$y_3(x) = y_1(x) + y_2(x) + c$$

Como $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$, entonces $c = 0$ y por lo tanto,

$$\boxed{y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)}.$$

De esta forma, las funciones son claramente l.d. ■

□

Fórmula de Abel. Consideremos la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Sean y_1, y_2 dos soluciones particulares. Entonces, se tiene que

$$
\begin{aligned}
y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 &= 0 \quad / \cdot y_2 \\
y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 &= 0 \quad / \cdot y_1
\end{aligned}
$$

Restamos ambos sistemas multiplicados por las respectivas funciones:

$$y_1''y_2 - y_2''y_1 + P(x)\left(y_1'y_2 - y_2'y_1\right) = 0$$

En términos de las derivadas de las funciones, sabemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}(x) &= y_1y_2' - y_1'y_2 \\
\mathcal{W}'(x) &= y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1'y_2' - y_1''y_2 = y_1y_2'' - y_1''y_2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la resta de las ecuaciones escrita en términos del Wronskiano queda:

$$\mathcal{W}'(x) = -P(x)\mathcal{W}(x)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos que:

$$\boxed{\mathcal{W}(x) = ke^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}, \tag{18}$$

donde k es una constante arbitraria que se puede determinar a partir del sistema. Esta fórmula se conoce como fórmula de Abel y resulta de gran utilidad para realizar demostraciones de independencia lineal en las soluciones de ecuaciones lineales homogéneas. A modo de ejemplo, un corolario inmediato es que $\mathcal{W}(x) \neq 0$ para todo x (cuando $k \neq 0$) ó $\mathcal{W}(x) = 0$ para todo x (cuando $k = 0$).

P51 Considere la ecuación diferencial

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$$

donde las funciones $a(x)$ y $b(x)$ son continuas en el intervalo $[0, 1]$ y sean y_1 e y_2 dos soluciones de ella.

(a) Demuestre que si $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in (0, 1)$, entonces y_1 e y_2 son linealmente dependientes.

(b) Suponga que y_1 e y_2 tienen ambas un punto de inflexión en algún $x_0 \in (0, 1)$. Demuestre que si $a(x_0)$ y $b(x_0)$ no son ambas cero, entonces y_1 e y_2 son linealmente dependientes.

Solución:

(a) Sabemos que el Wronskiano de esta ecuación diferencial es:

$$\mathcal{W}(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \longrightarrow \mathcal{W}(0) = 0$$

De la fórmula de Abel sabemos a su vez que:

$$\mathcal{W}(x) = k e^{-\int a(x) \mathrm{d}x} \xrightarrow{x=0} k = 0$$

Por lo tanto, $\mathcal{W}(x) = 0$ para todo x (exactamente lo que se enuncia en el corolario), y por lo tanto y_1 e y_2 son linealmente dependientes. ■

(b) Como y_1 e y_2 tienen ambas un punto de inflexión en x_0, entonces $y_1''(x_0) = y_2''(x_0) = 0$. Se tiene entonces que:

$$\mathcal{W}'(x) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = -a(x)\, k e^{-\int a(x) \mathrm{d}x}.$$

Para x_0 se tendrá entonces que:

$$\mathcal{W}'(x_0) = 0 = -a(x_0)\, k e^{-\int a(x) \mathrm{d}x}$$

Como $a(x_0)$ no es cero por hipótesis y la exponencial tampoco puede serlo, entonces $k = 0$ y por lo tanto para todo $x \in (0, 1)$ se tendrá que:

$$\boxed{\mathcal{W}(x) = 0}.$$

De esta forma, las funciones son linealmente dependientes. ■

□

2.2. Ecuaciones homogéneas de coeficientes constantes

En esta sección resolveremos un caso particular de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, correspondientes al caso en que los coeficientes que acompañan a y y sus derivadas son constantes.

2.2.1. Fundamentos teóricos

Antes de proceder a resolver ecuaciones de este tipo, debe tenerse claridad de los fundamentos teóricos inherentes al procedimiento que se describirá. Para ello, realizaremos un breve repaso de los conceptos clave de esta sección.

Teorema: Sean $y_1, \ldots, y_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y^{(n)} + c_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + c_0 y = 0$$

Si $c_{n-1}(x), \ldots, c_0(x)$ son continuas en un abierto I e Y es cualquier solución de la ecuación homogénea, entonces existen $c_1, \ldots, c_n$ reales tales que

$$Y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

para todo $x \in I$.

Solución general de ecuaciones no homogéneas. Una ecuación no homogénea de orden n es de la forma

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

Y tiene asociada la ecuación homogénea

$$y^n + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

Supóngase que conocemos una solución particular y_p de la ecuación no homogénea. Cualquier solución y de la ecuación no homogénea verificará que

$$(y - y_p)^{(n)} + p_1(x)\,(y - y_p)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,(y - y_p)' + p_n(x)\,(y - y_p) = f(x) - f(x) = 0$$

Por lo tanto, $y - y_p$ es una solución de la ecuación homogénea. Es decir, $y_h = y - y_p$ de donde se concluye que

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

Del teorema anterior, si tenemos $y_1, \ldots, y_n$ soluciones particulares linealmente independientes del problema homogéneo, entonces llegamos a que

$$\boxed{y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n + y_p}$$

Coeficientes constantes: la ecuación característica. Sea la ecuación homogénea

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

con $a_n, \ldots, a_0$ coeficientes constantes y $a_n \neq 0$. Consideremos que una solución será de la forma $y = e^{rx}$ con r a determinar, por lo que

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} e^{rx} = r^k e^{rx}$$

y la ecuación queda de la forma

$$e^{rx} \left(a_n r^n + \ldots + a_1 r + a_0 \right) = 0$$

Como $e^{rx} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, los valores de r los determinaremos por medio del polinomio de la derecha.

Definición: Para la ecuación de la forma $a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$, se denomina *ecuación o polinomio caracteristico* a la ecuación

$$a_n r^n + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

A modo de observación, puede notarse que $e^{\alpha x}$ y $e^{\beta x}$ con $\alpha \neq \beta$ son un conjunto l.i. Obsérvese que:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)\, e^{\alpha \beta x} \neq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Raíces reales distintas. Si las raíces reales son distintas, esto motiva el siguiente teorema:

Teorema: Si las raíces $r_1, \ldots, r_n$ de la ecuación característica en son reales y distintas, entonces

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}$$

es la solución general de la ecuación.

Raíces reales repetidas. Supongamos la ecuación característica de una ecuación diferencial de orden k:

$$(r - r_0)^k = 0$$

Evidentemente r_0 es raíz y $e^{r_0 x}$ es una solución. Sin embargo, nos faltarán $k-1$ soluciones l.i. para obtener la solución general. De esta ecuación debemos desprender $k-1$ soluciones l.i. más.

Una sugerencia es intentar buscar una función $u(x)$ tal que $g(x) = u(x)e^{r_0x}$ sea solución de la ecuación. Vemos que:

$$g'(x) = u'e^{r_0x} + r_0ue^{r_0x}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - r_0\right) g = \underbrace{u'e^{r_0x} + r_0ue^{r_0x}}_{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}} \underbrace{-r_0ue^{r_0x}}_{-r_0g}$$

Esto lo podemos generalizar en que

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - r_0\right)^k g = \left(\frac{\mathrm{d}^ku}{\mathrm{d}x^k}\right) e^{r_0x}$$

Como queremos que sea solución de la ecuación homogénea, ocurrirá que

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - r_0\right)^k g = \left(\frac{\mathrm{d}^ku}{\mathrm{d}x^k}\right) e^{r_0x} = 0$$

Lo que implica que debe ocurrir que $\dfrac{\mathrm{d}^ku}{\mathrm{d}x^k} = 0$. Intengrando, se obtiene que:

$$u\left(x\right) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{k-1}x^{k-1}$$

Es decir, otra solución de la ecuación es de la forma

$$\boxed{\bar{y} = \left(c_0 + c_1x + \ldots + c_{k-1}x^{k-1}\right) e^{r_0x}}$$

Podemos notar que $xe^{r_0x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_0x}$ son soluciones particulares de la ecuación diferencial original. Esto se resume en el siguiente resultado:

Teorema: Si la ecuación característica tiene una raíz repetida con multiplicidad k, entonces la parte de la solución general de la ecuación diferencial correspondiente a r_0 es de la forma:

$$\left(c_1 + c_2x + \ldots + c_kx^{k-1}\right) e^{r_0x}$$

Raíces complejas. Si introducimos un número complejo de la forma $e^{(a+bi)x}$, es decir, la solución obtenida de una raíz compleja de una ecuación característica, obtenemos que

$$e^{(a+bi)x} = e^a(\cos bx + i \operatorname{sen} bx)$$

Por otro lado, las raíces complejas siempre se presentan de a pares en todo polinomio: la raíz y su conjugado. Si tenemos una ecuación característica de la forma

$$(r - a + bi)(r - a - bi) = 0$$

las dos soluciones particulares serán $y_1 = e^{(a+bi)x}$ y $y_2 = e^{(a-bi)x}$. Desarrollando, la solución general queda de la forma:

$$\begin{aligned} y = c_1 y_1 + c_2 y_2 &= c_1 e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) + c_2 e^{ax}(\cos bx - i \operatorname{sen} bx) \\ &= (c_1 + c_2) e^{ax} \cos bx + (c_1 - c_2)\, i \operatorname{sen} bx \end{aligned}$$

Haciendo $d_1 = c_1 + c_2$ y $d_2 = (c_1 - c_2)\, i$ concluimos el teorema que a continuación se enuncia. Notemos que $\cos(\alpha x)$ y $\operatorname{sen}(\alpha x)$ son funciones linealmente independientes:

$$W(\cos(x), \operatorname{sen}(x)) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) = -1 \neq 0$$

Teorema: Si la ecuación característica tiene una pareja de raíces conjugadas no repetidas $a \pm bi$, entonces la parte correspondiente de una solución general de la ecuación tiene la forma

$$e^{ax}(c_1 \cos bx - c_2 \operatorname{sen} bx)$$

Como observación final, si el par conjugado $z = a \pm bi$ tiene multiplicidad k, entonces la parte correspondiente de la solución general tiene la forma

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}) e^{(a+bi)x} + (b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1}) e^{(a-bi)x}$$

$$= e^{ax} \left(a_0 e^{bxi} + b_0 e^{-bxi} + x(a_1 e^{bxi} + b_1 e^{bxi}) + \ldots + x^{k-1}(a_{k-1} e^{bxi} + b_{k-1} e^{bxi}) \right)$$

Notamos que

$$\begin{aligned} a_0 e^{bxi} + b_0 e^{-bxi} &= a_0(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) + b_0(\cos bx - i \operatorname{sen} bx) \\ &= c_0 \cos bx + d_0 \operatorname{sen} bx \end{aligned}$$

Se puede proceder de forma análoga en todos los casos. Reemplazando en la expresión anterior,

$$\begin{aligned} &= e^{ax}\left[c_0 \cos bx + d_0 \operatorname{sen} bx + x(c_2 \cos bx + d_2 \operatorname{sen} bx) + \ldots + x^{k-1}(c_{k-1} \cos bx + d_{k-1} \operatorname{sen} bx) \right] \\ &= e^{ax} \sum_{i=0}^{k-1} x^k \left(c_i \cos bx + d_i \operatorname{sen} bx \right) \end{aligned}$$

2.2.2. Problemas

Como resumen de la sección anterior, se puede enunciar un procedimiento general para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior con coeficientes constantes:

(1) Obtener la ecuación característica orden n y resolverla.

(2) Para cada raíz r_k puede deducirse que:

- Si r_k es real y con multiplicidad uno, entonces se propone como solución $e^{r_k x}$.
- Si $r_k = a+bi$ es compleja y con multiplicidad uno (así como su conjugado $a-bi$), entonces se proponen como soluciones linealmente independientes $e^{ax}\cos(bx)$ y $e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$.
- Si r_k es real y con multiplicidad $\ell > 1$, entonces se proponen ℓ soluciones linealmente independientes dadas por:

$$\begin{aligned} y_{k,1} &= e^{r_k x} \\ y_{k,2} &= x e^{r_k x} \\ &\vdots \\ y_{k,\ell} &= x^{\ell-1} e^{r_k x} \end{aligned}$$

- Si $r_k = a+bi$ es complejo y con multiplicidad $\ell > 1$, entonces se proponen 2ℓ soluciones linealmente independientes dadas por:

$$\begin{aligned} y_{k,1,1} &= e^{ax}\cos(bx) \quad \text{y} \quad y_{k,1,2} = e^{ax}\operatorname{sen}(bx) \\ y_{k,2,1} &= x e^{ax}\cos(bx) \quad \text{y} \quad y_{k,2,2} = x e^{ax}\operatorname{sen}(bx) \\ &\vdots \\ y_{k,\ell,1} &= x^{\ell-1} e^{ax}\cos(bx) \quad \text{y} \quad y_{k,\ell,2} = x^{\ell-1} e^{ax}\operatorname{sen}(bx) \end{aligned}$$

(3) Digamos que cada una de las n soluciones linealmente independientes están denotadas por $y_1, \ldots, y_n$, entonces la solución general viene dada por:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

con $c_1, \ldots, c_n$ coeficientes a determinar de acuerdo a las condiciones iniciales.

(4) Reemplazar en las n condiciones iniciales (si son especificadas) para obtener así la solución particular.

Procedamos a resolver algunas ecuaciones para entender estos ejemplos.

P52 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y'' + 3y' + 2y = 0$.

(b) $y''' + y'' - 2y = 0$.

Solución:

(a) El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es:

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \longrightarrow (r+1)(r+2) = 0 \longrightarrow r_1 = -1 \wedge r_2 = -2$$

De esta forma, la solución general queda expresada como:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}.$$

(b) La ecuación característica asociada en este caso es:

$$r^3 + r^2 - 2 = 0.$$

Por inspección notamos que $r_1 = 1$ es solución de la ecuación diferencial. Dividiendo el polinomio característico por $r-1$ obtenemos que $r^3+r^2-2 = (r-1)(r^2+2r+2)$. De esta forma, extraemos las raíces de $r^2 + 2r + 2$ mediante la fórmula conocida:

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i \longrightarrow r_2 = -1 - i \wedge r_3 = -1 + i.$$

Es decir, la solución general queda expresada como:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \cos(x) + c_3 e^{-x} \operatorname{sen}(x)}.$$

□

P53 Resuelva el Problema de Valor Inicial $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(\pi) = e^\pi$, $y'(\pi) = 0$.

Solución:

Se tiene que el polinomio característico asociado es $r^2 - 2r + 2 = 0$, cuyas raíces son:

$$r = \frac{2 + \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

Es decir, la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \operatorname{sen}(x)$$

Haciendo $y(\pi) = e^\pi$ se tiene que:

$$y(\pi) = -c_1 e^\pi = e^\pi \longrightarrow c_1 = -1$$

Derivando para reemplazar en la segunda condición inicial:

$$y'(x) = c_1 e^x \cos(x) - c_1 e^x \operatorname{sen}(x) + c_2 e^x \operatorname{sen}(x) + c_2 e^x \cos(x)$$

Es decir,

$$y'(\pi) = -c_1 e^\pi - c_2 e^\pi = 0 \longrightarrow -(c_1 + c_2) e^\pi = 0 \longrightarrow c_1 + c_2 = 0$$

Por lo tanto, $c_2 = 1$ y así concluimos que:

$$\boxed{y(x) = e^x [\operatorname{sen}(x) - \cos(x)]}.$$

□

P54 Dado que $y = \operatorname{sen} x$ es una solución de la ecuación

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$$

encuentre la solución general de dicha ecuación.

Solución:

El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es:

$$r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 4r + 4 = 0$$

¿Cómo podemos factorizarlo fácilmente? ¡Utilizando la información que se nos entrega! Si $y(x) = \operatorname{sen} x$ es solución, entonces $0 \pm i$ son raíces del polinomio característico. En otras palabras, este es divisible por $r^2 + 1$. Realizando la división larga obtenemos que:

$$r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 4r + 4 \div r^2 + 1 = r^2 - 4r + 4$$

Es decir,

$$r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 4r + 4 = \left(r^2 - 4r + 4\right)\left(r^2 + 1\right) = (r-2)^2\left(r^2 + 1\right)$$

Luego, las raíces son 2 (con multiplicidad 2) y $\pm i$, por lo que las 4 soluciones linealmente independientes son:

$$y_1(x) = e^{2x} \quad , \quad y_2(x) = xe^{2x}$$

$$y_3(x) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{e} \quad y_4(x) = \cos(x)\,.$$

Es decir,

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 \operatorname{sen}(x) + c_4 \cos(x)\,.$$

□

P55 Considere la ecuación homogénea

$$4x^2 y'' + 4xy' - 3y = 0$$

(a) Demuestre que para $x > 0$, la sustitución $t = \ln x$, la transforma en una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

(b) Calcule funciones ϕ_1, ϕ_2 soluciones linealmente independientes tal que la solución y de la ecuación homogénea se representa por $y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.

Solución:

(a) Deseamos convertir la ecuación diferencial a una ecuación en que las derivadas de y aparezcan con respecto a t. En la ecuación diferencial podemos hacer aparecer estas derivadas utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

Derivando nuevamente con respecto a x, debemos notar que como y depende de t (y este a su vez de x), entonces ambas derivadas en el producto dependen de x y por lo tanto debemos derivar utilizando regla del producto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}$$

Aplicando la regla de la cadena en el primer término de la suma podemos notar que:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{dt}{dx}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2} \\ &= \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}\end{aligned}$$

En la sustitución notamos que:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \longrightarrow \frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}.\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}4x^2y'' + 4xy' - 3y &= 4x^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right) + 4x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} - 3y\,(t) \\ &= 4\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4\frac{dy}{dt} - 3y\,(t)\end{aligned}$$

Es decir, obtenemos así la ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes constantes:

$$\boxed{4\frac{d^2y}{dt^2} - 3y\,(t) = 0},$$

y demostrando así lo pedido. ■

(b) El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es

$$4r^2 - 3 = 0 \longrightarrow r = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De esta forma,

$$y\,(t) = c_1 e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

Como $t = \ln x$, reemplazamos y obtenemos la soluciones l.i. en función de x:

$$y\left(t\right) = c_1 x^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c_2 x^{-\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

de modo que $\boxed{\phi_1\left(x\right) = x^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$ y $\boxed{\phi_2\left(x\right) = x^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$ (o vice versa).

□

P56 (a) Demuestre que la ecuación

$$x^3 \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} + 3x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$$

puede volverse una ecuación lineal con coeficientes constantes con el cambio de variables $x = e^t$. (*Ayuda*: Use la regla de la cadena para transformar derivadas respecto a x en derivadas respecto a t)

(b) Resuelva la ecuación anterior.

Solución:

(a) En la sustitución, se tendrá entonces que $t = \ln x$. Luego, ya dedujimos en la pregunta anterior que:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}
\end{aligned}$$

Derivando nuevamente la segunda expresión,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^3 t}{\mathrm{d}x^3} \\
&= \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^3 + 2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^3 t}{\mathrm{d}x^3} \\
&= \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^3 + 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^3 t}{\mathrm{d}x^3}
\end{aligned}$$

Es decir, como $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{x^2}$ y $\frac{\mathrm{d}^3 t}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2}{x^3}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} &= \frac{1}{x^3}\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - \frac{3}{x^3}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{x^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$x^3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+3x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+3\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y\left(t\right)=0$$

Reordenando términos, obtenemos así la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y\left(t\right)=0$$

(b) El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es:

$$r^3-3r+2=0$$

Por inspección, una solución es $r=1$. Luego, realizando división sintética obtenemos así que:

$$r^3-3r+2=\left(r-1\right)\left(r^2+r-2\right)=\left(r-1\right)\left(r+2\right)\left(r-1\right)=0$$

Las raíces son 1, con multiplicidad 2, y -2, con multiplicidad 1. Luego, la solución general a la ecuación es:

$$y\left(t\right)=c_1e^t+c_2te^t+c_3e^{-2t}.$$

Volviendo a la variable original mediante $t=\ln x$:

$$\boxed{y\left(x\right)=c_1x+c_2x\ln x+\frac{c_3}{x^2}}.$$

□

P57 (a) Encuentre criterio sobre los parámetros reales b,c para que cada solución y de la ecuación

$$y''+by'+cy=0$$

satisfaga $\lim\limits_{t\to\infty}y\left(t\right)=0$.

(b) Para la misma ecuación anterior, encuentre condiciones sobre b,c para que cada solución y no idénticamente nula de la ecuación tenga no más de un punto crítico.

Solución:

(a) Se tiene que el polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es:

$$r^2+br+c=0\longrightarrow r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}\longrightarrow\begin{cases}r_1&=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\\[2ex] r_2&=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\end{cases}.$$

De aquí distinguimos dos casos de acuerdo a las raíces:

- Si $b^2-4c>0$ la solución será de la forma

$$y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$$

Para que el límite de esta función sea cero, ambas exponenciales deben ser decrecientes. Es decir,

$$r_1<0 \quad \text{y} \quad r_2<0$$

Resolviendo la primera condición,

$$-b+\sqrt{b^2-4c}<0 \longrightarrow \sqrt{b^2-4c}<b \longrightarrow b^2-4c<b^2 \longrightarrow c>0.$$

Resolviendo la segunda condición,

$$-b-\sqrt{b^2-4c}<0 \longrightarrow b+\sqrt{b^2-4c}>0$$

Si $b\geq 0$, entonces la solución es $b\geq 0$. Si $b<0$, entonces

$$\sqrt{b^2-4c}>-b>0$$

Elevando al cuadrado,

$$b^2-4c>b^2 \longrightarrow c<0.$$

Resumiendo,

$$b^2-4c\geq 0 \quad , \quad c>0 \quad , \quad b<0 \longrightarrow c<0$$

Como la segunda condición se contradice con la tercera, no es posible tomar el caso $b<0$ y por lo tanto las condiciones son en este caso:

$$\text{si } \boxed{b^2-4c\geq 0}, \text{ entonces } \boxed{c>0} \text{ y } \boxed{b>0}.$$

Obsérvese que b es mayor estricto que cero pues $b=0$ no es posible considerando que $c>0$ y $b^2\geq 4c$.

- Si $b^2-4c<0$, entonces las soluciones serán de la forma:

$$y(x)=c_1e^{-\frac{b}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right)+c_2e^{-\frac{b}{2}x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right)$$

Para que el límite sea cero, y considerando que las trigonométricas están acotadas, la condición que deberá cumplirse es que las exponenciales sean decrecientes. Luego,

$$-\frac{b}{2}<0 \longrightarrow b>0$$

Es decir, en este caso:

$$\text{si } b^2-4c<0, \text{ entonces } b>0$$

- Si $b^2-4c=0$, habrá una raíz con multiplicidad dos: $r=-b/2$. Las soluciones serán
$$y(x)=c_1e^{-\frac{b}{2}x}+c_2xe^{-\frac{b}{2}x}$$
Luego, al igual que en el caso interior, se impone $b>0$.

Uniendo las condiciones condiciones deducimos finalmente que las condiciones son:

$$\boxed{b>0,\ \text{y } c<0 \text{ si } b^2-4c\geq 0}$$

(b) De acuerdo a los mismos casos anteriores,

- Si $b^2-4c>0$, entonces la solución será de la forma
$$y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$$
Derivando, para poder hablar de puntos críticos:
$$y'(x)=c_1r_1e^{r_1x}+c_2r_2e^{r_2x}$$
¿Puede esta función anularse más de una vez? Supongamos que sí, entonces si estas raíces son x_1 y x_2:
$$c_1r_1e^{r_1x_1}+c_2r_2e^{r_2x_1}=0\longrightarrow\frac{r_1e^{r_1x_1}}{r_2e^{r_2x_1}}=-\frac{c_2}{c_1}$$
$$c_1r_1e^{r_1x_2}+c_2r_2e^{r_2x_2}=0\longrightarrow\frac{r_1e^{r_1x_2}}{r_2e^{r_2x_2}}=-\frac{c_2}{c_1}$$
Dividiendo las ecuaciones del lado derecho, obtenemos así que:
$$e^{(r_1-r_2)(x_1-x_2)}=1$$
Entonces,
$$(r_1-r_2)(x_1-x_2)=0$$
Como $r_1\neq r_2$ pues $b^2-4c>0$ en este caso, entonces necesariamente $x_1=x_2$ y se llega así a una contradicción. De esta forma, en este caso si habrá un único punto crítico.
- Si $b^2-4c=0$, entonces
$$y(x)=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx},$$
con $r=-\dfrac{b}{2}$. Derivando,
$$y'(x)=c_1re^{rx}+c_2e^{rx}+c_2rxe^{rx}=(c_1r+c_2+c_2rx)\,e^{rx}$$
Como e^{rx} nunca se anula, necesariamente la ecuación de la recta debe anularse, y esto se logra únicamente en un solo punto. De esta forma, en este caso la solución es única.

- Si $b^2 - 4c < 0$, entonces la solución será

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{b}{2}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}x\right)$$

  Derivando, aparecerán nuevamente términos con senos y cosenos, los cuales para anularse no tienen solución única. De hecho, existirán infinitas soluciones y por lo tanto infinitos puntos críticos. De esta forma, este caso queda descartado.

Concluimos entonces que la condición para que la solución idénticamente no nula tenga a lo más un punto crítico es $\boxed{b^2 \geq 4c}$.

$\square$

P58 Hallar los valores de α y β para que el problema de valores iniciales

$$y'' + 3y' - 10y = 0, \quad y(0) = \alpha,\, y'(0) = \beta$$

tenga una solución no trivial ($y \not\equiv 0$) para la cual $t = 0$ sea un punto de inflexión.

Solución:

El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es:

$$r^2 + 3r - 10 = 0 \longrightarrow (r+5)(r-2) = 0.$$

De esta forma, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x} = 0.$$

Imponiendo la condición inicial,

$$y(0) = c_1 + c_2 = \alpha.$$

Derivando,

$$y'(x) = -5c_1 e^{-5x} + 2c_2 e^{2x}.$$

Imponiendo la segunda condición inicial,

$$y'(0) = -5c_1 + 2c_2 = \beta.$$

Asimismo, derivando por tercera vez,

$$y''(x) = 25c_1 e^{-5x} + 4c_2 e^{2x}$$

Imponiendo la condición de punto de inflexión en el origen:

$$y''(0) = 25c_1 + 4c_2 = 0$$

Generamos así el sistema:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \alpha \\ -5_c + 2c_2 &= \beta \\ 25c_1 + 4c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Debemos encontrar α y β de modo que el sistema tenga solución tal que c_1 y c_2 no puedan ser cero simultáneamente. Multiplicando por dos la primera ecuación y restándole la segunda:

$$7c_1 = 2\alpha - \beta \longrightarrow c_1 = \frac{2\alpha - \beta}{7}$$

Como $c_2 = \alpha - c_1 \longrightarrow c_2 = \dfrac{7\alpha - 2\alpha + \beta}{7} = \dfrac{5\alpha + \beta}{7}$. Luego, imponemos que:

$$25\frac{2\alpha - \beta}{7} + 4\frac{5\alpha + \beta}{7} = 0 \longrightarrow 70\alpha - 21\beta = 0$$

Es decir, $\alpha = \dfrac{3}{10}\beta$. Sin embargo, c_1 y c_2 **no** pueden ser cero simultáneamente, de modo que:

$$2\alpha - \beta \neq 0 \longrightarrow \alpha \neq \frac{\beta}{2} \quad \text{y} \quad 5\alpha + \beta \neq 0 \longrightarrow \alpha \neq -\frac{\beta}{5}$$

Como $\alpha = \dfrac{3}{10}\beta$ es la condición, basta que α y β sean no nulos para imponer la condición. Concluimos así que las condiciones buscadas son:

- $\alpha = \dfrac{3}{10}\beta$.
- $\alpha \neq 0$.
- $\beta \neq 0$.

$\square$

2.3. Ecuaciones no homogéneas: coeficientes indeterminados

Consideramos ahora el caso no homogéneo de la ecuación lineal con coeficientes constantes. Es decir,

$$a_n y^n + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Por el teorema de 3.1.5, la solución tiene la forma

$$y = y_p + y_h$$

Ya conocemos el procedimiento para determinar y_h en esta ecuación. Falta hacerlo para y_p, y este es el objetivo de este apartado.

El **método de los coeficientes indeterminados** es una manera directa de encontrar y_p cuando la función es lo suficientemente sencilla como para poder hacer una suposición general acerca de su forma. Aplica siempre que $f(x)$ es una combinación lineal finita de productos de funciones de este tipo:

- Polinomios.
- Exponenciales.
- Senos y cosenos (exponenciales elevadas a números complejos).

Podemos enunciar entonces las siguientes reglas:

- **Regla 1:** (Ningún término en $f(x)$ o sus derivadas satisface la ecuación homogénea asociada) Se toma como solución tentativa una combinación lineal de todos los términos y sus derivadas que sean linealmente independientes. Se determinan los coeficientes por sustitución tentativa.
- **Regla 2:** Si la función $f(x)$ es de la forma $P_m(x)e^{rx}\cos kx$ ó $P_m(x)e^{rx}\operatorname{sen} kx$, entonces la solución tentativa de y_p es de la forma

$$y_p(x) = x^s\left[(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m)\, e^{rx}\cos kx + (B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)\, e^{rx}\operatorname{sen} kx\right]$$

Otro enfoque: aniquiladores. Como ya sabemos, un sistema lineal con coeficientes constantes tiene asociado un operador lineal escrito en términos del operador derivada. Para la ecuación

$$a_n y^n + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

la transformación lineal asociada es $L(f) = a_n D^n f + \ldots + a_0 D f$ y esta puede ser reescrita como

$$L(y) = f(x)$$

Como $f(x)$ bajo las condiciones dadas es la función de una ecuación lineal homogénea M, se tiene que

$$M(f) = M(Ly) = 0$$

El objetivo es determinar las transformaciones M tales que $M(f) = 0$, ya que de esta forma crearemos una ecuación con mayor cantidad de raíces, pero homogénea.

Definición: Se define el *aniquilador* de $f(x)$ como aquel operador M (combinación lineal de operadores derivada) tal que $Mf(x) = 0$.

Se resumen los principales aniquiladores en la siguiente tabla:

Función	**Aniquilador**
t^n	D^{n+1}
e^{at}	$D - a$
$\cos(bt)$	$D^2 + b^2$
$\operatorname{sen}(bt)$	$D^2 + b^2$
$e^{at}\cos(bt)$	$D^2 - 2aD + a^2 + b^2$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$D^2 - 2aD + a^2 + b^2$

El método consistirá en encontrar este $P_f(D) = M$, y luego se obtendrá la ecuación

$$P_f(D)P(D)y = 0$$

La solución particular se encuentra a partir de la ecuación anterior, cuidando que esta **no** sea solución de $P(D)$, ya que en este caso sería solución del sistema homogéneo y se llegaría a la contradicción $0 = f(x)$.

Notar además que siempre deben haber soluciones distintas a las homogéneas en esta nueva ecuación homogénea, debido a que en caso contrario, todas serían solución del sistema homogéneo y se tendría que $f(x) \equiv 0$. En el peor de los casos pueden aumentar la multiplicidad de las raíces con los nuevos aniquiladores.

Mediante el método de los aniquiladores o las reglas enunciadas estamos en condiciones de resolver los siguientes problemas:

P59 (a) Escriba la ecuación diferencial homogénea de menor orden posible que tenga entre sus soluciones a la función $f(t) = t + \operatorname{sen}(2t)$.

(b) Hallar una ecuación diferencial del menor orden posible que tenga por una de sus soluciones a la función $E(t) = e^{2t} + t\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$.

Solución:

(a) Para poder resolver esta pregunta podemos recurrir a lo ya aprendido sobre el método de los aniquiladores. Para esto, consideramos cada uno de los miembros de la suma:

- t queda aniquilada por el operador D^2, y es el operador de menor grado que puede aplicársele para estos propósitos.
- $\operatorname{sen}(2t)$ queda aniquilada por el operador $D^2 + 4$, y de forma análoga al caso anterior, es el operador de menor grado que puede aplicársele.

De esta forma, observe que:

$$\begin{aligned} f(t) &= t + \operatorname{sen}(2t) \\ \longrightarrow D^2 f(t) &= D^2 t + D^2 \operatorname{sen}(2t) \\ &= D^2 \operatorname{sen}(2t) \\ \longrightarrow \left(D^2+4\right) D^2 f &= D^2\left(D^2+4\right)\operatorname{sen}(2t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, $(D^2+4)\,D^2 f = (D^4 + 4D^2)\,f = 0$. De aquí se desprende, realizando una operación inversa, que la ecuación del menor orden posible que f debe satisfacer es:

$$\boxed{f^{(4)} + 4f'' = 0}$$

(b) Procedemos razonando de forma análoga a la pregunta anterior:

- e^{2t} queda anulada por $D-2$.
- $\operatorname{sen}(t)$ queda anulada por D^2+1 y por lo tanto $t\operatorname{sen}(t)$ queda anulada por $\left(D^2+1\right)^2$.
- $e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$ queda anulada por $[D-(1-2i)][D-(1+2i)]=(D-1)^2+4$, es decir, queda anulada por D^2-2D+5.

De esta forma, $E(t)$ queda anulada completamente por la multiplicación de estos operadores, i.e. E satisface la ecuación diferencial

$$(D-2)\left(D^2+1\right)^2\left(D^2-2D+5\right)E=0$$

Posteriormente se puede expandir el polinomio y escribir la ecuación diferencial de orden 7 asociada a E. Este (tedioso) ejercicio se deja propuesto al lector.

□

P60 Encuentre la solución general de la ecuación

$$y''-3y'+2y=x^2.$$

Solución:

Recordamos que la solución a esta ecuación diferencial se compondrá de la suma de la solución homogénea con la solución particular, i.e.

$$y(x)=y_p(x)+y_h(x)$$

Resolveremos por separado cada una de estas partes, y en particular, en la solución particular (valga la redundancia) aplicaremos tanto el método de los coeficientes indeterminados como el método de los aniquiladores.

Solución homogénea. Partimos resolviendo la ecuación homogénea. La ecuación característica es:

$$r^2-3r+2=0\longrightarrow(r-1)(r-2)=0$$

Es decir, la solución homogénea es:

$$y_h(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

Solución particular (coeficientes indeterminados). Para x^2 sabemos que debemos proponer una solución de la forma $a+bx+cx^2$. Por lo tanto, proponemos:

$$y_p(x)=a+bx+cx^2$$

Derivando dos veces para reemplazar en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= b+2cx \\ y_p''(x) &= 2c \end{aligned}$$

Es decir,

$$2c - 3(b + 2cx) + 2(a + bx + cx^2) = x^2$$

Agrupamos en términos de los términos l.i., es decir, las potencias:

$$(2a + 2c - 3b) + (2b - 6c)x + 2cx^2 = x^2$$

Es decir, deberá cumplirse que:

$$\begin{aligned} 2a + 2c - 3b &= 0 \\ 2b - 6c &= 0 \\ 2c &= 1 \end{aligned}$$

De esta forma, resolviendo el sistema se tiene que $a = 7/2$, $b = 3/2$ y $c = 1/2$. Concluimos que la solución particular viene dada por:

$$y_p(x) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

Y por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{y(x) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + c_1e^x + c_2e^{2x}}$$

Solución particular (aniquiladores). Partimos haciendo una observación importante: mediante este método resolveremos la ecuación diferencial completa, es decir, obtendremos tanto la solución particular como la homogénea. Reconocemos que la ecuación diferencial homogénea queda aniquilada por $(D-2)(D-1)$ (el polinomio característico evaluado en D). Asimismo, x^2 queda aniquilado por D^3 (ver tabla). De esta forma, para una solución de la ecuación diferencial no homogénea:

$$D^3(D-2)(D-1)y = 0$$

La solución de esta ecuación de coeficientes constantes es:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3 + c_4x + c_5x^2$$

Derivamos dos veces y reemplazamos en la ecuación diferencial para determinar los coeficientes:

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_1e^x + 2c_2e^{2x} + c_4 + 2c_5x \\ y''(x) &= c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 2c_5 \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 2c_5 - 3\left(c_1e^x + 2c_2e^{2x} + c_4 + 2c_5x\right) &= x^2 \\ \cdots + 2\left(c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3 + c_4x + c_5x^2\right) & \end{aligned}$$

Agrupando en los términos l.i.:

$$2c_3 - 3c_4 + 2c_5 + (2c_4 - 6c_5)\,x + 2c_5 x^2 = x^2$$

Observe que los términos de c_1 y c_2 desaparecieron de la ecuación porque se simplificaron entre ellos. **Que estos coeficientes queden indeterminados es precisamente lo que tiene que ocurrir, pues esto indica que son parte de la solución general y por ello deben determinarse a partir de las condiciones iniciales del problema.** Deberá cumplirse que:

$$\begin{aligned} 2c_3 - 3c_4 + 2c_5 &= 0 \\ 2c_4 - 6c_5 &= 0 \\ 2c_5 &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema obtenemos los mismos resultados que los obtenidos en la parte anterior: $c_3 = 7/2$, $c_4 = 3/2$ y $c_5 = 1/2$. Es decir,

$$\boxed{y\,(x) = \underbrace{c_1 e^x + c_2 e^{2x}}_{y_h(x)} + \underbrace{\frac{7}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2}_{y_p(x)}}$$

Acabamos de comprobar que mediante este método se obtienen los mismos resultados, y se obtiene tanto la solución general como la particular simultáneamente.

□

P61 Resuelva la siguiente ecuaciones diferenciales mediante el método de coeficientes indeterminados:

$$y''' - y' = e^{2x}\,\mathrm{sen}^2\,(x)\,.$$

Solución:

Partimos resolviendo la ecuación homogénea. Su polinomio característico viene dado por:

$$r^3 - r = 0 \longrightarrow r\left(r^2 - 1\right) = r\,(r-1)\,(r+1) = 0$$

Es decir, la solución homogénea viene dada por:

$$y_h\,(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

Ahora determinaremos la solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Observamos que $\mathrm{sen}^2\,(x)$ no es una expresión que reconozcamos fácilmente como un término trigonométrico al que podamos aplicarle el método. Sin embargo, podemos notar que:

$$\mathrm{sen}^2\,(x) = \frac{1 - \cos\,(2x)}{2}$$

De esta forma, debemos resolver:

$$y''' - y' = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x)$$

Para cada uno de estos términos proponemos:

- $\frac{1}{2}e^{2x} \longrightarrow ax^s e^{2x}$. $s = 0$ pues la multiplicidad de 2 en el polinomio característico es cero.
- $-\frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x) \longrightarrow x^s\left[be^{2x}\cos(2x) + ce^{2x}\operatorname{sen}(2x)\right]$. $s = 0$ bajo el mismo argumento.

Luego, proponemos:

$$y_p(x) = ae^{2x} + be^{2x}\cos(2x) + ce^{2x}\operatorname{sen}(2x)$$

Calculando las derivadas respectivas y simplificándolas para reemplazarlas en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= -2x^{2x}\left(-a - b\cos 2x + b\operatorname{sen} 2x - c\operatorname{sen} 2x - c\cos 2x\right)\\
y_p''(x) &= -4e^{2x}\left(-a + 2b\operatorname{sen} 2x - 2c\cos 2x\right)\\
y_p'''(x) &= -8e^{2x}\left(-a + 2b\operatorname{sen} 2x + 2b\cos 2x - 2c\cos 2x + 2c\operatorname{sen} 2x\right)
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$-2e^{2x}\left(-3a + 7b\operatorname{sen} 2x + 9b\cos 2x - 7c\cos 2x + 9c\operatorname{sen} 2x\right) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x)$$

Es decir,

$$6ae^{2x} - 2(7b + 9c)e^{2x}\operatorname{sen} 2x + 2(7c - 9b)e^{2x}\cos 2x = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x)$$

De aquí desprendemos que:

$$\begin{aligned}
6a &= \frac{1}{2}\\
-2(7b + 9c) &= 0\\
2(7c - 9b) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema:

$$a = \frac{1}{12} \quad ; \quad b = \frac{9}{520} \quad ; \quad c = -\frac{7}{520}$$

De esta forma,

$$y_p(x) = \frac{1}{12}e^{2x} + \frac{9}{520}e^{2x}\cos(2x) - \frac{7}{520}e^{2x}\operatorname{sen}(2x)$$

Finalmente, la solución general a la ecuación diferencial es:

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + \frac{1}{12} e^{2x} + \frac{9}{520} e^{2x} \cos(2x) - \frac{7}{520} e^{2x} \operatorname{sen}(2x)}$$

□

P62 Resolver el problema

$$y'' - 5y' + 6y = 10 \operatorname{sen} t - 2te^{2t} - 6$$

con condiciones iniciales $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Solución:

Solución homogénea. Partimos resolviendo la ecuación homogénea. Su polinomio característico es:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \longrightarrow (r-3)(r-2) = 0$$

Es decir, la solución general a la ecuación homogénea viene dada por:

$$y_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

Solución particular (coeficientes indeterminados). Ahora debemos obtener la solución particular, por ejemplo, mediante el método de los coeficientes indeterminados. Para ello, observamos cada uno de los términos:

- Para $10 \operatorname{sen} t$ proponemos como solución $a \cos t + b \operatorname{sen} t$.
- Para $-2te^{2t}$ notamos una dificultad: e^{2t} ya es solución de la ecuación homogénea, por lo que proponemos como solución $t^s (c + dt) e^{2t}$ con $s = 1$ ya que la multiplicidad de la raíz en la ecuación homogénea es 1.
- Para -6 proponemos como solución una constante f.

Luego, la propuesta de solución particular es:

$$y_p(t) = a \cos t + b \operatorname{sen} t + \left(ct + dt^2\right) e^{2t} + f$$

Derivando:

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= -a \operatorname{sen} t + b \cos t + (c + 2dt) e^{2t} + 2\left(ct + dt^2\right) e^{2t} \\ &= -a \operatorname{sen} t + b \cos t + \left[c + 2(c+d)t + 2dt^2\right] e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(t) &= -a \cos t - b \operatorname{sen} t + [2(c+d) + 4dt] e^{2t} + 2\left[c + 2(c+d)t + 2dt^2\right] e^{2t} \\ &= -a \cos t - b \operatorname{sen} t + \left[4c + 2d + (4c + 8d)t + 4dt^2\right] e^{2t} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial y reagrupando los términos en los respectivos términos l.i.:

$$(5a - 5b)\cos(t) + (5a + 5b)\operatorname{sen}(t) + (2d - c - 2dt) e^{2t} + 6f = 10 \operatorname{sen} t - 2te^{2t} - 6$$

Es decir,

$$\begin{aligned} 5a-5b &= 0 \\ 5a+5b &= 10 \\ 2d-c &= 0 \\ -2d &= -2 \\ 6f &= -6 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que $a=b=1$, $c=2$, $d=1$ y $f=-1$. Es decir, la solución particular es:

$$y_p(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + \left(2t+t^2\right)e^{2t} - 1$$

De esta forma, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{y(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{2t} + \cos(t) + \operatorname{sen}(t) + \left(2t+t^2\right)e^{2t} - 1}$$

Solución particular (aniquiladores). Observamos que en la solución particular:

- $\operatorname{sen}(t)$ queda aniquilado por D^2+1.
- te^{2t} queda aniquilado por $(D-2)^2$.
- -6 queda aniquilado por D.

La solución homogénea queda aniquilada por su polinomio característico. Es decir, $(D-3)(D-2)$. De esta forma, para una solución de la ecuación no homogénea:

$$(D-3)(D-2)^3\left(D^2+1\right)Dy = 0$$

Dado que la ecuación característica de esta ecuación homogénea es $(r-3)(r-2)^2(r^2+1) = 0$, proponemos como solución general:

$$y(t) = c_1e^{3t} + \left(c_2+c_3t+c_4t^2\right)e^{2t} + c_5\cos(t) + c_6\operatorname{sen}(t) + c_7$$

Aquí esperamos que los coeficientes c_1 y c_2 queden indeterminados al reemplazar en la ecuación diferencial pues estos se anulan y dependen de las condiciones iniciales del P.V.I. Comprobemos esto y determinemos los coeficientes derivando dos veces:

$$\begin{aligned} y'(t) &= 3c_1e^{3t} + \left[c_3+2c_2+(2c_3+2c_4)t+2c_4t^2\right]2e^{2t} - c_5\operatorname{sen}(t) + c_6\cos(t) \\ y''(t) &= 9c_1e^{3t} + -c_5\operatorname{sen}(t) - c_6\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial y reordenando en los términos l.i.:

$$(2c_4-c_3-2c_4t)e^{2t} + (5c_5-5c_6)\cos(t) + (5c_5+5c_6)\operatorname{sen}(t) + 6c_7 = 10\operatorname{sen}t - 2te^{2t} - 6$$

De aquí se desprende que:

$$\begin{array}{rcl} 2c_4 - c_3 & = & 0 \\ -2c_4 & = & -2 \\ 5c_5 - 5c_6 & = & 0 \\ 5c_5 + 5c_6 & = & 10 \\ 6c_7 & = & -6 \end{array}$$

Primero, se comprueba que los términos en que aparecen c_1 y c_2 se anulan, por lo que quedan indeterminados. En segundo lugar, resolviendo el sistema obtenemos que $c_3 = 2$, $c_4 = 1$, $c_5 = c_6 = 1$ y $c_7 = -1$. Es decir, la solución es:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + \left(2t + t^2\right) e^{2t} + \cos(t) + \operatorname{sen}(t) - 1}$$

Observe que la solución obtenida mediante este método es exactamente la misma que la obtenida mediante el método anterior.

□

P63 Usar el método de los coeficientes indeterminados para resolver la ecuación

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} + 3t + 1.$$

Solución:

Partimos resolviendo la ecuación homogénea. La ecuación característica es:

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \longrightarrow (r+1)^2 = 0$$

De esta forma la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

Ahora resolvemos mediante el método de los coeficientes indeterminados. Para cada una de las soluciones proponemos un candidato:

- Para e^{-t} proponemos $at^s e^{-t}$. Como la multiplicidad de -1 en la ecuación característica es 2, entonces $s = 2$. Es decir, proponemos $at^2 e^{-t}$.
- Para $3t + 1$ proponemos $b + ct$ donde no proponemos un factor t^s multiplicando debido a que no aparece r en la ecuación característica (ó equivalentemente 0 como raíz).

Se sigue que la solución propuesta es $y_p(t) = at^2 e^{-t} + b + ct$. Derivando:

$$\begin{array}{rcl} y_p'(t) & = & \left(2at - at^2\right) e^{-t} + c \\ y_p''(t) & = & a\left(2 - 4t + t^2\right) e^{-t} \end{array}$$

Reemplazando con esta expresión en la ecuación diferencial obtenemos los coeficientes indeterminados:

$$a\left(2-4t+t^2\right)e^{-t}+2\left(2at-at^2\right)e^{-t}+2c+at^2e^{-t}+b+ct=e^{-t}+3t+1$$

Reordenando términos:

$$2ae^{-t}+2c+b+ct=e^{-t}+3t+1$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ 2c+b &= 1 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

De aquí concluimos que $a=1/2$, $b=-5$, $c=3$. Es decir,

$$y_p\left(t\right)=t^2e^{-t}-5+3t$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{y\left(t\right)=t^2e^{-t}-5+3t+c_1e^{-t}+c_2te^{-t}}$$

□

P64 Encuentre la solución general de la ecuación

$$y''\left(t\right)-3y'\left(t\right)+2y\left(t\right)=te^t+2t.$$

Solución:

Solución homogénea. Partimos obteniendo la solución a la ecuación homogénea. El polinomio característico es:

$$r^2-3r+2=\left(r-2\right)\left(r-1\right)=0$$

Es decir, $y_h\left(t\right)=c_1e^t+c_2e^{2t}$. Ahora resolveremos la solución particular mediante los dos métodos.

Mediante coeficientes indeterminados. Se tiene que:

- Para te^t proponemos $t^s\left(a+bt\right)e^t$. Como la multiplicidad de 1 en la ecuación homogénea es 1, entonces proponemos $s=1$ y así $t\left(a+bt\right)e^t$ es la solución propuesta.
- Para $2t$ proponemos $ct+d$.

Es decir, $y_p(t) = (at + bt^2)e^t + ct + d$. Derivando,

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (a + 2bt)e^t + \left(at + bt^2\right)e^t + c \\ &= \left[a + (a + 2b)t + bt^2\right]e^t + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(t) &= \left[(a + 2b) + 2bt\right]e^t + \left[a + (a + 2b)t + bt^2\right]e^t \\ &= \left[2a + 2b + (a + 4b)t + bt^2\right]e^t \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} \left[2a + 2b + (a + 4b)t + bt^2\right]e^t - 3\left[a + (a + 2b)t + bt^2\right]e^t &= te^t + 2t \\ \cdots - 3c + 2\left(at + bt^2\right)e^t + ct + d & \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$[2b - a - 2bt]\,e^t + 2d - 3c + 2ct = te^t + 2t$$

De aquí se desprende que:

$$\begin{aligned} 2b - a &= 0 \\ -2b &= 1 \\ 2c &= 2 \\ 2d - 3c &= 0 \end{aligned}$$

El sistema es equivalente a:

$$\begin{aligned} a &= 2b \\ a + 2b &= -1 \\ c &= 1 \\ d &= \frac{3}{2}c \end{aligned}$$

Es decir,

$$b = -\frac{1}{2} \longrightarrow a = -1 \quad \text{y} \quad c = 1 \longrightarrow d = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$y_p(t) = -te^t - \frac{1}{2}t^2e^t + t + \frac{3}{2}$$

Y por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{y(t) = -te^t - \frac{1}{2}t^2e^t + t + \frac{3}{2} + c_1e^t + c_2e^{2t}}.$$

Mediante aniquiladores. El operador de la ecuación diferencial es $(D-2)(D-1)$. Para anular a te^t requerimos el operador $(D-1)^2$ y para anular a $ct+d$ requerimos aplicar D^2. De esta forma, una solución de la ecuación diferencial satisface:

$$(D-2)(D-1)^3 D^2 y = 0$$

De aquí se desprende de inmediato la solución general de esta ecuación de orden 6, pues el polinomio característico será $(r-2)(r-1)^3 r^2$:

$$y(t) = c_1 e^{2t} + \left(c_2 + c_3 t + c_4 t^2\right) e^t + (c_5 + c_6 t)$$

Derivando,

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2c_1 e^{2t} + (c_3 + 2c_4 t) e^t + \left(c_2 + c_3 t + c_4 t^2\right) e^t + c_6 \\ &= 2c_1 e^{2t} + \left[c_2 + c_3 + (c_3 + 2c_4) t + c_4 t^2\right] e^t + c_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(t) &= 4c_1 e^{2t} + [c_3 + 2c_4 + 2c_4 t] e^t + \left[c_2 + c_3 + (c_3 + 2c_4) t + c_4 t^2\right] e^t \\ &= 4c_1 e^{2t} + \left[c_2 + 2c_3 + 2c_4 + (c_3 + 4c_4) t + c_4 t^2\right] e^t \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \left\{4c_1 e^{2t} + \left[c_2 + 2c_3 + 2c_4 + (c_3 + 4c_4) t + c_4 t^2\right] e^t\right\} &= te^t + 2t. \\ \cdots - 3\left\{2c_1 e^{2t} + \left[c_2 + c_3 + (c_3 + 2c_4) t + c_4 t^2\right] e^t + c_6\right\} & \\ \cdots + 2\left\{c_1 e^{2t} + \left(c_2 + c_3 t + c_4 t^2\right) e^t + (c_5 + c_6 t)\right\} & \end{aligned}$$

Reordenando términos en función de e^t y e^{2t}:

$$0e^{2t} + \left(0c_2 - c_3 + 2c_4 - 2c_4 t - 0t^2\right) e^t + 2c_5 - 3c_6 + 2c_6 t = te^t + 2t$$

Observe que e^{2t} quedó con potencia nula a ambos lados, razón por la cual el coeficiente c_1 queda indeterminado. Ocurre exactamente lo mismo para c_2. Luego, igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} -c_3 + 2c_4 &= 0 \\ -2c_4 &= 1 \\ 2c_5 - 3c_6 &= 0 \\ 2c_6 &= 2 \end{aligned}$$

Es decir, $c_4 = -1/2$, $c_3 = -1$, $c_6 = 1$ y $c_5 = 3/2$. De esta forma, la solución es:

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t - te^t - \frac{1}{2} t^2 e^t + t + \frac{3}{2}$$

Los términos indeterminados corresponderán a la solución general y los tres últimos términos corresponderán a la solución particular. Observe que el resultado obtenido es el mismo mediante ambos métodos.

$\square$

P65 Dada la ecuación diferencial

$$y'''(x) + y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$$

(a) Determine la solución general, sabiendo que la función $y_1(x) = e^{-x}$ es solución de la ecuación dada.

(b) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ resuelva la ecuación

$$y'''(x) + y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 3e^{\alpha x}.$$

Solución:

(a) El polinomio característico de la ecuación diferencial viene dado por:

$$r^3 + r^2 + 4r + 4 = 0$$

Como e^{-x} es solución de la ecuación, entonces -1 es raíz del polinomio y por lo tanto este es divisible por $r+1$. Realizando división sintética:

$$r^3 + r^2 + 4r + 4 = (r+1)\left(r^2+4\right)$$

De esta forma, las raíces son 1 y $\pm 2i$. Es decir, la solución general es:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos(2x) + c_3 \operatorname{sen}(2x)}.$$

(b) Debemos tener cuidado con el valor que tome α, pues si $\alpha = -1$ estaremos coincidiendo con una de las raíces de la solución general. Por esta razón es que nos ubicaremos en dos casos:

- $\underline{\alpha = -1}$. En dicho caso, proponemos como solución:

  $$y_p(x) = axe^{-x}$$

  donde se incluyó x pues la multiplicidad de la raíz en la ecuación característica es 1. Derivando:

  $$\begin{aligned} y_p'(x) &= (a - ax)\,e^{-x} \\ y_p''(x) &= -(2a - ax)\,e^{-x} \\ y_p'''(x) &= (3a - ax)\,e^{-x} \end{aligned}$$

  Es decir,

  $$\begin{aligned} (3a-ax)\,e^{-x} - (2a-ax)\,e^{-x} + 4(a-ax)\,e^{-x} + 4axe^{-x} &= 3e^{-x} \\ 9ae^{-x} &= 3e^{-x} \end{aligned}$$

Se sigue que $a = 1/3$. Es decir, la solución particular es en este caso:

$$y_p(x) = \frac{1}{3}xe^{-x} \longrightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{3}xe^{-x} + c_1e^{-x} + c_2\cos(2x) + c_3\operatorname{sen}(2x)}.$$

- $\underline{\alpha \neq -1}$. Proponemos como solución:

$$y_p(x) = ae^{\alpha x} \longrightarrow y_p'(x) = -a\alpha e^{\alpha x}$$

$$\longrightarrow y_p''(x) = a\alpha^2 e^{\alpha x} \longrightarrow y_p'''(x) = a\alpha^3 e^{\alpha x}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} a\alpha^3 e^{\alpha x} + a\alpha^2 e^{\alpha x} + 4a\alpha e^{\alpha x} + 4ae^{\alpha x} &= 3e^{\alpha x} \\ a\left(\alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha + 4\right)e^{\alpha x} &= 3e^{\alpha x} \end{aligned}$$

De esta forma,

$$a = \frac{3}{\alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha + 4} \longrightarrow y_p(x) = \frac{3}{\alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha + 4}e^{\alpha x}$$

Concluimos que:

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{\alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha + 4}e^{\alpha x} + c_1e^{-x} + c_2\cos(2x) + c_3\operatorname{sen}(2x)}$$

□

2.4. Ecuaciones no homogéneas: variación de parámetros

Este es otro método para obtener y_p en una ecuación no homogénea en el caso en que no se pueda hacer uso del método de los coeficientes determinados, ya sea porque los coeficientes no son constantes o porque el método resulta poco práctico. En efecto, este método se amplía a cualquier ecuación lineal homogénea, y no solo para coeficientes constantes.

Para una ecuación de la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y = f(x)$$

se puede hacer uso del método siempre y cuando ya se conozca la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y_h = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$$

El método. La idea central del método consiste en reemplazar los coeficientes constantes de la solución homogénea por funciones $u_1(x), \ldots, u_n(x)$. En particular, escogeremos $n = 2$ para ilustrar la idea y el lector podrá realizar a posteriori la extensión para $n > 2$.

La solución particular será de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Como son dos funciones, debemos imponer una segunda ecuación para obtener el sistema de ecuaciones. Por simplicidad en los cálculos, derivando:

$$y_p^{'} = u_1^{'} y_1 + u_2^{'} y_2 + u_1 y_1^{'} + u_2 y_2^{'}$$

Obsérvese que generaremos un sistema de una ecuación y dos incógnitas, por lo que tendremos infinitas soluciones. Esto hace necesario imponer una segunda condición, y por lo tanto haremos lo siguiente: impondremos arbitrariamente la condición $u_1^{'} y_1 + u_2^{'} y_2 = 0$ para que se anulen las segundas derivadas de u_1 y u_2 de la expresión de la segunda derivada. Esto simplificará sustancialmente los cálculos y hará que el método resulte realizable.

Luego, derivando nuevamente:

$$y_p^{''} = \left(u_1 y_1^{''} + u_2 y_2^{''}\right) + \left(u_1^{'} y_1^{'} + u_2^{'} y_2^{'}\right)$$

Reemplazando en la ecuación lineal de orden 2:

$$\left(u_1 y_1^{''} + u_2 y_2^{''}\right) + \left(u_1^{'} y_1^{'} + u_2^{'} y_2^{'}\right) + p_1 \left(u_1 y_1^{'} + u_2 y_2^{'}\right) + p_0 (u_1 y_1 + u_2 y_2) = f(x)$$

Reordenamos términos:

$$u_1 \underbrace{\left(y_1^{''} + p_1 y_1^{'} + p_0\right)}_{0} + u_2 \underbrace{\left(y_2^{''} + p_1 y_2^{'} + p_0\right)}_{0} + u_1^{'} y_1^{'} + u_2^{'} y_2^{'} = f(x)$$

De acuerdo a la condición impuesta y a lo obtenido nos queda el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1^{'} y_1 + u_2^{'} y_2 &= 0 \\ u_1^{'} y_1^{'} + u_2^{'} y_2^{'} &= f(x) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{'} \\ u_2^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_1^{'} \\ u_2^{'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Debido a que los coeficientes de la matriz son funciones y no números, puede resultar complicado o bien tedioso utilizar el método de eliminación Gaussiana. Por ello, hacemos uso del cálculo de la inversa por medio de la matriz adjunta:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{W}(x)} \begin{bmatrix} y_2^{'} & -y_2 \\ -y_1^{'} & y_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

De aquí desprendemos que:

$$\begin{aligned} u_1^{'} &= - \frac{y_2(x) f(x)}{\mathcal{W}(x)} \longrightarrow u_1(x) = - \int \frac{y_2(x) f(x)}{\mathcal{W}(x)} \mathrm{d}x + c_1 \\ u_2^{'} &= \frac{y_1(x) f(x)}{\mathcal{W}(x)} \longrightarrow u_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{\mathcal{W}(x)} \mathrm{d}x + c_2 \end{aligned}$$

Notamos que las constantes serán multiplicadas por y_1 e y_2 y absorbidas en la solución general por la parte homogénea. Por lo tanto, por simplicidad hacemos $c_1 = c_2 = 0$.

Todo este método puede resumirse entonces en el siguiente teorema:

Teorema: Si la ecuación no homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ tiene como solución homogénea $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, entonces una solución particular está dada por:

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x,$$

o bien,

$$y_p\left(x\right) = -y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)f(t)}{\mathcal{W}(t)}\mathrm{d}t + y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{\mathcal{W}(t)}\mathrm{d}t.$$

Resolvamos a continuación problemas en los cuales se realiza la aplicación de estos conceptos:

P66 Aplique el método de variación de parámetros en los siguientes problemas para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial dada:

(a) $y'' + 9y = 2\sec 3x$.

(b) $y'' + 4y = \operatorname{sen}^2 x$

Solución:

(a) Partimos resolviendo la ecuación homogénea. Se tiene que la ecuación característica viene dada por:

$$r^2 + 9 = 0 \longrightarrow r = \pm 3i$$

De esta forma, la solución homogénea viene dada por:

$$y_h\left(x\right) = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x$$

Calculamos el Wronskiano para aplicar el método de variación de parámetros:

$$\mathcal{W}\left(x\right) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3\operatorname{sen} 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3$$

Proponemos la solución particular dada por:

$$y_p\left(x\right) = -y_1\left(x\right)\underbrace{\int \frac{y_2\left(x\right)f\left(x\right)}{\mathcal{W}\left(x\right)}\mathrm{d}x}_{-u_1(x)} + y_2\left(x\right)\underbrace{\int \frac{y_1\left(x\right)f\left(x\right)}{\mathcal{W}\left(x\right)}\mathrm{d}x}_{u_2(x)}$$

Luego,

$$\begin{aligned} u_1\left(x\right) &= -\int \frac{\operatorname{sen} 3x\, 2\sec 3x}{3}\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int \tan 3x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\ln\left|\cos 3x\right| \\ u_2\left(x\right) &= \int \frac{\cos 3x\, 2\sec 3x}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

Es decir, la solución particular es:

$$y_p(x) = \frac{2}{9}\ln|\cos 3x|\cos 3x + \frac{2}{3}x\,\mathrm{sen}\,3x$$

Y la solución general es:

$$\boxed{y(x) = \frac{2}{9}\ln|\cos 3x|\cos 3x + \frac{2}{3}x\,\mathrm{sen}\,3x + c_1\cos 3x + c_2\,\mathrm{sen}\,3x}$$

(b) Partimos resolviendo la ecuación homogénea, escribiendo su polinomio característico:

$$r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2i$$

De esta forma, la solución homogénea es:

$$y_h(x) = c_1\cos(2x) + c_2\,\mathrm{sen}(2x)$$

Ahora calculamos su Wronskiano para aplicar el método de variación de parámetros:

$$\mathcal{W}(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \mathrm{sen}\,2x \\ -2\,\mathrm{sen}\,2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2$$

De esta forma,

$$y_p(x) = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x),$$

donde:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \frac{y_2(x)\,f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{sen}(2x)\,\mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \mathrm{sen}^3 x\,\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\mathrm{sen}^4 x}{4} \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int \frac{y_1(x)\,f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x\right)\mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \left(1 - 2\,\mathrm{sen}^2 x\right)\mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}^4 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int 1 - \cos 2x\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{sen}^4 x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral usamos la fórmula de reducción

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1}(x)\cos(x)}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2}(x)\,dx$$

Es decir,

$$\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx = \frac{1}{32}\left(12x - 8\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}4x\right)$$

Y por lo tanto,

$$u_2(x) = \frac{1}{16}\left(4\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}4x - 4x\right)$$

Es decir, la solución particular es:

$$y_p(x) = -\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{16}\left(4\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}4x - 4x\right)\operatorname{sen}(2x),$$

Concluimos que la solución general es:

$$\boxed{y(x) = -\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{16}\left(4\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}4x - 4x\right)\operatorname{sen}(2x) + c_1\cos(2x) + c_2\operatorname{sen}(2x)}$$

□

P67 Dada la ecuación $y'' + y = f(t)$, demuestre que el método de variación de parámetros conduce a la solución particular

$$y_p(t) = \int_0^t f(u)\operatorname{sen}(t-u)\,du$$

Solución:

Partimos resolviendo la ecuación homogénea para determinar las funciones base que usaremos en el método de variación de parámetros. Es así como obtenemos la ecuación característica

$$r^2 + 1 = 0 \longrightarrow r = \pm i$$

Es decir, la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(t) = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen}t$$

Proponemos ahora como solución particular:

$$y_p(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t)$$

Partimos calculando el wronskiano:

$$\mathcal{W}(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen}t \\ -\operatorname{sen}t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

Luego,

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= -\int_0^t \frac{y_2(u) f(u)}{\mathcal{W}(u)} \mathrm{d}u = -\int_0^t f(u) \operatorname{sen}(u) \mathrm{d}u \\
u_2(t) &= \int_0^t \frac{y_1(u) f(u)}{\mathcal{W}(u)} \mathrm{d}u = \int_0^t f(u) \cos(u) \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Observe que utilizamos la forma de integral definida a conveniencia para llegar a la expresión deseada. Entonces,

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \operatorname{sen}(t) \int_0^t f(u) \cos(u) \mathrm{d}u - \cos(t) \int_0^t f(u) \operatorname{sen}(u) \mathrm{d}u \\
&= \int_0^t f(u) [\operatorname{sen}(t) \cos(u) - \cos(t) \operatorname{sen}(u)] \mathrm{d}u \\
&= \int_0^t f(u) \operatorname{sen}(t-u) \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

De esta forma se demuestra lo pedido. ■

□

Revisemos ahora el método para ecuaciones diferenciales con coeficientes no constantes:

P68 Por sustitución directa puede verificarse que $y_h = c_1 x + c_2 x^{-1}$ es una solución homogénea de la ecuación de segundo orden no homogénea

$$x^2 y'' + x y' - y = 72x^5.$$

Aplique el método de variación de parámetros para obtener la solución particular de esta ecuación diferencial.

Solución:

Partimos escribiendo la ecuación normalizada. Es importante realizar este paso dado como se dedujo el método, pues en caso contrario las integrales pueden resultar imposibles de calcular o bien los resultados obtenidos pueden ser erróneos.

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 72x^3$$

Partimos calculando el Wronskiano:

$$\mathcal{W}(x) = \begin{vmatrix} x & \dfrac{1}{x} \\ 1 & -\dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}$$

Luego,

$$\begin{aligned}u_1(x) &= -\int \frac{y_2(x)\,f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}72x^3}{\frac{2}{x}}\mathrm{d}x = 36\int x^3\mathrm{d}x \\ &= 9x^4\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}u_2(x) &= \int \frac{y_1(x)\,f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{x\cdot 72x^3}{\frac{2}{x}}\mathrm{d}x = -36\int x^5\mathrm{d}x \\ &= -6x^6\end{aligned}$$

Concluimos que la solución particular viene dada por:

$$y_p(x) = 9x^5 - 6x^5 = 3x^5$$

Es decir, la solución general de la ecuación diferencial viene dada por:

$$\boxed{y(x) = 3x^5 + c_1x + c_2x^{-1}}$$

□

P69 Aplique el método de variación de parámetros para encontrar la solución particular de la ecuación dadas sus soluciones homogéneas:

(a) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^3$; $y_h = c_1x^2 + c_2x^3$.

(b) $x^2y'' + xy' + y = \ln x$; $y_h = c_1\cos(\ln x) + c_2\,\mathrm{sen}(\ln x)$.

Solución:

(a) Calculamos el Wronskiano de las soluciones linealmente independientes en la ecuación homogénea:

$$\mathcal{W}(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = x^4$$

Normalizamos la ecuación diferencial:

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x$$

Luego,

$$\begin{aligned}u_1(x) &= -\int \frac{y_2(x)\,f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{x^3x}{x^4}\mathrm{d}x = -x \\ u_2(x) &= \int \frac{y_1(x)\,f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2x}{x^4}\mathrm{d}x = \ln(x)\end{aligned}$$

De esta forma,

$$y_p(x) = -x^3 + x^3 \ln(x)$$

Finalmente,

$$\boxed{y(x) = -x^3 + x^3 \ln(x) + c_1 x^2 + c_2 x^3}$$

(b) Procedemos de forma análoga a la pregunta anterior, calculando el Wronskiano:

$$\mathcal{W}(x) = \begin{vmatrix} \cos(\ln x) & \operatorname{sen}(\ln x) \\ -\dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} & \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

Normalizamos la ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = \frac{\ln x}{x^2}$$

Luego

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x) \dfrac{\ln x}{x^2}}{\dfrac{1}{x}} \mathrm{d}x = -\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x) \ln x}{x} \mathrm{d}x \\ u_2(x) &= \int \frac{\cos(\ln x) \dfrac{\ln x}{x^2}}{\dfrac{1}{x}} \mathrm{d}x = \int \frac{\cos(\ln x) \ln x}{x} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Hacemos $u = \ln x$ e integración por partes y obtenemos así:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \ln x \cos(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x) \\ u_2(x) &= \ln x \operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \ln x \cos^2(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x) \cos(\ln x) + \ln x \operatorname{sen}^2(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x) \cos(\ln x) \\ &= \ln x \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\boxed{y(x) = \ln x + c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x)}$$

□

2.5. Reducción de orden: método de Abel

Mediante el método de reducción de orden puede determinarse una o más soluciones generales de una ecuación diferencial lineal de orden superior de coeficientes no necesariamente constantes partiendo de una solución general ya conocida.

Se hará la explicación del método para el caso particular de segundo orden. Consideremos una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes no constantes dada por

$$a_2(x)y^{''} + a_1(x)y' + a_0(x)y(x) = 0$$

Si logramos determinar una solución $y_1(x)$ buscaremos $u(x)$ tal que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ sea solución del problema homogéneo. Derivando:

$$\begin{aligned} y_2^{'} &= u'y_1 + uy_1^{'} \\ y_2^{''} &= u''y_1 + 2u'y_1^{'} + uy_1^{''} \end{aligned}$$

La ecuación reescrita queda de la forma:

$$a_2(x)\left(u''y_1 + 2u'y_1^{'} + uy_1^{''}\right) + a_1(x)\left(u'y_1 + uy_1^{'}\right) + a_0uy_1 = 0$$

Reordenando términos:

$$u\underbrace{\left[a_2(x)y_1^{''} + a_1(x)y_1^{'} + a_0y\right]}_{0} + u'\left[2a_2(x)y_1^{'} + a_1(x)y_1\right] + u''a_2(x)y_1 = 0$$

Hacemos la sustitución $v = u'$ y reordenamos:

$$v\left[2a_2(x)y_1^{'} + a_1(x)y_1\right] = -v'a_2(x)y_1$$

Es decir, aparece claramente una ecuación separable:

$$\frac{v'}{v} = -\frac{2a_2(x)y_1^{'} + a_1(x)y_1}{a_2(x)y_1} = -2\frac{y_1^{'}}{y_1} - \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$$

Integrando a ambos lados:

$$\begin{aligned} \log v &= -2\int \frac{y_1^{'}}{y_1}\mathrm{d}x - \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\mathrm{d}x + c \\ &= -2\log y_1 - \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Reescribiendo,

$$\log v = -\log y_1^2 - \log e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\mathrm{d}x} = \log \frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\mathrm{d}x}$$

Es decir,

$$u' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\mathrm{d}x}$$

Finalmente, integrando:

$$u\left(x\right) = \int \frac{1}{y_1^2\left(x\right)}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

Y por lo tanto, la solución linealmente independiente es:

$$\boxed{y_2\left(x\right) = y_1\left(x\right)\int \frac{1}{y_1^2\left(x\right)}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x} \tag{19}$$

Una forma de obtener y_1. Solo para ciertos casos se puede utilizar x^r, cuyas derivadas son de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}x^r = \frac{r!}{(r-k)!}x^{r-k}$$

En estas ecuaciones quedará un polinomio de r multiplicado con x^r e igualado a cero. Obteniendo las raíces de r se obtienen los posibles x^r como soluciones de la ecuación.

Si se obtiene un par conjugado de la forma $a+bi$, cabe recordar que

$$x^{a\pm bi} = e^{(a\pm bi)\ln(x)} = e^{a\ln(x)\pm b\ln(x)i} = e^{a\ln(x)}\left[\cos\left(b\ln x\right) \pm i\,\mathrm{sen}\left(b\ln x\right)\right]$$

Luego, una combinación de estados soluciones también será solución de la ecuación homogénea. Podemos eliminar la parte imaginaria tal como en casos anteriores.

Apliquemos estos conceptos en los siguientes problemas.

P70 (a) Compruebe que la función $y_1(t) = t\,\mathrm{sen}(2t) + \mathrm{sen}(2t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2\left[2(t+1)^2+1\right]y = 0$$

y obtenga una segunda solución $y_2(t)$ que sea linealmente independiente de $y_1(t)$.

(b) Usando el método de variación de parámetros, resuelva el problema de valores iniciales

$$y'' - \frac{2}{t+1}y' + 2\left[2+\frac{1}{(t+1)^2}\right]y = 2t+2 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Solución:

(a) Partimos verificando que $y_1(t)$ es solución de la ecuación diferencial. Derivamos dos veces:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (t+1)\,\mathrm{sen}(2t) \\ y_1'(t) &= \mathrm{sen}(2t) + 2(t+1)\cos(2t) \\ y_1''(t) &= 4\cos(2t) - 4(t+1)\,\mathrm{sen}(2t) \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} (t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2\left[2(t+1)^2+1\right]y &= 4(t+1)^2\cos(2t) - 4(t+1)^3\,\mathrm{sen}(2t) \\ &\quad \cdots - 2(t+1)\,\mathrm{sen}(2t) - 4(t+1)^2\cos(2t) \\ &\quad \cdots 4(t+1)^3\,\mathrm{sen}(2t) + 2(t+1)\,\mathrm{sen}(2t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_1(t)$ efectivamente es solución de la ecuación diferencial. Luego, recordamos la fórmula de reducción de orden:

$$y_2(t) = y_1(t)\int \frac{1}{y_1^2(t)}e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

Por evaluar,

$$e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\mathrm{d}t} = e^{\int \frac{2}{t+1}\mathrm{d}t} = (t+1)^2$$

Es decir, tenemos que evaluar:

$$\int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int \frac{(t+1)^2}{(t+1)^2 \operatorname{sen}^2(2t)}\mathrm{d}t = \int \csc^2(2t)\,\mathrm{d}t$$

Integrando,

$$\int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cot(2t)$$

De esta forma,

$$y_2(t) = -(t+1)\operatorname{sen}(2t)\,\frac{1}{2}\cot(2t)$$

O en otras palabras, la otra solución linealmente independiente es

$$\boxed{y_2(t) = (t+1)\cos(2t)}$$

(b) La ecuación ya se encuentra escrita de forma que la derivada segunda se encuentre multiplicada por 1. Aplicamos la fórmula de variación de parámetros:

$$y_p(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t)\,,$$

donde:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)\,f(t)}{\mathcal{W}(t)}\mathrm{d}t$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)\,f(t)}{\mathcal{W}(t)}\mathrm{d}t$$

Calculamos el wronskiano:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(t) &= \begin{vmatrix} (t+1)\operatorname{sen}2t & (t+1)\cos 2t \\ \operatorname{sen}2t + 2(t+1)\cos 2t & \cos 2t - 2(t+1)\operatorname{sen}2t \end{vmatrix} \\
&= (t+1)\operatorname{sen}2t\,\cos 2t - 2(t+1)^2\operatorname{sen}^2 2t - (t+1)\operatorname{sen}2t\,\cos 2t - 2(t+1)^2\cos^2 2t \\
&= -2(t+1)^2
\end{aligned}$$

Reemplazando en $u_1(t)$:

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \int \frac{(t+1)\cos 2t \cdot 2(t+1)}{2(t+1)^2}\mathrm{d}t = \int \cos 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}2t
\end{aligned}$$

Asimismo,

$$u_2(t) = -\int \frac{(t+1)\operatorname{sen}2t \cdot 2(t+1)}{2(t+1)^2}\mathrm{d}t = -\int \operatorname{sen}2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cos 2t$$

Es decir,

$$y_p(t) = \frac{1}{2}(t+1)\operatorname{sen}^2 2t + \frac{1}{2}(t+1)\cos^2 2t = \frac{(t+1)}{2}$$

Luego, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = \frac{(t+1)}{2} + a(t+1)\operatorname{sen} 2t + b(t+1)\cos 2t$$

Reemplazando en $y(0) = 1$:

$$y(0) = \frac{1}{2} + b = 0 \longrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Asimismo, derivando:

$$y'(t) = \frac{1}{2} + a\operatorname{sen} 2t + 2a(t+1)\cos 2t + b\cos 2t - 2b(t+1)\operatorname{sen} 2t$$

Reemplazando en cero,

$$y'(0) = \frac{1}{2} + 2a + b = 1$$

Así, obtenemos que $a = \frac{1}{2}$. Finalmente, la solución al P.V.I. es:

$$\boxed{y(t) = \frac{(t+1)}{2}\left[\operatorname{sen} 2t - \cos 2t - 1\right]}$$

□

P71 Mediante el método de reducción de orden, encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$.

(b) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$.

Solución:

(a) Proponemos una solución de la forma $y_1(x) = x^r$ con r por determinar, ya que no se nos entrega ninguna solución l.i. De esta forma,

$$y_1'(x) = rx^{r-1} \longrightarrow y_1''(x) = r(r-1)x^{r-2}$$

Reemplazando,

$$r(r-1)x^r - 3rx^r + 4x^r = 0 \longrightarrow [r(r-1) - 3r + 4]x^r = 0$$

Como esta identidad debe ser cero para todo x, entonces:

$$r(r-1) - 3r + 4 = 0 \longrightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \longrightarrow (r-2)^2 = 0$$

Es decir, $r = 2$ y por lo tanto $y = x^2$ es una solución l.i. de la ecuación. Ahora buscamos mediante reducción de orden una segunda solución l.i. a esta. Tenemos que:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x$$

En primer lugar,

$$e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \mathrm{d}x} = e^{\int \frac{3x}{x^2} \mathrm{d}x} = x^3$$

Es decir,

$$\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^4} x^3 \mathrm{d}x = \ln x$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial queda expresada como:

$$\boxed{y(x) = c_1 x^2 + c_2 \ln x}$$

(b) Procedemos de forma análoga al problema anterior, proponiendo una solución de la forma $y_1 = x^r$. Las derivadas son exactamente las mismas, por lo que reemplazamos directamente:

$$r(r-1)x^r - rx^r(x+2) + (x+2)x^r = 0$$

Reordenando términos y cancelando x^r (que no puede anularse):

$$r(r-1) - (r-1)(x+2) = 0 \longrightarrow (r-1)(r-x-2) = 0$$

Como r debe ser constante, entonces $r = 1$ es la única solución posible. Buscamos ahora la segunda solución l.i. mediante la fórmula de reducción de orden. Partimos calculando:

$$e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \mathrm{d}x} = e^{\int \frac{x(x+2)}{x^2} \mathrm{d}x} = e^{\int 1 + \frac{2}{x} \mathrm{d}x} = e^{x + 2\ln x} = x^2 e^x$$

Es decir,

$$\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \mathrm{d}x} = \int \frac{1}{x^2} x^2 e^x \mathrm{d}x = e^x$$

De esta forma, la segunda solución l.i. es $y_2(x) = xe^x$ y por lo tanto la solución general puede expresarse como:

$$\boxed{y(x) = c_1 x + c_2 x e^x}$$

□

P72 (a) Resuelva

$$xy'' - y' = -\frac{2}{x} - \ln(x)$$

(b) Determine la solución del problema

$$xy'' + (x-1)y' - y = x^2 \quad ; \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1$$

sabiendo que $y(x) = e^{-x}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

Solución:

(a) Si bien es posible hacer $u = y'$ y luego resolver una ecuación lineal, prescindiremos de ello para resolver esta pregunta mediante reducción de orden. Partimos resolviendo la ecuación homogénea. Para ello, debemos resolver:

$$xy'' - y' = 0$$

Proponemos $y = x^r$, de modo que:

$$r(r-1)x^{r-1} - rx^{r-1} = 0$$

Es decir, $r(r-1) - r = 0 \longleftrightarrow r^2 - 2r = 0 \longrightarrow r = 0 \vee r = 2$. Es decir, sirven como soluciones tanto $y_1 = 1$ como $y_2 = x^2$. Observamos que estas funciones son l.i. debido a su Wronskiano:

$$\mathcal{W}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 2x \neq 0$$

De esta forma, hemos encontrado las dos soluciones l.i. Para obtener ahora la ecuación particular usamos el método de variación de parámetros. Primero escribimos la ecuación normalizada:

$$y'' - \frac{1}{x}y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\ln(x)$$

Proponemos:

$$y_p(x) = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \frac{y_2(x)\,f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2\left[\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x}\ln(x)\right]}{2x} \\ &= \int \frac{[2 + x\ln(x)]}{2x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Para integrar $\ln(x)$ hacemos $u = \ln(x)$ y $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. De esta forma,

$$u_1(x) = \ln(x) + \frac{1}{2}x(\ln x - 1)$$

Asimismo,

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)\,f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Resolviendo esta integral, en el segundo término hacemos $u = \ln(x)$ y $\mathrm{d}v = 1/2x^2\mathrm{d}x$. De esta forma,

$$u_2(x) = \frac{x + x\ln(x) + 1}{2x^2}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \ln(x) + \frac{1}{2}x(\ln x - 1) + \frac{1}{2}(x + x\ln x + 1) \\ &= \ln(x) + \frac{1}{2}[x\ln x - x + x + x\ln x + 1] \\ &= \ln(x) + x\ln x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{y(x) = \ln(x) + x\ln(x) + \frac{1}{2} + c_1 + c_2x^2}$$

(b) Aplicamos el método de reducción de orden para obtener la segunda solución l.i. con la primera. Calculamos en primer lugar el término exponencial:

$$e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\mathrm{d}x} = e^{-\int \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x} = e^{-\int 1 - \frac{1}{x}\mathrm{d}x} = xe^{-x}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{e^{-2x}} xe^{-x}\mathrm{d}x \\ &= \int xe^x\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Haciendo integración por partes obtenemos:

$$u(x) = (x-1)e^x$$

De esta forma,

$$y_2(x) = u(x)\,y_1(x) = x - 1$$

Para resolver la solución particular requerimos escribir la ecuación diferencial en su forma normalizada:

$$y'' + \frac{(x-1)}{x}y' - \frac{1}{x}y = x \quad ; \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1$$

Luego, proponemos como solución:

$$y_p(x) = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x),$$

donde:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \frac{y_2(x)\,f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{(x-1)}{xe^{-x}}x\,\mathrm{d}x \\ &= -\int (x-1)\,e^{x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Integrando nuevamente por partes,

$$u_1(x) = (2-x)\,e^{x}$$

Asimismo,

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)\,f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{e^{-x}x}{xe^{-x}}\mathrm{d}x = x$$

El wronskiano fue calculado como sigue:

$$\mathcal{W}(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & x-1 \\ -e^{-x} & 1 \end{vmatrix} = e^{-x} + e^{-x}(x-1) = xe^{-x}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (2-x) + x(x-1) \\ &= 2 - x + x^2 - x \\ &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

Luego,

$$y(x) = x^2 - 2x + 2 + c_1e^{-x} + c_2(x-1)$$

Haciendo $y(1) = 0$:

$$y(1) = 1 + c_1e^{-1} = 0 \longrightarrow c_1 = -e$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2x - 2 - c_1e^{-x} + c_2 \\ \longrightarrow y'(1) &= -c_1e^{-1} + c_2 \end{aligned}$$

Es decir,

$$y'(1) = 1 + c_2 = 1 \longrightarrow c_2 = 0$$

Concluimos así que la solución del P.V.I.

$$\boxed{y(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-(x-1)}}.$$

□

P73 Resuelva $(1-t^2)\,x'' - 2tx' + 2x = 0$ sabiendo que $x = t$ es una solución.

Solución:

Aplicamos el método de reducción de orden, sabiendo que:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t\int \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2} e^{\int \frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &= t\int \frac{1}{t^2} e^{-\ln\left(1-t^2\right)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

donde para resolver la integral del interior se hizo $u = t^2$. Luego,

$$x_2(t) = t\int \frac{1}{t^2(1-t^2)}\mathrm{d}t$$

Para resolver esta integral aplicamos el método de las fracciones parciales:

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{1-t} = \frac{a(1-t^2) + bt^2(1-t) + ct^2(1+t)}{t^2(1-t^2)}$$

Es decir,

$$1 = a\left(1-t^2\right) + bt^2(1-t) + ct^2(1+t)$$

Haciendo $t = 1$ tenemos que:

$$1 = 2c \longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Haciendo $t = 0$ tenemos que:

$$1 = a$$

Haciendo $t = -1$ tenemos que:

$$1 = 2b \longrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t\int \frac{1}{t^2(1-t^2)}\mathrm{d}t = t\int \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2(1-t)}\mathrm{d}t \\ &= t\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\log|1+t| - \frac{1}{2}\log|1-t|\right) \\ &= -1 + \frac{t}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \end{aligned}$$

De esta forma, la solución general queda expresada como:

$$\boxed{x(t) = c_1 t - c_2 + c_2\frac{t}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|}.$$

$\square$

P74 Encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + 2y(x) = x$$

si se sabe que $y_1 = x\cos[\ln(x)]$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

Solución:

Aplicamos el método de reducción de orden. Se tendrá que:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{\int \frac{x}{x^2}\mathrm{d}x} = x\cos[\ln(x)]\int \frac{1}{x^2\cos^2[\ln(x)]} x\,\mathrm{d}x \\ &= x\cos[\ln(x)]\int \frac{1}{x^2\cos^2[\ln(x)]} x\,\mathrm{d}x \\ &= x\cos[\ln(x)]\int \frac{\sec^2[\ln(x)]}{x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Claramente en la integral aparece una función, $f(x) = \ln(x)$, y su derivada multiplicando, $f'(x) = 1/x$, por lo que hacemos $u = \ln(x)$, de modo que:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x\cos[\ln(x)]\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= x\cos[\ln(x)]\tan u(x) \\ &= x\cos[\ln(x)]\tan[\ln(x)] \\ &= x\,\mathrm{sen}[\ln(x)] \end{aligned}$$

Ahora debemos determinar la solución particular mediante el método de variación de parámetros. Partimos escribiendo la ecuacion normalizada:

$$y''(x) - \frac{1}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y(x) = \frac{1}{x}$$

Proponemos:

$$y_p(x) = u_1(x)\,x\,\mathrm{sen}[\ln(x)] + u_2(x)\,x\cos[\ln(x)]$$

Calculamos el wronskiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(x) &= \begin{vmatrix} x\,\mathrm{sen}[\ln(x)] & x\cos[\ln(x)] \\ \mathrm{sen}[\ln(x)] + \cos[\ln(x)] & \cos[\ln(x)] - \mathrm{sen}[\ln(x)] \end{vmatrix} \\ &= x\,\mathrm{sen}[\ln(x)]\cos[\ln(x)] - x\,\mathrm{sen}^2[\ln(x)] \\ &\quad \cdots - x\,\mathrm{sen}[\ln(x)]\cos[\ln(x)] - x\cos^2[\ln(x)] \\ &= -x \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \frac{y_2(x) f(x)}{\mathcal{W}(x)} = \int \frac{\cos[\ln(x)]}{x}\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{sen}[\ln(x)] \end{aligned}$$

donde se hizo $u = \ln(x)$ para resolver la integral. De la misma forma,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int \frac{y_1(x) f(x)}{\mathcal{W}(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{\operatorname{sen}[\ln(x)]}{x}\mathrm{d}x \\ &= \cos[\ln(x)] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x\operatorname{sen}^2[\ln(x)] + x\cos^2[\ln(x)] \\ &= x \end{aligned}$$

Es decir, la solución general de la ecuación es:

$$\boxed{y(x) = c_1 x\cos[\ln(x)] + c_2 x\operatorname{sen}[\ln(x)] + x}.$$

$\square$

2.6. Aplicación: oscilaciones forzadas y resonancia

Consideramos una masa m sometida a la fuerza elástica de un resorte cuya posición de equilibrio es $x = 0$ y su constante k, a una fuerza de amortiguación con constante c y a una fuerza externa $F(t)$. La ecuación diferencial derivada de este modelo es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F(t) \longrightarrow \boxed{mx'' + cx' + kx = F(t)}$$

con $k, c \geq 0$ y $m > 0$.

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes. En este apartado haremos estudio de los diversos casos que se pueden dar a partir de esta ecuación diferencial.

El caso homogéneo. Corresponde al caso en que no están actuando fuerzas externas. Es decir, $F(t) \equiv 0$. En cualquier caso, conocer la solución del sistema homogéneo siempre será objeto de nuestro interés.

La ecuación homogénea tendrá la ecuación característica

$$mr^2 + cr + k = 0$$

Esta ecuación puede ser reescrita como

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} = 0$$

ya que $m \neq 0$. Consideremos diversos casos:

- $c = 0$, el **caso sin amortiguación**. El polinomio característico queda de la forma

$$\begin{aligned} r^2 + w^2 &= 0 \\ (r + \omega i)(r - \omega i) &= 0 \end{aligned}$$

  La solución general viene dada por

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$$

  Como c_1, c_2 son parámetros a determinar, podemos reescribir como:

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \omega t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \operatorname{sen} \omega t \right)$$

  Nótese que de esta forma

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} &= \cos \varphi \\ \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} &= \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

  ya que $\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \right)^2 = 1$. Luego,

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\cos \varphi \cos \omega t + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \omega t \right) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos \left(\omega t - \varphi \right)$$

  De esta forma, obtenemos una función mucho más fácil de analizar desde el punto de vista de su amplitud y fase.

- Consideremos ahora los casos $c \neq 0$. Es decir, en los que **sí hay amortiguación**. La ecuación caracteristica queda de la forma:

$$r^2 + \frac{c}{m} r + \omega^2 = 0$$

  Las soluciones de la ecuación cuadrática están dadas por

$$r = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\omega^2}}{2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\omega^2 m^2}}{2m}$$

  De aquí podemos distinguir tres casos:

  - El caso $c^2 - 4\omega^2 m^2 < 0$, conocido como el **caso subamortiguado**. Se tiene que

$$r = \frac{-c}{2m} \pm i \frac{\sqrt{4\omega^2 m^2 - c^2}}{2m}$$

Por lo tanto, la solución general está dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-c/2mt}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{4\omega^2m^2-c^2}}{2m}t\right)+c_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\omega^2m^2-c^2}}{2m}t\right)\right] \\ x(t) &= e^{-c/2mt}A\cos(\alpha t-\varphi) \end{aligned}$$

con $\alpha=\dfrac{\sqrt{4\omega^2m^2-c^2}}{2m}$.

Observamos que ahora la solución está acompañada de una función decreciente, $e^{-c/2mt}$. Estamos ante el producto de una función decreciente y convergente a cero cuando $t\to\infty$ por una acotada. Luego,

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$$

como podría esperarse de un sistema amortiguado.

- El caso $c^2-4\omega^2m^2>0$, conocido como el **caso sobreamortiguado**. Tenemos como raíces:

$$r=-\frac{c}{2m}\pm\frac{\sqrt{c^2-4\omega^2m^2}}{2m}$$

  Las llamaremos λ_1 y λ_2, con $\lambda_1<\lambda_2$. La solución general estará dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t} \\ &= e^{\lambda_1t}\left[c_1+c_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right] \end{aligned}$$

  El comportamiento (reflejado en la gráfica) dependerá de los valores de λ_1 y λ_2. Sin embargo, notar que no habrá oscilación, comparado con el caso anterior.

- El caso $c^2-4\omega^2m^2=0$, conocido como caso **críticamente amortiguado**. La solución general quedara dada por:

$$x(t)=e^{-c/2mt}\left(c_1+c_2t\right).$$

  En todos los casos con amortiguación

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0.$$

Caso particular no homogéneo: resonancia. Supongamos ahora un caso de especial interés, en que $F(t)=F_0\cos(\gamma t)$. La solución general estará dada por

$$x=x_p+x_h$$

El aniquilador de $F(t)$ corresponde a $(D^2+\gamma^2)$. Por lo tanto, una solución será de la forma

$$x_p=A\cos(\gamma t-\gamma_0)$$

y por lo tanto

$$x(t)=A\cos(\gamma t-\gamma_0)+x_h$$

Nótese el caso en que $c=0$ y $\gamma=\omega$. Se tiene que

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t-\gamma_0)+B\cos(\omega t-\varphi) \\ &= A\cos\omega t\cos\gamma_0+A\operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\gamma_0+B\cos\omega t\cos\varphi+B\operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\varphi \\ &= (A\cos\gamma_0+B\cos\varphi)\cos\omega t+(A\operatorname{sen}\gamma_0+B\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}\omega t \\ &= D\cos(\omega t-\theta_0) \end{aligned}$$

Es decir, ocurre el fenómeno de **resonancia**.

Este extenso resumen puede resultar complejo de memorizar, razón por la cual se aconseja analizar los fundamentos de cada uno de los casos y luego analizar problemas particulares, tal como se realizará a continuación.

P75 Determine la ecuación de movimiento para un sistema no amortiguado descrito por

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 9x = 2\cos(3t) \quad ; \quad x(0) = 1 \quad ; \quad x'(0) = 0$$

Describa (en palabras) el comportamiento del sistema cuando $t \to \infty$.

Solución:

Partimos resolviendo la ecuación homogénea, cuyo polinomio característico es:

$$r^2 + 9 = 0 \longrightarrow r = \pm 3i$$

Es decir,

$$x_h(t) = c_1\cos(3t) + c_2\operatorname{sen}(3t)$$

Ahora podemos resolver la solución particular tanto por coeficientes indeterminados o aniquiladores como por variación de parámetros. Por comodidad utilizaremos el segundo método, notando que $\cos(3t)$ queda aniquilada por D^2+9. De esta forma, para una solución y de la ecuación diferencial:

$$\left(D^2+9\right)x = 2\cos(3t) \longrightarrow \left(D^2+9\right)^2 x = 0$$

De aquí se deduce que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = (a+bt)\cos 3t + (c+dt)\operatorname{sen} 3t$$

Derivando dos veces:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (b+3c+3dt)\cos(3t) - (3a+d+3bt)\operatorname{sen}(3t) \\ x''(t) &= (6d-9a-9bt)\cos(3t) - (6b+9c+9dt)\operatorname{sen}(3t) \end{aligned}$$

Reemplazando y factorizando en los términos l.i.:

$$-6b\operatorname{sen}(3t) + 6d\cos(3t) = 2\cos(3t)$$

Es decir, a y c quedan indeterminados, $b=0$ y $d=1/3$. Entonces,

$$x_p(t) = \frac{1}{3}t\operatorname{sen}(3t)$$

Por lo tanto, la solución general viene dada por:

$$x(t) = \frac{1}{3}t\operatorname{sen}(3t) + c_1\cos(3t) + c_2\operatorname{sen}(3t)$$

Como $x(0) = 1$, entonces $c_1 = 1$. Derivando,

$$x'(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) + t\cos(3t) - 3c_1\operatorname{sen}(3t) + 3c_2\cos(3t)$$

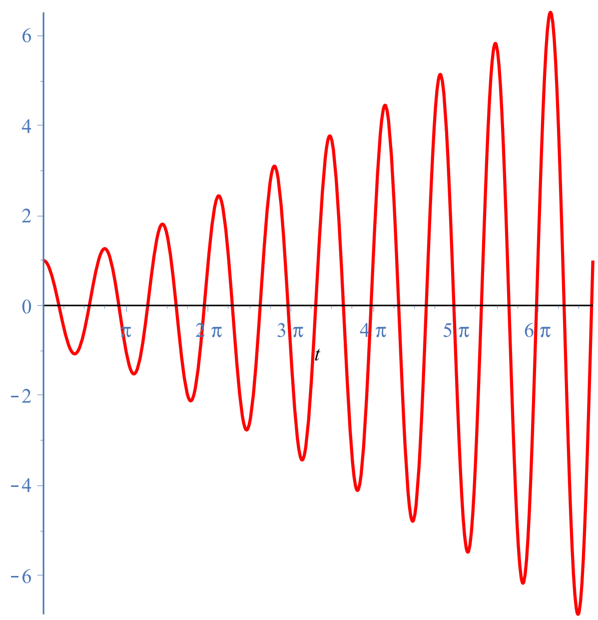
Como $x'(0) = 0$, entonces $3c_2 = 0 \longrightarrow c_2 = 0$. Finalmente,

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{3}t\operatorname{sen}(3t) + \cos(3t)}$$

Dado que $\operatorname{sen}(3t)$ y $\cos(3t)$ son funciones acotadas y t una función monótona creciente, se observa que:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$$

Este comportamiento es la clara manifestación del fenómeno de **resonancia**. En otras palabras: el sistema mantiene su oscilación a la frecuencia natural, pero su amplitud va aumentando de forma aproximadamente lineal, tal como se puede comprobar en la siguiente gráfica:



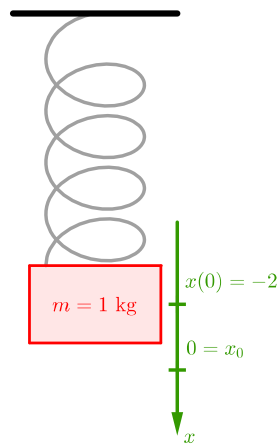
□

P76 Una masa de 1 kg. está sujeta a un resorte cuya constante es 9 N/m. El medio ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a 6 veces la velocidad instantánea. La masa se suelta desde un punto que está 2 m sobre la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de v_0 m/seg. Determinar los valores de v_0 de modo que posteriormente la masa pase por la posición de equilibrio.

(Las unidades están todas expresadas en el Sistema Internacional de Unidades)

Solución:

Partimos haciendo un diagrama de la situación:



Fijamos el eje x en el mismo sentido de la velocidad inicial (hacia abajo) por comodidad y bajo el mismo argumento lo ubicamos en el punto de equilibrio del resorte. Luego, $x\left(0\right) = -2$ y $x'\left(0\right) = v_0$.

Dado que no se indica, **no consideraremos la gravedad**. De esta forma, la ecuación de movimiento queda escrita como:

$$mx''\left(t\right) = -bx'\left(t\right) - kx$$

donde escribimos el término con $x'\left(t\right)$ restando pues se opone al signo de la velocidad, y el término de x con signo negativo pues cuando la posición es positiva (bajo el punto de equilibrio), la fuerza mueve el resorte hacia arriba, es decir, en el sentido negativo. Reemplazando con los parámetros obtenemos la ecuación:

$$x'' + 6x' + 9 = 0.$$

Para resolver esta ecuación escribimos la ecuación característica

$$r^2 + 6r + 9 = 0 \longrightarrow \left(r+3\right)^2 = 0$$

Entonces, la solución general viene dada por:

$$x\left(t\right) = \left(a + bt\right)e^{-3t}$$

Reemplazando en la condición inicial:

$$x\left(0\right) = a = -2$$

Derivando,

$$x'\left(t\right) = be^{-3t} - 3\left(a + bt\right)e^{-3t} \longrightarrow x'\left(0\right) = b - 3a = v_0 \longrightarrow b = v_0 - 6$$

De esta forma, la solución general queda expresada por:

$$x(t) = [(v_0 - 6)t - 2]\, e^{-3t}$$

Para que la masa pase nuevamente por la posición de equilibrio tenemos que imponer que para algún $\boxed{t > 0}$ se cumpla que $x(t) = 0$. Es decir, este t viene dado por:

$$(v_0 - 6)t - 2 = 0 \longrightarrow t = \frac{2}{v_0 - 6}$$

Como $t > 0$, imponemos que $\boxed{v_0 > 6}$, y concluimos así que esta es la condición buscada.

$\square$

P77 Un peso de 5 kg produce un estiramiento de 0.4 m en un resorte. Asuma también que hay una fuerza externa que en un tiempo t ejerce $5 \operatorname{sen}(\alpha t)$ N de manera uniforme (asuma $\alpha \neq 5$). Ahora consideremos el objeto en la posición de equilibrio y velocidad inicial de 10 m/s hacia abajo. Encuentre la función que modela el movimiento del sistema para $\alpha = 6$. Indique el período del movimiento en caso de que $\alpha = 10$ y $\alpha = 6$. **(Use $g = 10$)**

Solución:

A partir de la primera oración tenemos que 50 N producen un estiramiento de 0,4 m, i.e.

$$50 = 0{,}4k \longrightarrow k = 125$$

Modelando el problema de la misma forma que en la pregunta anterior tendremos la ecuación de movimiento:

$$mx''(t) = -kx(t) + mg + 5 \operatorname{sen}(\alpha t)$$

Reordenando y reemplazando con las constantes numéricas:

$$\begin{aligned} 5x'' + 125x &= 50 + 5 \operatorname{sen}(\alpha t) \\ x'' + 25x &= 10 + \operatorname{sen}(\alpha t) \end{aligned}$$

donde $x(0) = 0$ y $x'(0) = 10$, con todas las unidades en S.I. Ahora resolvemos la ecuación diferencial, partiendo por la ecuación característica:

$$r^2 + 25 = 0 \longrightarrow r = \pm 5i$$

Es decir,

$$x_h(t) = c_1 \cos(5t) + c_2 \operatorname{sen}(5t)$$

Proponemos como solución particular (considerando que $\alpha \neq 5$):

$$x_p(t) = a + b\cos(\alpha t) + c \operatorname{sen}(\alpha t)$$

Derivando dos veces:

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -\alpha b \operatorname{sen}(\alpha t) + \alpha c \cos(\alpha t) \\ x_p''(t) &= -\alpha^2 b \cos(\alpha t) - \alpha^2 c \operatorname{sen}(\alpha t) \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\left(25b - \alpha^2 b\right)\cos(\alpha t) + \left(25c - \alpha^2 c\right)\operatorname{sen}(\alpha t) + 25a = 10 + \operatorname{sen}(\alpha t)$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned} 25a &= 10 \longrightarrow a = \frac{2}{5} \\ \left(25 - \alpha^2\right) b &= 0 \longrightarrow b = 0 \\ \left(25 - \alpha^2\right) c &= 1 \longrightarrow c = \frac{1}{25 - \alpha^2} \end{aligned}$$

Es decir,

$$x_p(t) = \frac{2}{5} + \frac{1}{25 - \alpha^2}\operatorname{sen}(\alpha t)$$

La solución general viene dada entonces por:

$$x(t) = \frac{2}{5} + \frac{1}{25 - \alpha^2}\operatorname{sen}(\alpha t) + c_1 \cos(5t) + c_2 \operatorname{sen}(5t)$$

Reemplazando en $t = 0$:

$$x(0) = \frac{2}{5} + c_1 = 0 \longrightarrow \boxed{c_1 = -\frac{2}{5}}$$

Derivando:

$$x'(t) = \frac{\alpha}{25 - \alpha^2}\cos(\alpha t) - 5c_1 \operatorname{sen}(5t) + 5c_2 \cos(5t)$$

Reemplazando:

$$x'(0) = \frac{\alpha}{25 - \alpha^2} + 5c_2 = 10 \longrightarrow \boxed{c_2 = 2 - \frac{\alpha}{5\left(25 - \alpha^2\right)}}$$

Entonces la solución del P.V.I. es:

$$\boxed{x(t) = \frac{2}{5} + \frac{1}{25 - \alpha^2}\operatorname{sen}(\alpha t) - \frac{2}{5}\cos(5t) + \left[2 - \frac{\alpha}{5\left(25 - \alpha^2\right)}\right]\operatorname{sen}(5t)}$$

□

P78 [**Propuesto**] La amplitud de las oscilaciones periódicas forzadas estacionarias para el sistema

$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos\omega t$ está dada por

$$C(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + (c\omega)^2}}$$

(a) Si $c \geq c_{\text{cr}}/\sqrt{2}$ donde $c_{\text{cr}} = \sqrt{4km}$, demuestre que C disminuye establemente conforme ω se incrementa.

(b) Si $c < c_{\text{cr}}/\sqrt{2}$, muestre que C alcanza un valor máximo (resonancia práctica) cuando

$$\omega = \omega_m = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.7. Métodos de series de potencias

Una forma útil y válida de resolver ciertas ecuaciones diferenciales lineales de orden superior consiste en proponer una solución como serie de potencias:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

donde, por lo general, $x_0 = 0$ para la mayoría de casos prácticos. El problema se convierte en determinar una expresión explícita para a_k que puede ser luego reemplazada en la serie de potencias. Para algunas series, ya se conoce la expresión analítica de la función asociada a $y(x)$, y para las que no, se deja expresado el resultado como serie de potencias, lo cual ya puede considerarse suficiente para los propósitos del desarrollo de las preguntas.

La expresión para a_k puede ser obtenida reemplazando con la expresión en la ecuación diferencial (derivando las veces que sea necesario). Posteriormente, se agrupan términos para cada potencia de x^k e igualando potencias a ambos lados de la ecuación se obtienen los valores de los coeficientes asociados a x^k, los cuales establecen relaciones sobre la recursión buscada para a_k.

Debe tenerse en consideración que este método, a partir de las condiciones iniciales, genera inmediatamente la solución única analítica del problema, si esta existe. Asimismo, si se dispone de las n condiciones iniciales requeridas, pueden agruparse las expresiones de a_k en las diversas condiciones iniciales, obteniendo así las n soluciones linealmente independientes que la teoría indica que existen para las ecuaciones lineales, sean o no de coeficientes constantes.

Dado que los problemas son altamente dependientes de la estructura de la ecuación diferencial, revisaremos inmediatamente problemas de ejemplo:

P79 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, resuelva:

(a) $y' + \alpha y = 0$.

(b) $(1 - x^2)\, y'' + 2y = 0$.

(c) $y'' + xy' + y = 0$.

Solución:

(a) Haciendo uso de la solución propuesta:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

de modo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n = 0.$$

Cambiando de índice en la primera sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n = 0.$$

De esta forma, obtenemos una serie de potencias de x para distintos valores. Agrupando en cada una de las potencias:

$$\begin{aligned}
r = 0 \quad &\longrightarrow \quad a_1 + \alpha a_0 = 0 \longrightarrow a_1 = -\alpha a_0. \\
r = 1 \quad &\longrightarrow \quad 2a_2 + \alpha a_1 = 0 \longrightarrow a_2 = \frac{\alpha^2}{2} a_0. \\
r = 2 \quad &\longrightarrow \quad 3a_3 + \alpha a_2 = 0 \longrightarrow a_3 = \frac{\alpha^3}{3!} a_0. \\
&\ \ \vdots \\
r = k \quad &\longrightarrow \quad (k+1)\, a_{k+1} + \alpha a_k = 0.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$a_{k+1} = -\alpha \frac{a_k}{k+1} = (-1)^k \frac{\alpha^k}{k!} a_0.$$

Reemplazando en la expresión de la serie de potencias:

$$\boxed{y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\alpha x)^k}.$$

Esta no es más que la serie de potencias de $e^{-\alpha x}$, de modo que, tal como se puede comprobar por variables separables:

$$\boxed{y(x) = a_0 e^{-\alpha x}},$$

donde a_0 depende de la condición inicial del problema.

□

P80 Resuelva con serie de potencias centrada en $x_0 = 0$ el P.V.I.

$$xy'' + y' + xy = 0$$

con condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Solución:

Proponemos como solución:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Derivando,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}. \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k (k-1) x^{k-2}. \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando en la ecuación diferencial:

$$xy'' + y' + xy = x \sum_{k=2}^{\infty} a_k k (k-1) x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} + x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

De esta forma,

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k (k-1) x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0.$$

Para mantener el máximo orden posible, calculamos los términos para cada potencia de x^r:

$$\begin{aligned} r = 0 &\longrightarrow a_1 = 0 \\ r = 1 &\longrightarrow 2 \cdot 1 a_2 + 2a_2 + a_0 = 0. \\ r = 2 &\longrightarrow 3 \cdot 2 a_3 + 3a_3 + a_1 = 0. \\ r = 3 &\longrightarrow 4 \cdot 3 a_4 + 4a_4 + a_2 = 0. \\ r = 4 &\longrightarrow 5 \cdot 4 a_5 + 5a_5 + a_3 = 0. \\ r = 5 &\longrightarrow 6 \cdot 5 a_6 + 6a_6 + a_4 = 0. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Notando que $y(0) = a_0 = 1$ e $y'(0) = a_1 = 0$, reemplazamos y resolvemos:

$$\begin{aligned}
r = 0 &\longrightarrow a_1 = 0 \\
r = 1 &\longrightarrow 2 \cdot 1 a_2 + 2a_2 + a_0 = 0 \longrightarrow a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 1 + 2}. \\
r = 2 &\longrightarrow 3 \cdot 2 a_3 + 3a_3 + a_1 = 0 \longrightarrow a_3 = 0. \\
r = 3 &\longrightarrow 4 \cdot 3 a_4 + 4a_4 + a_2 = 0 \longrightarrow a_4 = \frac{1}{(4 \cdot 3 + 4)(2 \cdot 1 + 2)}. \\
r = 4 &\longrightarrow 5 \cdot 4 a_5 + 5a_5 + a_3 = 0 \longrightarrow a_5 = 0. \\
r = 5 &\longrightarrow 6 \cdot 5 a_6 + 6a_6 + a_4 = 0 \longrightarrow a_6 = -\frac{1}{(6 \cdot 5 + 6)(4 \cdot 3 + 4)(2 \cdot 1 + 2)}. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De esta forma, en general:

$$\begin{aligned}
a_{2k+1} &= 0. \\
a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{[2k(2k-1) + 2k][(2k-2)(2k-3) + (2k-2)] \cdots (2 \cdot 1 + 2)}, \\
&= \frac{(-1)^k}{(2k)^2 (2k-2)^2 (2k-4) \cdots (2 \cdot 1 + 2)}, \\
&= \frac{(-1)^k}{(2^2)^k (k!)^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, descartando todos los términos que se suman en la serie de potencias:

$$\boxed{y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}}.$$

$\square$

P81 Demuestre que para cualquier valor de λ en la ecuación diferencial

$$10y'' - \lambda x y' + 5\lambda y = 0$$

una solución y_1 de ella es un polinomio. Determine explícitamente esta solución y calcule el desarrollo en serie de una segunda solución y_2 linealmente independiente de y_1. **(Nota: debe explicitarse el término b_n de la serie de potencias explícitamente como función de n)**

Solución:

Proponemos solución de la forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

una serie centrada en el origen, ya que resulta la más sencilla de trabajar. De esta forma,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}. \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\sum_{k=2}^{\infty} 10k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 5\lambda a_k x^k = 0.$$

Con el propósito de mostrar un método distinto a la pregunta anterior, hagamos $j = k-2$ en la primera sumatoria para dejar todos los términos en torno a la potencia x^k:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 5\lambda a_k x^k = 0.$$

De esta forma, podemos iterar directamente para cada valor de k:

$$\begin{aligned} k = 0 &\longrightarrow 10 \cdot 2 \cdot 1 a_2 + 5\lambda a_0 = 0 \\ k = 1 &\longrightarrow 10 \cdot 3 \cdot 2 a_3 - \lambda a_1 + 5\lambda a_1 = 0. \\ k = 2 &\longrightarrow 10 \cdot 4 \cdot 3 a_4 - 2\lambda a_2 + 5\lambda a_2 = 0. \\ k = 3 &\longrightarrow 10 \cdot 5 \cdot 4 a_5 - 3\lambda a_3 + 5\lambda a_3 = 0. \\ &\vdots \\ k = j &\longrightarrow 10 \cdot (j+2) \cdot (j+1) a_{j+2} - j\lambda a_3 + 5\lambda a_3 = 0. \end{aligned}$$

Si hacemos $y(0) = a_0 = a$ e $y'(0) = a_1 = b$, entonces resolviendo las ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{5\lambda}{10\,(2\cdot 1)}a.\\
a_3 &= -\frac{(5-1)\,\lambda}{10\,(3\cdot 2)}b.\\
a_4 &= -\frac{(5-2)\,\lambda}{10\,(4\cdot 3)}a_2 = \frac{(5-2)\,(5-0)\,\lambda^2}{10^2\,(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}a.\\
a_5 &= -\frac{(5-3)\,\lambda}{10\,(5\cdot 4)}a_3 = \frac{(5-3)\,(5-1)\,\lambda^2}{10^2\,(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}b.\\
a_6 &= -\frac{(5-4)\,\lambda}{10\,(6\cdot 5)}a_4 = -\frac{(5-4)\,(5-2)\,(5-0)\,\lambda^3}{10^3\,(6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}a.\\
a_7 &= -\frac{(5-5)\,\lambda}{10\,(7\cdot 6)}a_5 = 0.\\
a_8 &= -\frac{(5-6)\,\lambda}{10\,(8\cdot 7)}a_6 = \frac{(5-6)\,(5-4)\,(5-2)\,(5-0)\,\lambda^4}{10^4\,(8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}a.\\
a_9 &= -\frac{(5-7)\,\lambda}{10\,(9\cdot 8)}a_7 = 0.\\
a_{10} &= -\frac{(5-8)\,\lambda}{10\,(10\cdot 9)}a_8 = -\frac{(5-8)\,(5-6)\,(5-4)\,(5-2)\,(5-0)\,\lambda^5}{10^5\,(10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}a.
\end{aligned}$$

Desde aquí en adelante el patrón se hace evidente. Para los términos dependientes de b, en algún momento todos los términos sucesivos se anulan. Factorizando todos los términos resultantes de b, obtenemos y_1:

$$\boxed{y_1\,(x) = x - \frac{(5-1)\,\lambda}{10\,(3\cdot 2)}x^3 + \frac{(5-3)\,(5-1)\,\lambda^2}{10^2\,(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}x^5 = x - \frac{4}{15}\lambda x^3 + \frac{\lambda^2}{1500}x^5}.$$

Es decir, efectivamente y_1 es un polinomio. Agrupando ahora los términos dependientes de a, obtenemos en este caso,

$$a_{2k} = (-1)^k \left(\frac{\lambda}{10}\right)^k \frac{5\,(5-2)\,(5-4)\cdots[5-(2k-2)]}{k!}.$$

En otras palabras,

$$\boxed{y_2\,(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\lambda}{10}\right)^k \frac{5\,(5-2)\,(5-4)\cdots[5-(2k-2)]}{k!}x^{2k}}.$$

Estas soluciones son claramente l.i., en cuanto la primera es un polinomio y la segunda una serie de potencias.

□

Cómo no finalizar esta sección con el problema corolario directo de lo anteriormente desarrollado:

la ecuación diferencial de Bessel, cuyo campo de aplicación es extremadamente amplio, pasando desde problemas con ecuaciones diferenciales parciales con simetría de borde cilíndrica hasta la descripción de la órbita lunar y problemas de análisis espectral de telecomunicaciones.

P82 ($\star$) Considere la ecuación diferencial de Bessel de orden n, dada por:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0.$$

Mediante una expansión en series de potencias (¡no derivando!), demuestre que una solución de esta ecuación diferencial es la función de Bessel de primera especie y orden n dada por:

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}.$$

Solución:

Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial de segundo orden, tendremos dos soluciones linealmente independientes. Construiremos la solución inicial utilizando series de potencias y aplicando el Teorema de Frobenius, dejando la segunda solución linealmente independientes propuesta al lector. La solución debe escribirse como:

$$R(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k. \tag{20}$$

Entonces, tenemos que:

$$xR'(x) = nx^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + x^n \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^k. \tag{21}$$

Por lo tanto,

$$x^2 R''(x) = n(n-1)\, x^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + 2nx^n \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^k + x^n \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\, x^k. \tag{22}$$

Asimismo, se tiene que:

$$x^2 R(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+2} = x^n \sum_{k=2}^{\infty} b_{k-2} x^k. \tag{23}$$

Reemplazando esto en la ecuación diferencial se tiene que:

$$\begin{aligned} x^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[n(n-1)\, b_k + 2nkb_k + k(k-1)\, b_k + nb_k + kb_k + b_{k-2} - n^2 b_k\right] x^k &= 0 \\ x^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(2nkb_k + k^2 b_k + b_{k-2}\right) x^k &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, b_k debe ser tal que:

$$k\left(k+2n\right)b_k+b_{k-2}=0. \tag{24}$$

Como la serie de potencias comienza en $k=0$, entonces $b_{-1}=0$ y por lo tanto:

$$b_1=-\frac{b_{-1}}{k\left(k+2n\right)}=0\longrightarrow b_{2k-1}=\frac{b_{2k-3}}{\left(2k-1\right)\left(2k-1+2n\right)}=0. \tag{25}$$

Para los números pares se sigue que:

$$b_{2k}=-\frac{b_{2k-2}}{4k\left(n+k\right)}. \tag{26}$$

Siguiendo inductivamente se puede probar que:

$$b_{2k}=\left(-1\right)^k\frac{b_0}{4^k k!\left(n+k\right)\left(n+k-1\right)\cdots\left(n+1\right)}. \tag{27}$$

¿Cómo escogemos b_0? En este caso, para garantizar la convergencia de la serie mediante el criterio del cociente, hacemos $b_0=1/2^n n!$, por lo que reemplazando en la expresión inicial:

$$R\left(x\right)=J_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k!\left(n+k\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{28}$$

Dado que deseamos considerar también los órdenes complejos (con partes real e imaginarias número reales), extendemos la definición de factoriales mediante la función Gamma[a], obteniendo así que:

$$\boxed{J_\nu\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(\nu+k+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}. \tag{29}$$

Observe que la evaluación puede hacerse incluso para n negativos. Se tiene que:

$$J_{-n}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(-n+k+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+k}}{\Gamma\left(n+k+1\right)\Gamma\left(k+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{30}$$

Es decir,

$$\boxed{J_{-n}\left(x\right)=\left(-1\right)^n J_n\left(x\right)}. \tag{31}$$

□

[a] $\Gamma\left(\nu\right)=\int_0^\infty t^{\nu-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, converge ssi. $\mathrm{Re}\left(\nu\right)>1$ y además $\Gamma\left(n+1\right)=n!$ si $n\in\mathbb{N}$.

2.8. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta matemática que simplifica de forma significativa la resolución de ecuaciones diferenciales lineales, en particular de coeficientes constantes.

A diferencia de una función real, que recibe un escalar y devuelve otro escalar, la transformada de Laplace recibe una función $f(t)$ o una modificación de esta y devuelve otra función $F(s)$. Al hacer esta transformación, no solo se devuelve otra función, si no que la representación simbólica del parámetro también adquiere otro significado. La letra t para f puede representar, por ejemplo, el tiempo. En cambio, en muchas aplicaciones la letra s es identificada como una frecuencia. Por esta razón se dice que al aplicar este tipo de transformadas se realiza un cambio de dominio, en el cual se representa la misma información de la función f, en otro espacio, en una forma similar a como se aplican las transformaciones lineales en espacios vectoriales.

2.8.1. Definición, transformada inversa y propiedades básicas

Una motivación adecuada de la transformada de Laplace requiere un trasfondo extenso de transformadas integrales, en particular de la transformada de Fourier. En este curso nos centraremos en la transformada de Laplace como un mero artilugio matemático que simplifica la resolución de ecuaciones diferenciales. Lo definiremos como se muestra a continuación:

Definición: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que:

- $f(t) = 0$ si $t < 0$.
- Existen constante C y m tales que $f(t) \leq Ce^{mt}$.

Se define su transformada de Laplace (unilateral) como la función $F(s)$ tal que:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} \mathrm{d}t.$$

Usaremos asimismo la siguiente notación para expresar la transformación:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s).$$

El conjunto de valores de s para los cuales la integral impropia converge se conoce como *región de convergencia*.

Cálculo de algunas transformadas. A partir de la definición anterior podemos calcular directamente algunas transformadas de Laplace.

Importante: Para las siguientes funciones estamos asumiendo implícitamente que $f(t) = 0$ para $t < 0$, lo cual en cualquier caso se vuelve irrelevante debido al dominio de integración de la función.

Entre ellas, es importante mencionar:

- Cero: Si $f\left(t\right)=0$, entonces evidentemente:

$$F\left(s\right)=0$$

 para todo s.

- Uno: Si $f\left(t\right)=1$, entonces:

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\mathrm{d}t=\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{e^{-sk}}{s}+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}$$

- Exponencial: Si $f\left(t\right)=e^{at}$, entonces:

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{(a-s)t}\mathrm{d}t$$

 Para que esta integral converja, es necesario que $a-s<0\longrightarrow s-a>0$. Luego, evaluando:

$$F(s)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{(a-s)k}}{a-s}-\frac{1}{a-s}\right)=\frac{1}{s-a}\quad ;\quad s>a$$

- Seno: Si $f(t)=\operatorname{sen}(kt)$, recordamos que:

$$\begin{aligned} e^{ikx} &= \cos(kx)+i\operatorname{sen}(kx)\\ e^{-ikx} &= \cos(kx)-i\operatorname{sen}(kx)\end{aligned}$$

 Entonces,

$$\operatorname{sen}(kt)=\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}$$

 Aplicando la transformación:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\} &= \frac{1}{2i}\left(\int_0^{\infty}e^{-st}e^{ikt}\mathrm{d}t-\int_0^{\infty}e^{\cdot-st}e^{-ikt}\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ik}-\frac{1}{s+ik}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{2ik}{s^2+k^2}\right)=\frac{k}{s^2+k^2}\quad ;\quad s>0\end{aligned}$$

- Coseno: Análogamente, si $f(t)=\cos(kt)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(t)\} &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty}e^{-st}e^{ikt}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}e^{-st}e^{-ikt}\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ik}+\frac{1}{s+ik}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+k^2}=\frac{s}{s^2+k^2}\quad ;\quad s>0\end{aligned}$$

- Seno hiperbólico: Si $f(t) = \operatorname{senh}(kt)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} e^{-st}e^{kt}\mathrm{d}t - \int_0^{\infty} e^{-st}e^{-kt}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2k}{s^2-k^2} = \frac{k}{s^2-k^2}
\end{aligned}$$

- Coseno hiperbólico: Si $f(t) = \cosh(kt)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} e^{-st}e^{kt}\mathrm{d}t - \int_0^{\infty} e^{-st}e^{-kt}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-k^2} = \frac{s}{s^2-k^2}
\end{aligned}$$

  En estos últimos dos casos deberá cumplirse que $s > k$ y $s > -k$. Considerando $k > 0$ (ya que es innecesario hacerlo para $k = 0$), entonces $s > k > 0$.

Transformada de la función potencia. Nos interesa determinar la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^r$ con $r \in \mathbb{R}$. El cálculo de esta transformada motiva nuestra definición de la función Gamma:

Definición: Se define la *función Gamma* para $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

Al respecto pueden formularse las siguientes propiedades importantes:

Proposición:

- $\Gamma(1) = 1$.
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(n+1) = n!$.

Demostración:

(1)

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \mathcal{L}\{1\}_{s=1} = 1 \blacksquare$$

(2)

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x \mathrm{d}t$$

Haciendo $\begin{cases} u = t^x & \longrightarrow \mathrm{d}u = xt^{x-1} \\ \mathrm{d}v = e^{-t} & \longrightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$, entonces:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= -e^{-t}t^x\Big|_0^{\infty} + x\int e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{k\to\infty} -ke^{-k} + x\Gamma(x) \\ &= x\Gamma(x) \; \blacksquare \end{aligned}$$

(3) Obsérvese que de (2):

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 1\Gamma(1) \\ &= n! \; \blacksquare \end{aligned}$$

Con esto en mente, consideremos la función $f(t) = t^r$ donde r es real y $r > -1$. Entonces,

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \int_0^{\infty} t^r e^{-st} \mathrm{d}t$$

Para que esto sea equivalente a la función Gamma, tenemos que "deshacernos" del término s que acompaña a t en el término exponencial. Para ello, hacemos $u = st \to \mathrm{d}u = s\,\mathrm{d}t$.

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \int_0^{\infty} \frac{u^r}{s^{r+1}} e^{-u}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$$

Si $r = n$ es un entero no negativo, entonces,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

En otro caso, habrá que realizar análisis con la función Gamma.

Observación: Muchos de los valores de Γ no pueden obtenerse de forma análitica. Sin embargo, cabe notar que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} \mathrm{d}t$$

Haciendo $u = t^{1/2} \longrightarrow u^2 = t$ y $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}t^{-1/2}$, entonces

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u \\ &= 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Propiedades básicas. A continuación se enuncian algunas propiedades básicas de la Transformada de Laplace, asumiendo que:

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \\ g(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) \end{aligned}$$

- Linealidad:
$$af(t) + bg(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aF(s) + bG(s)$$
- Desplazamiento en el tiempo:
$$f(t-a)\,u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as}F(s),$$
donde $u(t-a) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq a, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$ es una función que será estudiada más adelante.
- Desplazamiento en s:
$$e^{-at}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+a)$$

Cálculo de transformadas inversas. Dada una transformada de Laplace $F(s)$, será de nuestro interés para aplicaciones en resolución de ecuaciones diferenciales el cálculo de la función $f(t)$ que define dicha transformada. Los conocimientos matemáticos actualmente adquiridos impiden definir matemáticamante la transformada de Laplace inversa, razón por la cual bajo el supuesto de que esta transformación es inyectiva, determinaremos las transformadas inversas a partir de tablas.

En particular, conociendo las transformadas de las funciones polinomiales, exponenciales y trigonométricas puede determinarse con facilidad las funciones que estas representan, lo cual realizaremos en el siguiente problema:

P83 Calcule las transformadas inversas de las siguientes funciones en el dominio de Laplace:

(a) $G(s) = \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{2}{s^2-7} + \dfrac{4s}{s^2+2} + \dfrac{e^{-2s}}{s}$.

(b) $G(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2+2s-1}$.

(c) $G(s) = \dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$.

(d) $G(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s^2+4)}$.

Solución:

(a) Dado que la transformada de Laplace es una aplicación lineal, notamos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{G\left(s\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-7}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\}$$

Calculamos cada una de las transformadas inversas por separado y luego sumamos.

- En primer lugar, sabemos que:

$$t^n \longrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Entonces, haciendo $n = 2$ obtenemos que:

$$t^2 \longrightarrow \frac{2}{s^3}$$

Dividiendo por 2 a ambos lados:

$$\frac{t^2}{2} \longrightarrow \frac{1}{s^3}$$

- Ahora bien, notamos que:

$$\frac{2}{s^2-7} = \frac{1}{\sqrt{7}}\frac{1}{s-\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\frac{1}{s+\sqrt{7}}$$

Asimismo, notamos que:

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{7}t} &\longrightarrow \frac{1}{s-\sqrt{7}} \\ e^{-\sqrt{7}t} &\longrightarrow \frac{1}{s+\sqrt{7}} \end{aligned}$$

Es decir, por linealidad:

$$\frac{1}{\sqrt{7}}e^{\sqrt{7}t} - \frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\sqrt{7}t} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{7}}\frac{1}{s-\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\frac{1}{s+\sqrt{7}}$$

- Por tabla sabemos que

$$\cos\left(\sqrt{2}\,t\right) \longrightarrow \frac{s}{s^2+2}$$

Multiplicando por 4 a ambos lados:

$$4\cos\left(\sqrt{2}\,t\right) \longrightarrow \frac{4s}{s^2+2}$$

- Sabemos que:

$$u(t) \longrightarrow \frac{1}{s}$$

Luego, aplicando propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$$u(t-2) \longrightarrow \frac{e^{-2s}}{s}$$

De esta forma,

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{\sqrt{7}t} - \frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\sqrt{7}t} + 4\cos\left(\sqrt{2}\,t\right) + \frac{e^{-2s}}{s}}.$$

(b) Notamos que la multiplicación por e^{-2s} solo representa un retardo de dos unidades en el tiempo de la transformada inversa de

$$\frac{1}{s^2+2s-1}$$

De esta forma, la primera necesidad es determinar la transformada inversa de esta función. Observamos que:

$$s^2+2s-1=0 \longrightarrow s = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$$

Aplicando separación mediante fracciones parciales:

$$\frac{1}{s^2+2s-1} = \frac{a}{s+1+\sqrt{2}} + \frac{b}{s+1-\sqrt{2}}$$

Es decir,

$$a\left(s+1-\sqrt{2}\right) + b\left(s+1+\sqrt{2}\right) = 1$$

Haciendo $s=-1+\sqrt{2}$ obtenemos que:

$$2\sqrt{2}\,b = 1 \longrightarrow b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Haciendo $s=-1-\sqrt{2}$ obtenemos que:

$$-2\sqrt{2}\,a = 1 \longrightarrow a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Luego,

$$\frac{1}{s^2+2s-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{s+1+\sqrt{2}}\right)$$

Tomando transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s-1}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\left(-1+\sqrt{2}\right)t}-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\left(-1-\sqrt{2}\right)t}$$

Aplicando el atraso en 2 unidades concluimos finalmente que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s-1}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\left(-1+\sqrt{2}\right)(t-2)}u\left(t-2\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{\left(-1-\sqrt{2}\right)(t-2)}u\left(t-2\right)$$

(c) Aplicando el método de las fracciones parciales tendremos que:

$$\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}=\frac{a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}+\frac{ds+e}{s^2+1}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)} &= \frac{a\left(s^2+1\right)+bs\left(s^2+1\right)+cs^2\left(s^2+1\right)+s^3\left(ds+e\right)}{s^3\left(s^2+1\right)}\\ &= \frac{as^2+a+bs^3+bs+cs^4+cs^2+ds^4+es^3}{s^3\left(s^2+1\right)}\\ &= \frac{\left(c+d\right)s^4+\left(b+e\right)s^3+\left(a+c\right)s^2+bs+a}{s^3\left(s^2+1\right)}\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}c+d &= 0\\ b+e &= 0\\ a+c &= 0\\ b &= 0\\ a &= 1\end{aligned}$$

Esto implica que $c=-1$, $e=0$ y $d=1$. Así se establece que:

$$\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}=\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}\\ &= \frac{t^2}{2}+u\left(t\right)+\cos\left(t\right)\end{aligned}$$

(d) Aplicando el método de las fracciones parciales:

$$\frac{1}{\left(s-1\right)\left(s^2+4\right)}=\frac{a}{s-1}+\frac{bs+c}{s^2+4}=\frac{a\left(s^2+4\right)+\left(s-1\right)\left(bs+c\right)}{\left(s-1\right)\left(s^2+4\right)}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} a\left(s^2+4\right)+(s-1)(bs+c) &= 1 \\ \longleftrightarrow as^2+4a+bs^2+cs-bs-c &= 1 \\ \longleftrightarrow (a+b)s^2+(c-b)s+4a-c &= 1 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \\ c-b &= 0 \\ 4a-c &= 1 \end{aligned}$$

Como $c=b$ de la segunda ecuación, entonces $a=-c$. Se desprende que:

$$a=\frac{1}{5}\longrightarrow c=-\frac{1}{5}\longrightarrow b=-\frac{1}{5}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-1)(s^2+4)} &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{-s+1}{s^2+4}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s^2+4)}\right\}=\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}.$$

De esta forma,

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s^2+4)}\right\}=\frac{1}{5}e^t-\frac{1}{5}\cos(2t)+\frac{1}{20}\operatorname{sen}(2t)}$$

□

2.8.2. Propiedades

P84 (a) Demuestre que $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\}(s)=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

(b) Demuestre que si $f(t)$ tiene transformada de Laplace $F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)=-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s)$$

(c) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$.

Solución:

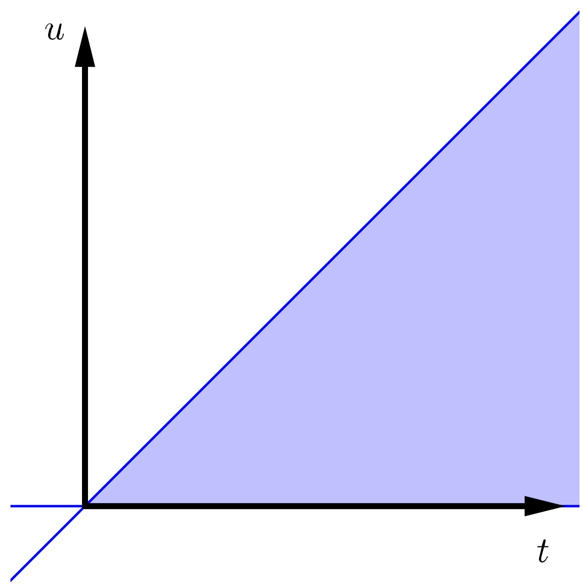
(a) Se tiene por definición que:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) e^{-st}\mathrm{d}t$$

En la primera forma tendremos que:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \int_0^\infty \int_0^t f(u)\,e^{-st}\mathrm{d}u\mathrm{d}t$$

Cambiando la región de integración tendremos que ahora se integrará primero en t y luego en u. Dibujamos la región de integración:



De aquí se observa que ahora t se moverá desde u hasta ∞ y u desde 0 hasta ∞. De esta forma,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \int_0^\infty \int_u^\infty f(u)\,e^{-st}\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

Ahora bien,

$$\int_0^\infty \int_u^\infty f(u)\,e^{-st}\mathrm{d}t\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u)\left(\int_u^\infty e^{-st}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

Calculamos la primitiva de la integral de adentro:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f\left(u\right)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_u^{\infty} \mathrm{d}u &= \int_0^{\infty} f\left(u\right)\frac{e^{-su}}{s}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{s}\int_0^{\infty} f\left(u\right)e^{-su}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Entonces,

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f\left(u\right)\mathrm{d}u\right\} = \frac{F\left(s\right)}{s}}.$$

(b) Observemos que:

$$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

Asumiendo alternancia entre la derivada y la integral:

$$-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) = -\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

Dado que f no depende de s, se tiene que:

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(s) &= -\int_0^{\infty} f(t)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}e^{-st}\right]\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{\infty} f\left(t\right)\left(-te^{-st}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} tf\left(t\right)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{L}\left\{tf\left(t\right)\right\}\end{aligned}$$

De esta forma se concluye lo pedido. ■

(c) Podemos aplicar las propiedades anteriores para determinar la transformada pedida. Partamos de una conocida:

$$\operatorname{sen}\left(t\right) \longrightarrow \frac{1}{s^2+1}$$

Observe que podemos aumentar el grado del factor cuadrático del denominador derivando en s, por lo que aplicamos la propiedad descubierta en (b):

$$t\operatorname{sen}\left(t\right) \longrightarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Ahora bien, para compensar la s que apareció en el numerador de la expresión, podemos dividir la expresión completa por s, lo que corresponde de acuerdo a (a), a integrar en el tiempo:

$$\int_0^t u \operatorname{sen}(u)\, du \longrightarrow \frac{1}{s}\frac{2s}{s^2+1} = \frac{2}{\left(s^2+1\right)^2}.$$

Evaluando la integral mediante integración por partes se sigue que:

$$\operatorname{sen} t - t\cos t \longrightarrow \frac{2}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Entonces, por linealidad:

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} t - t\cos t\right) \longrightarrow \frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}.$$

Concluimos así que:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} t - t\cos t\right)}$$

□

P85 Encuentre la siguiente transformada de Laplace inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s-3}{\left(s^2+2s+5\right)^2}\right\}$$

Solución:

Notamos que debido a que el grado del numerador es igual al grado del polinomio cuadrático repetido en el denominador, no se puede aplicar fracciones parciales directamente, si no que se debe realizar la separación respectiva. En consecuencia:

$$\frac{s^2+2s-3}{\left(s^2+2s+5\right)^2} = \frac{s^2+2s+5-8}{\left(s^2+2s+5\right)^2} = \frac{1}{s^2+2s+5} - \frac{8}{\left(s^2+2s+5\right)^2}$$

Aprovechando la linealidad de la transformada de Laplace, calcularemos cada una de las transformadas por separado. Dado que los denominadores son polinomios irreductibles, podemos notar que:

$$\frac{s^2+2s-3}{\left(s^2+2s+5\right)^2} = \underbrace{\frac{1}{(s+1)^2+4}}_{(1)} - \underbrace{\frac{8}{\left[(s+1)^2+4\right]^2}}_{(2)}$$

Entonces, calculamos por separado:

- Para (1), partimos del caso más sencillo notando que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2t &\longrightarrow \frac{2}{s^2+4} \\
e^{-t}\operatorname{sen} 2t &\longrightarrow \frac{2}{(s+1)^2+4} \\
\frac{e^{-t}}{2}\operatorname{sen} 2t &\longrightarrow \frac{1}{(s+1)^2+4}
\end{aligned}$$

- Para (2), aplicamos lo aprendido en la pregunta anterior:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2t &\longrightarrow \frac{2}{s^2+4} \\
t\operatorname{sen} 2t &\longrightarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{2}{s^2+4} = \frac{4s}{(s^2+4)^2} \\
\int_0^t u\operatorname{sen} 2u\,\mathrm{d}u &\longrightarrow \frac{1}{s}\frac{4s}{(s^2+4)^2} = \frac{4}{(s^2+4)^2}
\end{aligned}$$

  Evaluando la integral de la izquierda mediante integración por partes,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{2}t\cos(2t) &\longrightarrow \frac{4}{(s^2+4)^2} \\
t\cos(2t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) &\longrightarrow -\frac{8}{(s^2+4)^2}
\end{aligned}$$

  Desplazándonos en el dominio s:

$$e^{-t}\left[t\cos(2t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right] \longrightarrow -\frac{8}{(s^2+4)^2}$$

Sumando ambas soluciones concluimos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s-3}{(s^2+2s+5)^2}\right\} &= \frac{e^{-t}}{2}\operatorname{sen} 2t + e^{-t}\left[t\cos(2t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right] \\
&= te^{-t}\cos(2t)
\end{aligned}$$

$\square$

P86 Sea $f(t)$ una función con la propiedad $f(t+\omega) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y donde $\omega > 0$ es una constante. Demuestre que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1+e^{-\omega s}}\int_0^\omega f(t)\,e^{-st}\mathrm{d}t$$

Indicación: Escriba $\displaystyle\int_0^\infty = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\omega}^{(n+1)\omega}$.

Solución:

Por definición tendremos que:

$$\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \int_0^{\infty} f\left(t\right) e^{-st}\mathrm{d}t$$

Aplicando la indicación:

$$\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} f\left(t\right) e^{-st}\mathrm{d}t.$$

Para reducir el intervalo de integración a $[0,\omega]$ (tal como aparece en la expresión de la demostración) hacemos $u = t - n\omega$. De esta forma el extremo inferior se convierte a $u_0 = n\omega - n\omega = 0$ y el extremo superior a $u_1 = (n+1)\,\omega - n\omega = \omega$. Asimismo, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ y $t = u + n\omega$. Luego,

$$\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega} f\left(u + n\omega\right) e^{-s(u+n\omega)}\mathrm{d}u$$

Ahora bien, notamos que $f\left(u+\omega\right) = -f\left(u\right)$. Luego, $f\left(u+2\omega\right) = f\left(u\right)$, $f\left(u+3\omega\right) = -f\left(u\right)$ y en general $f\left(u+n\omega\right) = \left(-1\right)^n f\left(u\right)$ para $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Reemplazando con esto en la expresión y separando la exponencial:

$$\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(-1\right)^n f\left(u\right) e^{-su} e^{-sn\omega}\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n e^{-sn\omega} \int_0^{\omega} f\left(u\right) e^{-su}\mathrm{d}u$$

Observe que la integral no depende de la variable de sumación n, por lo que puede sacarse fuera de la sumatoria:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} &= \left[\int_0^{\omega} f\left(u\right) e^{-su}\mathrm{d}u\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n e^{-sn\omega}\right] \\
&= \left[\int_0^{\omega} f\left(u\right) e^{-su}\mathrm{d}u\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{-s\omega}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

El segundo término es claramente una serie geométrica de razón $-e^{-s\omega}$, por lo que obteniendo su fórmula explícita concluimos que:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \frac{1}{1+e^{-s\omega}} \int_0^{\omega} f\left(u\right) e^{-su}\mathrm{d}u}.$$

para $e^{-s\omega} < 1 \longrightarrow \omega s > 0 \longrightarrow s > 0$. De esta forma se concluye lo que se quería demostrar.

$\square$

2.8.3. Convolución

La **convolución** es una operación matemática que adquiere especial relevancia para analizar cierto tipo de ecuaciones diferenciales y en general los sistemas dinámicos. Asimismo, para la resolución de cierto tipo de problemas presta gran utilidad.

Partamos revisando su definición:

Definición: Sean f y g funciones, se define la *convolución* $f * g$ de ambas funciones como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Sin lugar a dudas las propiedad más importante de esta operación para nuestros propósitos radica en el comportamiento de la convolución de dos funciones en el dominio de Laplce:

Teorema: Sean $f(t)$ y $g(t)$ continuas a tramos para $t \geq 0$ y que son de orden exponencial. Entonces la transformada de Laplace de la convolución $f * g$ existe para $s > c$. Además,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Demostración:

Por definición,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-su} g(u)\,\mathrm{d}u \quad u = t-\tau \rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\tau}^\infty e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau)\,\mathrm{d}t \\
&= e^{s\tau} \int_{-\tau}^\infty e^{-st} g(t-\tau)\,\mathrm{d}t \\
&= e^{s\tau} \left(\int_{-\tau}^0 e^{-st} g(t-\tau)\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{-st} g(t-\tau)\,\mathrm{d}t \right)
\end{aligned}$$

Como la transformada de Laplace se evalúa para $t \geq 0$ podemos asignar valor cero a $f(t)$ y $g(t)$ cuando $t < 0$ (i.e. redefinir las funciones como funciones a tramos con los valores originales en $t \geq 0$ y y cero en $t < 0$). Con esto, podemos considerar que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} &= \underbrace{\mathcal{L}\{g(t)\}}_{G(s)} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) G(s)\, d\tau \\
&= \int_0^\infty f(\tau) \int_0^\infty e^{-st} g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Como estamos integrando en una región rectangular (primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$) y la función $h(t,\tau) = e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)$ es continua, se verifica el teorema de Fubini y luego se puede intertir el orden de integración:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\left(\int_0^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}\,(f*g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición: La convolución $f*g$ es conmutativa, i.e. $f*g = g*f$.

Demostración:

Notamos que:

$$\begin{aligned} (f*g)(t) &= \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad u = t-\tau \to \mathrm{d}u = -\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_t^0 g(u)\,f(t-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^t g(u)\,f(t-u)\,\mathrm{d}u \\ &= (g*f)(t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observación: Se puede determinar la transformada inversa de $F(s)\cdot G(s)$ considerando que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\}\} \\ &= (f*g)(t) \\ &= \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Aplicando estas propiedades podemos revisar los siguientes problemas:

P87 Determine una función continua f de tipo exponencial (es decir $|f(t)| \leq Ce^{mt}$ para todo t, con ciertas constantes C, m) verificando la siguiente igualdad

$$f(t) + (f*f)(t) + (f*f*f)(t) + \cdots + \underbrace{(f*\cdots*f)}_{k \text{ veces}}(t) + \cdots = \operatorname{sen} t$$

Solución:

Dado que la función es continua de tipo exponencial, su transformada de Laplace existe, y la denotaremos por $F(s)$. Llevando al dominio de Laplace la ecuación del enunciado aplicando la propiedad de convolución obtenemos que:

$$F(s) + F^2(s) + F^3(s) + \cdots + F^k(s) + \cdots = \frac{1}{s^2+1}$$

Escribiendo el lado izquierdo como sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [F(s)]^k = \frac{1}{s^2+1}$$

Asumiendo que $|F(s)| \leq 1$, entonces la sumatoria es una serie geométrica que converge a $F(s)/[1-F(s)]$ con lo cual:

$$\frac{F(s)}{1-F(s)} = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow s^2F(s) + F(s) = 1 - F(s)$$

Es decir,

$$\left(s^2+2\right) F(s) = 1 \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{s^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

Finalmente,

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\, t\right)}$$

□

P88 Determine una función $f(t)$ tal que:

$$1 + t = \int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{t-u}} \mathrm{d}u.$$

Solución:

Partimos observando que el lado derecho de la ecuación es una convolución entre $f(t)$ y la función $\sqrt{t}$. En otras palabras,

$$1 + t = \left(f * \frac{1}{\sqrt{t}}\right)(t)$$

Resolver f por inspección o bien en el dominio temporal puede resultar complicado, razón por la cual lo intentamos en el dominio de Laplace. Para ello, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, y esta deberá conservarse:

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow \frac{1}{s} \\ t &\longrightarrow \frac{1}{s^2} \\ f(t) &\longrightarrow F(s) \\ \frac{1}{\sqrt{t}} &\longrightarrow \left.\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}\right|_{r=-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} = F(s)\,\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}$$

De aquí podemos despejar $F(s)$ algebraicamente y aplicar transformada inversa:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{s^{1/2}} + \frac{1}{s^{3/2}}\right)$$

Notamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}} &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} \\ \sqrt{t} &\longrightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{3/2}} \\ \therefore 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} &\longrightarrow \frac{1}{s^{3/2}} \end{aligned}$$

donde se calculó $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Concluimos finalmente que:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{s^{1/2}} + \frac{1}{s^{3/2}}\right)$$

□

P89 [**Propuesto**] Aplique el teorema de convolución para mostrar que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)\sqrt{s}}\right\} = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

2.8.4. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales

Dada una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

es de nuestro interés resolver dicho problema mediante la transformada de Laplace. Multiplicando ambos lados de la ecuación por e^{-st}:

$$a_n y^{(n)} e^{-st} + a_{n-1} y^{(n-1)} e^{-st} + \cdots + a_1 y' e^{-st} + a_0 y e^{-st} = f\left(t\right) e^{-st}$$

Integrando de 0 a ∞ y aprovechando la linealidad de la integral:

$$a_n \int_0^{\infty} y^{(n)} e^{-st} \mathrm{d}t + a_{n-1} \int_0^{\infty} y^{(n-1)} e^{-st} \mathrm{d}t + \cdots + a_1 \int_0^{\infty} y' e^{-st} \mathrm{d}t + a_0 \int_0^{\infty} y e^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f\left(t\right) e^{-st} \mathrm{d}t$$

Se observan claramente las transformadas de Laplace respectivas:

$$a_n \mathcal{L}\left\{y^{(n)}\right\} + a_{n-1} \mathcal{L}\left\{y^{(n-1)}\right\} + \cdots + a_1 \mathcal{L}\left\{y'\right\} + a_0 \mathcal{L}\left\{y\right\} = \mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\}.$$

Aquí se hace inmediato que puede resultar útil expresar la transformada de Laplace de la derivada $k-$ésima de y en términos de $Y(s)$. Esto motiva el siguiente teorema:

Teorema: Sea $f(t)$ continua, suave a tramos (derivada continua a tramos) y tal que su transformada de Laplace existe. Entonces, $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > c$ y

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Demostración:

Observamos que

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'\left(t\right) \mathrm{d}t$$

Haciendo $\begin{cases} u = e^{-st} & \rightarrow \mathrm{d}u = -se^{-st}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = f'(t) & \rightarrow v = f(t) \end{cases}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \lim_{k\to\infty} \left(e^{-sk} f(k) - f(0)\right) + \int_0^{\infty} se^{-st} f\left(t\right) \mathrm{d}t \\ &= sF(s) - f(0) \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario: Análogamente:

- $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
- $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$

Demostración:

(1) Sea $g(t) = f'(t)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \\ &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s\left(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right) - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Para demostrar (2) se procede inductivamente por analogía. ■

A partir de este corolario se observa que se puede tomar la transformada de Laplace a ambos lados, aplicar la propiedad de la derivada. Se generará una ecuación algebraica para $Y(s)$ que puede despejarse fácilmente. Luego, a esta expresión se le aplica la transformada inversa y se obtendrá la solución completa de la ecuación diferencial, tomando en cuenta también las condiciones iniciales.

Revisaremos los siguientes problemas para ejemplificar esta situación:

P90 Use la transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $y' - 5y = 0$, $y(0) = 2$.

(b) $y' + y = \operatorname{sen} 2t$, $y(0) = 1$.

(c) $y'' - y' - 2y = 4x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

(d) $y'' - 2y' + y = f(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, donde f es una función que posee transformada de Laplace.

Solución:

(a) Llevando al dominio de Laplace:

$$sY(s) - y(0) - 5Y(s) = 0$$

Es decir,

$$(s-5)\,Y(s) = 2 \longrightarrow Y(s) = \frac{2}{s-5}$$

Volviendo al tiempo, tomando transformada inversa:

$$\boxed{y(t) = 2e^{5t}}.$$

(b) Procediendo de forma análoga:

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (s+1)\,Y(s) &= \frac{2}{s^2+4} + 1 \\ \longrightarrow Y(s) &= \frac{2}{(s+1)(s^2+4)} + \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Aplicando fracciones parciales en el primer término:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{7}{5}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\frac{s-1}{s^2+4} \\ &= \frac{7}{5}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{5}\frac{2}{s^2+4} \end{aligned}$$

Volviendo al dominio temporal:

$$\boxed{y(t) = \frac{7}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2t)}.$$

(c) Siguiendo los mismos pasos seguidos en problemas anteriores:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - sY(s) + y(0) - 2Y(s) = \frac{8}{s^3}$$

Reemplazando en las condiciones iniciales y reagrupando términos:

$$\left(s^2 - s - 2\right)Y(s) = s + 3 + \frac{8}{s^3}$$

Es decir,

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s-2)(s-1)} + \frac{8}{s^3(s-2)(s-1)}.$$

Aplicando fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{6}{s-2} - \frac{12}{s-1} + \frac{6}{s^2} + \frac{7}{s} + \frac{4}{s^3}.$$

Volviendo al dominio temporal:

$$\boxed{y(t) = 6e^{2t} - 12e^t + 6t + 7 + 2s^2}.$$

(d) Llevando al dominio de Laplace y reemplazando con las condiciones iniciales nulas:

$$\left(s^2 - 2s + 1\right)Y(s) = F(s) \longrightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{(s-1)^2}$$

Observamos que existe la multiplicación de $F(s)$ con $(s-1)^{-2}$, por lo que al devolverse al tiempo el resultado será la convolución de ambas funciones. Notando que:

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow \frac{1}{s^2} \\ te^t &\longrightarrow \frac{1}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{y(t) = f * te^t = \int_0^t f(t-u)\,ue^u \mathrm{d}u}.$$

$\square$

P91 (a) Resolver con transformada de Laplace el PVI:

$$y'' + 4y = 16x \quad ; \quad y(0) = 3 \quad ; \quad y'(0) = -6.$$

(b) Resolver utilizando transformada de Laplace:

$$y'' + 4y' = \cos(t-3) + 4t \quad ; \quad y(3) = 0 \quad ; \quad y'(3) = 7.$$

Solución:

(a) Llevando al dominio de Laplace se tendrá que:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \frac{32}{s^2}$$

Reemplazando con las condiciones iniciales y factorizando:

$$\left(s^2+4\right) Y(s) = 3s - 6 + \frac{32}{s^2}$$

Es decir,

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2+4} - 3\frac{2}{s^2+4} + \frac{32}{s^2\left(s^2+4\right)}.$$

Devolver los dos primeros términos al dominio temporal resulta sencillo. Para el segundo, requerimos aplicar fracciones parciales:

$$\frac{32}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{cs+d}{s^2+4}$$

Aplicando el método ya conocido obtenemos que:

$$\frac{32}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{8}{s^2} - \frac{8}{s^2+4}$$

De esta forma,

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2+4} - 7\frac{2}{s^2+4} + \frac{8}{s^2}$$

Volviendo al dominio temporal:

$$\boxed{y(t) = 3\cos(2t) - 7\,\mathrm{sen}\,(2t) + 8t}.$$

(b) Observamos que esta ecuación presenta una dificultad: la condición inicial no está centrada en cero como requiere el teorema de la derivada. Por esta razón, lo primero que debemos hacer es desplazar toda la ecuación diferencial al origen, lo que se traduce en adelantarla. De esta forma, hagamos:

$$u = t - 3 \longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$$

De esta forma, la ecuación diferencial se reescribe como:

$$y''(u) + y'(u) = \cos(u) + 4(u+3) \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(3) = 7.$$

Ahora sí podemos llevar al dominio de Laplace:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2}$$

Reemplazando en las condiciones iniciales y reagrupando términos:

$$\left(s^2+s\right)Y(s) = 7 + \frac{s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2}.$$

Es decir,

$$Y(s) = \frac{7}{s(s+1)} + \frac{s}{(s^2+1)(s+1)} + \frac{4}{s^3(s+1)}.$$

Aplicando el ya conocido método de las fracciones parciales se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{s(s+1)} &= \frac{7}{s} - \frac{7}{s+1} \\
\frac{s}{(s^2+1)(s+1)} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} \\
\frac{4}{s^3(s+1)} &= -\frac{4}{s^2} - \frac{4}{s+1} + \frac{4}{s} + \frac{4}{s^3}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$Y(s) = \frac{11}{s} - \frac{23}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} - \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s^3}$$

Volviendo al tiempo u:

$$y(u) = 11 - \frac{23}{2}e^{-u} + \frac{1}{2}\cos(u) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u) - 4u + 2u^2$$

Haciendo $u = t-3$ concluimos que:

$$\boxed{y(t) = 11 - \frac{23}{2}e^{-(t-3)} + \frac{1}{2}\cos(t-3) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t-3) - 4(t-3) + 2(t-3)^2}.$$

□

P92 Encuentre la transformada de Laplace de la solución de la ecuación diferencial

$$ty'' + y' + ty = 0$$

que también satisface $y(0) = 0$.

Solución:

Para resolver esta ecuación mediante la transformada de Laplace tendremos que aplicar la propiedad de derivación en s vista en un problema anterior. En efecto, sabemos que:

$$\begin{aligned} ty\left(t\right) &\longrightarrow -\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} \\ y'\left(t\right) &\longrightarrow sY\left(s\right) - y\left(0\right) \\ y''\left(t\right) &\longrightarrow s^2 Y\left(s\right) - sy\left(0\right) - y'\left(0\right) \\ ty''\left(t\right) &\longrightarrow 2sY\left(s\right) + s^2\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} - y\left(0\right) \end{aligned}$$

De esta forma, reemplazando en la ecuación junto a las condiciones iniciales:

$$\left(s^2-1\right)\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} + 3sY\left(s\right) = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} + \frac{3s}{s^2-1}Y\left(s\right) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden para $Y\left(s\right)$ que puede resolverse mediante factor integrante. En efecto, aplicamos:

$$\mu\left(s\right) = \exp\left[\int \frac{3s}{s^2-1}\mathrm{d}s\right] = \exp\left[\frac{3}{2}\log\left(s^2-1\right)\right] = \left(s^2-1\right)^{3/2}$$

De esta forma,

$$\left[\left(s^2-1\right)^{3/2} Y\left(s\right)\right]' = 0 \longrightarrow \left(s^2-1\right)^{3/2} Y\left(s\right) = c$$

Luego, concluimos así que:

$$\boxed{Y\left(s\right) = \frac{c}{\left(s^2-1\right)^{3/2}}},$$

donde c puede tomar cualquier valor a partir de la información proporcionada.

□

Falta contenido aquí. Esto se encuentra en construcción.

3. Sistemas de ecuaciones diferenciales

3.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Muchos fenómenos diferenciales físicos (mecánicos, elétricos, etc.) o matemáticos (e.g. dinámicas poblacionales) involucran o requieren la determinación de dos o más funciones que satisfacen ciertos modelos variantes en el tiempo o de parámetros de naturaleza similar.

Para dichos fenómenos se hace necesario el análisis y/o resolución dichos sistemas, el cual es el motivo de desarrollo de este capítulo. En particular, se estudiarán los sistemas diferenciales lineales de primero orden pues:

- Al igual que ecuaciones diferenciales de orden superior, sistemas de orden superior pueden ser reducidos a ecuaciones de primer orden.
- Sistemas no lineales pueden ser linealizados mediante una expansión de Taylor de orden uno y su comportamiento estudiado en torno al punto de linealización. Problemas que requieran soluciones exactas pueden ser estudiados de forma numérica.
- La resolución de sistemas lineales puede realizarse de forma fácil (aunque con gran cantidad de cálculos de por medio) de forma analítica.

Finalmente, se revisará el análisis cualitativo de sistemas autónomos de forma similar a como se hizo en el primer capítulo. Dichos resultados permitirán el estudio de sistemas no lineales que no pueden ser resueltos de forma analítica, pero cuyo comportamiento sí puede ser analizado de forma sistemática y general.

3.1.1. Conceptos básicos

Previo al desarrollo de la teoría general, debe realizarse una extensión de conceptos matemáticos que serán utilizados en esta sección, partiendo por la definición de derivadas en funciones vectoriales y matriciales.

Definición: Se definen la derivada de una función vectorial y una función matricial como:

$$\mathbf{x}'(t) \triangleq \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{A}'(t) \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}A_{1,1}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}A_{1,n}}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}A_{n,1}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}A_{n,n}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}.$$

Pueden deducirse como corolario (y ejercicio propuesto), propiedades básicas como derivación de combinaciones lineales y composiciones de funciones[1].

[1] E.g. demuestre que $(\mathbf{Af})' = \mathbf{A}'\mathbf{f} + \mathbf{A}\mathbf{f}'$, siendo $\mathbf{A}$ función matricial y $\mathbf{f}$ función vectorial.

Posteriormente, puede definirse un sistema lineal:

Definición: Se define un *sistema lineal de primer orden* como aquel sistema de la forma:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathcal{T}\{\mathbf{x}(t)\} + \mathbf{f}(t),$$

donde $\mathcal{T}$ es una transformación lineal y $\mathbf{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función vectorial.

La teoría del Álgebra Lineal sugiere en consecuencia que $\mathcal{T}$ queda representado por una matriz de transformación, i.e.

$$\mathcal{T}\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

en particular una matriz de $n \times n$ en el caso de interés.

En un análogo a los conceptos estudiados para sistemas de orden superior, puede desarrollarse una teoría análoga para sistemas lineales:

Proposición: Sea el sistema,

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t).$$

Si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ son soluciones del sistema y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ un vector, entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{n-1} & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \mathbf{c}$$

también es solución.

Asimismo, puede desarrollarse una teoría de dependencia lineal:

Definición: Para un sistema lineal de primer orden y solución vectorial de n componentes se definen los siguientes conceptos:

- *Dependencia lineal*: Un conjunto de funciones vectoriales se dice *linealmente dependiente* si existen constantes $c_1, \ldots, c_n$ no nulas tales que

  $$c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) = 0$$

  para todo t. En caso contrario, se dicen *linealmente independientes*.

- Se define el *Wronskiano* como:

  $$\mathcal{W}(\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}) \stackrel{\triangle}{=} \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{n-1} & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}\right).$$

  Si siempre es distinto de cero, se garantiza independencia lineal.

En consecuencia, si el conjunto $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ es linealmente inepependiente para la ecuación homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, entonces allí existen números $\{c_1, \ldots, c_n\}$ tales que:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t).$$

Definiendo $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{n-1} & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$, entonces:

$$\mathbf{c} = \mathbf{X}^{-1}(a)\,\mathbf{x}(a)\,,$$

siendo $\mathbf{X}$ invertible pues los vectores serán siempre l.i., en particular para $t = a$. En efecto, definiendo $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{n-1} & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$, entonces:

$$\mathbf{c} = \mathbf{X}^{-1}(a)\,\mathbf{x}(a)\,,$$

siendo $\mathbf{X}$ invertible pues los vectores serán siempre l.i., en particular para $t = a$.

Finalmente, siguiendo los análogos ya estudiados para sistemas de ecuaciones lineales en Álgebra Lineal y ecuaciones diferenciales lineales de orden superior en el capítulo anterior, se concluye un resultado similar para resultados de esta naturaleza:

Proposición: Si $\mathbf{x}_p$ es solución del sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, entonces cualquier otra solución $\mathbf{x}(t)$ del problema verificará que $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ es solución del problema homogéneo.

Demostración:

Se cumplirá que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)\,, \\ \mathbf{x}_p' &= \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{f}(t)\,. \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones y aplicando propiedades de linealidad:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)' = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$$

Por lo tanto, $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ es solución del problema homogéneo asociado. ■

Se deduce entonces que cualquier solución homogénea puede ser expresada como la resta de dos soluciones particulares, una arbitraria y otra conocida i.e. $\mathbf{x}_h = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p$. Se sigue entonces que si se conoce $\mathbf{x}_p$, cualquier solución general de la ecuación no homogénea puede escribirse como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p.$$

Es decir,

- Determinamos la solución asociada al sistema homogéneo (haciendo $\mathbf{f} \equiv 0$) y desarrollamos una teoría para resolver estos sistemas.
- Determinamos un método para resolver al menos una solución particular.
- Expresamos la solución general como la suma de las soluciones homogéneas encontradas y las soluciones particulares.

En cada una de las secciones siguientes se desarrollarán dichos métodos. Por ahora, estos desarrollos teóricos permiten desarrollar los problemas expuestos a continuación.

P93 (a) Sabiendo que $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} x' & = tx + (1 - t^2)\, y \\ y' & = x - ty \end{cases}$$

demuestre que la función

$$\mathcal{W}(t) = \begin{vmatrix} t & x(t) \\ 1 & y(t) \end{vmatrix}$$

es constante. Para cualquier otra solución $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, deduzca que $x(t) = x(0) + ty(t)$.

(b) Use lo anterior para encontrar la única solución del sistema dado, que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Solución:

(a) Observe que $\mathcal{W}(t)$ es el Wronskiano de la solución conocida junto a otra desconocida. Por lo tanto, estamos probando que en efecto existe otra solución l.i. con la primera. Expandiendo:

$$\mathcal{W}(t) = ty(t) - x(t).$$

Podemos probar que el Wronskiano es constante si su derivada es cero. Derivando:

$$\mathcal{W}'(t) = y(t) + ty'(t) - x'(t).$$

Reemplazando con los valores de x' e y' según el sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'(t) &= y + t(x - ty) - tx - \left(1 - t^2\right) y \\ &= y + tx - t^2 y - tx - y + t^2 y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función es constante. Es decir,

$$\boxed{\mathcal{W}(t) = ty(t) - x(t) = c},$$

con $c \in \mathbb{R}$. Usaremos esto para demostrar la segunda parte de esta pregunta. Como el Wronskiano debe ser constante, en particular lo es para $t = 0$:

$$\mathcal{W}(0) = -x(0) = c.$$

Es decir,

$$ty(t) - x(t) = c = -x(0).$$

Reordenando términos,

$$\boxed{x(t) = x(0) + ty(t)}.$$

(b) Dicha solución no puede ser aquella señalada como solución en (a), pues no se pueden hacer coincidir las segundas componentes para ningún valor de t. Reemplazando con el valor de x en y':

$$y' = x(0) + ty - ty = x(0) = 1.$$

De esta forma,

$$y(t) = t + c,$$

con c a determinar según las condiciones iniciales. Como $y(0) = 0$, entonces $c = 0$ y por lo tanto $y(t) = t$. Según la fórmula de (a), entonces:

$$x(t) = x(0) + ty(t) \longrightarrow x(t) = 1 + t^2.$$

Es decir, la solución buscada es:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^2 \\ t \end{pmatrix}}.$$

□

3.1.2. Sistemas homogéneos: método de los valores propios

Es de interés en esta sección la resolución de sistemas de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

puesto que constituyen la solución homogénea de un problema lineal de coeficientes constantes. Desarrollaremos un método de forma deductiva para resolver este tipo de problemas de forma sistemática, tal como se ha logrado con otros problemas a lo largo del curso.

Caso base: matriz diagonal. El análisis de toda esta sección parte considerando el caso más sencillo, en el cual $\mathbf{A} = \mathbf{D}$ con $\mathbf{D}$ matriz diagonal. La resolución no resulta complicada pues se hace por integración directa. En efecto, si $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal, entonces para cada componente $i-$ésima del sistema se cumple:

$$x_i'(t) = d_i x_i(t).$$

Observe que en cada componente no aparecen componentes del sistema que no sean la componente $i-$ésima. Esta es una ecuación que ya fue resuelta mediante separabilidad en el primer capítulo del curso, y se realiza por integración directa:

$$x_i(t) = c_i e^{d_i t}.$$

Posteriormente, descomponiendo el vector resultante en cada una de sus componentes, obtenemos:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \hat{\mathbf{e}}_1 e^{d_1 t} + \cdots + c_n \hat{\mathbf{e}}_n e^{d_n t}.$$

Dada la independencia lineal de las funciones exponenciales, quedan determinadas las n soluciones generales de este caso.

Sin embargo, el caso de matriz diagonal resulta ser un caso particular de todas las matrices de $n \times n$ existentes, por lo cual esta teoría por sí sola resulta insuficiente. Sin embargo, la teoría del Álgebra Lineal establece que ciertas matrices pueden ser expresadas como el producto de tres matrices, una de las cuales es diagonal. Este procedimiento se conoce como diagonalización y es aplicable a funciones diagonalizables, valga la redundancia.

Caso directo: matriz diagonalizable. Si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, entonces existen matrices $\mathbf{V}$ y $\mathbf{D}$ tales que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1} \longrightarrow \mathbf{x}'(t) = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t),$$

donde $\mathbf{V}$ contiene en sus columnas vectores propios de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ contiene en su diagonal todos los valores propios de $\mathbf{A}$[2]. Haciendo $\mathbf{y} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$ se sigue que:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}'(t) = \mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t) \longrightarrow \mathbf{y}'(t) = \mathbf{D}\mathbf{y}(t).$$

Sin embargo, este sistema tiene una matriz diagonal, y acaba de ser resuelto. En efecto,

$$\mathbf{y}(t) = c_1\hat{\mathbf{e}}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\hat{\mathbf{e}}_n e^{\lambda_n t}.$$

Observe que cada coeficiente dentro de cada función exponencial corresponde al valor propio asociado, pues cada uno corresponde al término contenido en la matriz $\mathbf{D}$. Luego, multiplicando esta solución por $\mathbf{V}$ a ambos lados obtenemos $\mathbf{x}$, pero $\mathbf{V}\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{v}_i$, donde $\mathbf{v}_i$ es el vector propio asociado al valor propio λ_i, es decir:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}}.$$

Es decir, la resolución de sistemas homogéneos en que $\mathbf{A}$ es diagonalizable puede resumirse en el siguiente procedimiento:

- Calcular los valores propios de la matriz.
- Calcular el o los vectores propios asociados a cada valor propio.
- Escribir la solución general.

Valores y vectores propios complejos. Observe que si $\mathbf{A}$ tiene un valor propio complejo $\lambda_i = a + bi$, entonces $\lambda_{i+1} = a - bi$ también es valor propio, debido a que la ecuación característica de $\mathbf{A}$ tiene coeficientes reales. Luego, si $\mathbf{v}_i = \mathbf{p} + i\mathbf{q}$ es la solución asociada al valor propio $\lambda_i = a + bi$, entonces por definición se cumple:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i.$$

Si conjugamos este sistema, la matriz de coeficientes reales $\mathbf{A}$ permanece intacta y por lo tanto, aplicando propiedades de conjugación de números complejos componente a componente:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\lambda}_i\bar{\mathbf{v}}_i.$$

Es decir, $\bar{\mathbf{v}}_i$ es un vector propio asociado a $\bar{\lambda}_i = \lambda_{i+1}$. Luego, asociado al valor propio complejo $\lambda_i = a + bi$ existen las siguientes soluciones linealmente independientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(t) &= \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}i)\, e^{(a+bi)t}, \\ \mathbf{x}_{i+1}(t) &= \bar{\mathbf{v}}_i e^{\bar{\lambda}_i t} = (\mathbf{p} - \mathbf{q}i)\, e^{(a-bi)t}. \end{aligned}$$

[2] Véase el anexo al final de la sección para un breve repaso de valores y vectores propios.

Sumando ambas soluciones en la solución general:

$$\mathbf{x}_h(t) = \cdots + c_i(\mathbf{p}+\mathbf{q}i)\,e^{(a+bi)t} + c_{i+1}(\mathbf{p}-\mathbf{q}i)\,e^{(a-bi)t} + \cdots.$$

Reagrupando términos:

$$\mathbf{x}_h(t) = \cdots + e^{at}\left[\mathbf{p}\left(c_i e^{bit} + c_{i+1}e^{-bit}\right) + \mathbf{q}i\left(c_i e^{bit} - c_{i+1}e^{-bit}\right)\right] + \cdots.$$

Sin embargo, $e^{bit} = \cos(bt) + i\,\mathrm{sen}\,(bt)$ y $e^{-bit} = \cos(bt) - i\,\mathrm{sen}\,(bt)$. Reemplazando,

$$\mathbf{x}_h(t) = \cdots + e^{at}\left\{\mathbf{p}\left[c_i(\cos bt + i\,\mathrm{sen}\,bt) + c_{i+1}(\cos bt - i\,\mathrm{sen}\,bt)\right] + \mathbf{q}i\left[c_i(\cos bt + i\,\mathrm{sen}\,bt) - c_{i+1}(\cos bt - i\,\mathrm{sen}\,bt)\right]\right\} + \cdots.$$

Es decir, las soluciones pueden reagruparse en un análogo a ecuaciones diferenciales de orden superior, obteniendo así soluciones linealmente independientes equivalentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(t) &= e^{at}(\mathbf{p}\cos bt - \mathbf{q}\,\mathrm{sen}\,bt), \\ \mathbf{x}_{i+1}(t) &= e^{at}(\mathbf{q}\cos bt + \mathbf{p}\,\mathrm{sen}\,bt). \end{aligned}$$

El lector puede notar que los cálculos asociados a la proposición de estas soluciones vuelven el problema tedioso de resolver.

Bajo este marco teórico, podemos resolver, por ejemplo, los siguientes problemas:

P94 Encuentre la solución a los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

(b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$.

(c) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 9 & -1 & 2 \\ -9 & 4 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 17$.

Solución:

(a) Calculamos los valores propios de la matriz asociada:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 5 \\ -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda + 2) + 30 = 0.$$

Es decir,

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \longleftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0.$$

Deducimos valores propios $\lambda = 3$ y $\lambda = 4$. Calculamos su vector propio asociado para cada uno de ellos:

- Si $\lambda = 3$, entonces debemos encontrar el espacio nulo de

$$\mathbf{A} - 3\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, $6x_1 + 5x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = -5x_2/6$. De esta forma,

$$\mathbf{v}_1 \in \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- Si $\lambda = 4$, entonces debemos resolver el espacio nulo de

$$\mathbf{A} - 4\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, $x_1 = -x_2$ y por lo tanto,

$$\mathbf{v}_2 \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para cada subespacio tomamos un vector propio a conveniencia. Concluimos que la solución general viene dada por:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Haciendo $t = 0$ según la condición inicial:

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Invertimos la matriz para determinar las constantes[a]:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

De esta forma,

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} e^{3t} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t}}.$$

(b) Realizamos un procedimiento análogo al de la parte anterior, partiendo por determinar los valores propios:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 3)^2 + 16 = 0.$$

Es decir,

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 4i.$$

En este caso, basta con determinar un solo vector propio, pues el otro es el conjugado del primero:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbb{I}=\begin{bmatrix}-4i & -4\\ 4 & -4i\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -i\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Es decir, para $\lambda_1=3+4i\longrightarrow\mathbf{v}_1\in\left\langle\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$. Tomamos $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$. Luego,

$$\lambda_2=3-4i\longrightarrow\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}.$$

Se tiene que $a=3$, $b=4$, $\mathbf{p}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ y $\mathbf{q}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$. Las soluciones serán:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= e^{3t}\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\cos 4t-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\operatorname{sen}4t\right],\\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{3t}\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cos 4t+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\operatorname{sen}4t\right].\end{aligned}$$

De esta forma, queda determinada la solución general:

$$\boxed{\mathbf{x}(t)=c_1e^{3t}\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\cos 4t-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\operatorname{sen}4t\right]+c_2e^{3t}\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cos 4t+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\operatorname{sen}4t\right]}.$$

No se especifican condiciones iniciales en este caso, razón por la cual esta es la respuesta final del problema.

(c) Determinamos los valores propios determinando en primer lugar la ecuación característica, i.e.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbb{I}) &= \det\left(\begin{bmatrix}3-\lambda & 0 & 1\\ 9 & -1-\lambda & 2\\ -9 & 4 & -1-\lambda\end{bmatrix}\right)\\ &= (3-\lambda)\left[(1+\lambda)^2-8\right]+\left[18-9(1+\lambda)\right].\end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\lambda^3-\lambda^2-4\lambda-6=0.$$

Por inspección o teorema de los ceros racionales, se tiene que $\lambda=3$ anula la ecuación. Realizando división sintética:

$$\lambda^3-\lambda^2-4\lambda-6=(\lambda-3)\left(\lambda^2+2\lambda+2\right)=0.$$

Es decir, los valores propios serán en este caso $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1+i$ y $\lambda_3=-1-i$. Determinamos cada uno de los vectores propios asociados:

- Para $\lambda_1 = 3$:

$$\mathbf{A} - 3\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & -4 & 2 \\ -9 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Es decir, $x_3 = 0$ y por lo tanto, $9x_1 - 4x_2 = 0$. De esta forma,

$$\mathbf{v}_1 \in \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \boxed{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

- Para $\lambda_2 = -1 + i$ debe pivotearse una matriz, cuyo procedimiento se deja propuesto al lector. Se obtiene así:

$$\mathbf{v}_2 \in \left\langle \begin{pmatrix} -4 - i \\ -9 + 2i \\ 17 \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \boxed{\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 - i \\ -9 + 2i \\ 17 \end{pmatrix}}.$$

- Es directo del punto anterior que si $\lambda_3 = -1 - i$, entonces:

$$\boxed{\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 + i \\ -9 - 2i \\ 17 \end{pmatrix}}.$$

Para las dos últimas soluciones anteriores es claro que $a = -1$, $b = 1$ y

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que si b se escoge a partir de λ_2, $\mathbf{q}$ debe determinarse a partir de $\mathbf{v}_2$ para mantener la coherencia de la fórmula deducida. Finalmente, dejamos expresada la solución general:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 e^{-t} \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 17 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \right] + c_3 e^{-t} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) + \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 17 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \right].$$

Reemplazando en la condición inicial:

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 17 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 9 & -9 & 2 \\ 0 & 17 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Desde aquí, invirtiendo, obtenemos:

$$c_1 = \frac{7}{17} \quad ; \quad c_2 = \frac{7}{17} \quad ; \quad c_3 = 0.$$

Es decir, la solución particular es:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \frac{7}{17} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + \frac{7}{17} e^{-t} \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 17 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \right]}.$$

□

[a] Recuerde que para una matriz de 2×2: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

P95 Demuestre que todas las soluciones del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

tienden a cero cuando $t \to \infty$ si y solo si $a + d < 0$ y $ad - bc > 0$.

Solución:

Observemos cómo afecta al tipo de solución los parámetros obtenidos en la matriz. Para ello, partimos determinando los valores propios mediante la ecuación característica:

$$(\lambda - a)(\lambda - d) - bc = 0 \longrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \\ &= \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2}. \end{aligned}$$

Observe que si la raíz es negativa, entonces aparecerán términos con cosenos y senos. Sin embargo, incluso en dicho caso, habrá una parte real en el número complejo, que determinará un comportamiento exponencial. Dado que las funciones trigonométricas son acotadas y los vectores propios no varían en el tiempo, el comportamiento asintótico nulo de las soluciones depende de si la parte real de los valores propios hace que las exponenciales tiendan a cero o no. En particular, buscamos que para cada valor propio:

$$\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0,$$

con desigualdad estricta, pues la igualdad a cero puede entregar soluciones puramente trigonométricas, que no tienden a cero cuando $t \to \infty$. Luego, distinguimos los casos reales de los casos complejos:

- Si $\lambda_{1,2}$ son complejos, entonces su parte real vendrá dada por $\dfrac{(a+d)}{2}$. Imponemos que:

$$a + d < 0$$

para garantizar lo pedido.

- Si $\lambda_{1,2}$ son reales, entonces debemos imponer que $\lambda_1\lambda_2 > 0$ y que $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, lo cual es equivalente a imponer que cada una de ellas por separado sea negativa. De esta forma,

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(ad - bc)}{1} > 0.$$

Es decir, $ad - bc > 0$. Análogamente,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a+d)}{2} < 0.$$

Es decir, $a + d < 0$.

Como las condiciones de cada uno de los puntos debe cumplirse simultáneamente, la condición final será la intersección de ambas. Es decir , $(a + d) < 0$ y $(ad - bc) > 0$, condiciones que son precisamente las que se deseaban demostrar.

$\square$

P96 Determinar los vectores **a** que hacen que la solución del problema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$$

tienda a cero cuando $t \to \infty$.

Solución:

Partamos determinando la solución general del sistema, pues a partir de este podemos determinar qué condiciones iniciales escoger para determinar soluciones asintóticamente nulas. Determinamos los valores propios tomando:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= 2 + \lambda - 2\lambda^2 - \lambda^3. \end{aligned}$$

Por resolver,

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Por inspección, $\lambda_1 = 1$ es solución, al igual que $\lambda_2 = -1$. Realizando división sinética:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Es decir, $\lambda_3 = -2$. Determinando cada vector propio asociado:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La solución general queda expresada como:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Haciendo $t = 0$ obtenemos matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{a}.$$

La única forma de que el límite de $\mathbf{x}(t)$ tienda a cero es haciendo $c_1 = 0$, por lo que buscamos $\mathbf{a}$ tal que $c_1 = 0$. Es decir, $\mathbf{a}$ debe ser tal que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{a}.$$

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, invirtiendo la matriz obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 + \frac{a_3}{3}. \\ c_2 &= a_2 + 2a_3. \\ c_3 &= \frac{a_3}{3}. \end{aligned}$$

Dado que a_3 puede ser libre, a_2 puede serlo también. La condición buscada entonces es que:

$$\boxed{a_1 = -\frac{a_3}{3}},$$

con a_3 y a_2 libres.

□

P97 Consideremos la ecuación

$$x''' - x'' + x' - x = 0$$

Resuélvala transformándola en un sistema para luego resolver dicho sistema por alguno de los métodos matriciales visto en clases. Indique también si existe alguna solución particular,

$x(t)$, que satisfaga $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \infty$.

Solución:

(a) Para hacer la transformación en el sistema respectivo, hacemos:

$$\begin{aligned} y_1 &= x, \\ y_2 &= x', \\ y_3 &= x''. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial original,

$$y_3' - y_3 + y_2 - y_1 = 0.$$

Es decir, generamos el sistema:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ y_3' &= y_1 - y_2 + y_3. \end{aligned}$$

Matricialmente,

$$\mathbf{y}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{y}.$$

Podemos resolver utilizando el método de los valores propios. Tomamos:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}) = 1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3.$$

Por resolver,

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Por inspección, $\lambda = 1$ es solución. Realizando división sintética:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right).$$

Es decir, los valores propios faltantes son $\lambda = \pm i$. Determinamos los vectores propios asociados a cada valor propio:

- Si $\lambda_1 = 1$, entonces:

$$\mathbf{A} - \mathbb{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, $x_1 = x_2$ y $x_2 = x_3$. De esta forma,

$$\mathbf{v}_1 \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Si $\lambda_2 = i$, entonces:

$$\mathbf{A} - i\mathbb{I} = \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1-i \end{bmatrix}.$$

Pivoteando, obtenemos que:

$$\mathbf{v}_2 \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Si $\lambda_3 = -i$, entonces por conjugación:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para las dos últimas soluciones, $a = 0$ y $b = 1$, de modo que

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos así la solución general:

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_1 \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \right] + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \right]}.$$

Luego,

$$x(t) = y_1(t) = c_1 e^t - c_1 \cos(t) - c_3 \operatorname{sen}(t).$$

Dado que las funciones trigonométricas son acotadas, entonces para lograr la condición asintótica buscada sería necesaria una exponencial que diverja en $-\infty$. Dado que la única exponencial que aparece es e^t y esta tiende a 0 en $-\infty$, **no** es posible satisfacer la condición buscada (pero sí es posible lograrlo en $t \to \infty$).

□

P98 Considere el problema

$$x' = -x + ay,$$
$$y' = x - 2y.$$

¿Para qué valores de $a$se tiene que todas las soluciones $\mathbf{x}(t)$ satisfacen

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0?$$

P99 (a) Demuestre que, independiente de los valores de a, b y c, si λ es un valor propio de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

es vector propio de $\mathbf{A}$ asociado a λ.

(b) Escriba la ecuación

$$y''' + 4y'' + y' - 6y = 0.$$

como un sistema de primer orden, y encuentre la solución general de este sistema. (*Ayuda*: $\lambda = 1$ es valor propio de la matriz del sistema).

(c) Encuentre la solución general de la ecuación $y''' + 4y'' + y' - 6y = 1$.

Si A no es diagonalizable, entonces existirán valores propios que cuyo espacio propio asociado tiene dimensión (digamos g_i) menor a la multiplicidad algebraica (digamos a_i) del valor propio en cuestión. Entonces, por teoría de sistemas lineales falta por determinar $a_i - g_i$ (número conocido como *defecto* del valor propio) soluciones linealmente independientes para resolver el problema.

Puede desarrollarse una teoría completa de estudio para la determinación sistemática de los vectores propios faltantes, conocida como **vectores propios generalizados** (el lector interesado puede consultar la bibliografía sugerida del curso para profundizar en detalle en dichos contenidos). Sin embargo, aquí de dará énfasis a los tres casos más importantes, y en consecuencia los casos más generales pueden deducirse a partir de estos resultados.

- Si $a_i = 2$ y $g_i = 1$, entonces se conoce un vector propio, digamos $\mathbf{v}_1$. Una solución ya conocida es $\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}$. En analogía a lo desarrollado en ecuaciones diferenciales de orden superior, proponemos la solución faltante como $\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}t)\, e^{\lambda_1 t}$ con $\mathbf{b} \neq 0$ para garantizar independencia lineal. Derivando,

$$\mathbf{x}_2'(t) = \mathbf{b}e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 (\mathbf{a} + \mathbf{b}t)\, e^{\lambda_1 t}.$$

Reemplazando,

$$\mathbf{x}_2'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) \longleftrightarrow \mathbf{b}e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 (\mathbf{a} + \mathbf{b}t)\, e^{\lambda_1 t} = \mathbf{A}(\mathbf{a} + \mathbf{b}t)\, e^{\lambda_1 t}.$$

Expandiendo,

$$\mathbf{b}e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \mathbf{a}e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \mathbf{b}te^{\lambda_1 t} = \mathbf{A}\mathbf{a}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{A}\mathbf{b}te^{\lambda_1 t}.$$

Reordenando términos,

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I})\, \mathbf{a}e^{\lambda_1 t} + (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I})\, \mathbf{b}te^{\lambda_1 t} = \mathbf{b}e^{\lambda_1 t}.$$

Por independencia lineal se sigue que debemos escoger $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de modo que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I})\, \mathbf{b} &= 0, \\ (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I})\, \mathbf{a} &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Un vector que cumple la primera ecuación es $\mathbf{b} = \mathbf{v}_1$. Luego, basta tomar $\mathbf{a}$ que cumpla con la segunda ecuación, o equivalentemente,

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I})^2 \mathbf{a} = 0.$$

- Si $a_i = 3$ y $g_i = 1$, entonces se conoce el vector propio $\mathbf{v}_1$. En este caso, proponemos ahora soluciones de la forma $\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 t) e^{\lambda_1 t}$ y $\mathbf{x}_3(t) = (\mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_2 t + \mathbf{w}_1 t^2) e^{\lambda_1 t}$. En un desarrollo similar al anterior podemos establecer que:
  - $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}_2$ debe ser tal que
  $$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I}) \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1.$$
  - $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{w}_3$ debe ser tal que
  $$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I}) \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_2.$$
  Es decir,
  $$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I})^2 \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 \longrightarrow (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I})^3 \mathbf{w}_3 = 0.$$
- Si $a_i = 3$ y $g_i = 2$, entonces conocemos dos vectores propios, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Si proponemos $\mathbf{x}_3(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}t) e^{\lambda_1 t}$ y siguiendo exactamente el mismo desarrollo que para el primer caso, entonces se concluye que basta tomar $\mathbf{v}_1$ o $\mathbf{v}_2$ como $\mathbf{b}$ y determinar $\mathbf{a}$ de modo que:
$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Revisemos algunos problemas de ejemplo:

P100 Encuentre la solución general del sistema:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

P101 Encuentre la solución del sistema,

$$\begin{cases} x' &= 6x - 4y, \\ y' &= x + 2y, \end{cases}$$

que satisface condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

P102 Resuelva el problema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

P103 Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x'(t) &= (5A - 2) x(t) + 4y(t) \\ y'(t) &= -x(t) + (5A + 2) y(t) \end{aligned}$$

para cierta constante $A \in \mathbb{R}$. Resuelva el problema dando la solución general del sistema. Determinar la solución con condición inicial $x(0) = y(0) = 0$.

Solución:

La matriz asociada al sistema es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5A-2 & 4 \\ -1 & 5A+2 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios asociados vienen dados por:

$$(5A-2-\lambda)(5A+2-\lambda)+4=0.$$

Expandiendo (agrupando $5A-\lambda$ en ambos factores para hacer una suma por su diferencia) obtenemos,

$$(5A-\lambda)^2=0.$$

Es decir, $\lambda = 5A$ es el único valor propio asociado. De esta forma,

$$\mathbf{A}-5A\mathbb{I} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_1 \in \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos un defecto de una unidad, por lo cual debemos determinar $\mathbf{v}_2$ no nulo tal que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}-5A\mathbb{I})^2\,\mathbf{v}_2 &= 0, \\ (\mathbf{A}-5A\mathbb{I})\,\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1. \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$(\mathbf{A}-5A\mathbb{I})^2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cualquier vector nos sirve de acuerdo a la primera ecuación. De acuerdo a la segunda, buscamos $\mathbf{v}_2$ tal que:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Basta tomar la primera columna de la matriz y multiplicarla por -1. De esta forma,

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución general viene dada por:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5At} + c_2\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t\right] e^{5At}}.$$

Haciendo $t = 0$ obtenemos:

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es no singular (invertible), entonces $c_1 = c_2 = 0$. Es decir,

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = 0}$$

para la condición buscada.

$\square$

P104 [**Propuesto**] La ecuación característica de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

es $\phi(\lambda) = (\lambda^2 - 6\lambda + 25)^2 = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{A}$ tiene un par de valores propios complejos conjugados repetidos $3 \pm 4i$. Primero, muestre que los vectores complejos:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 & i \end{bmatrix}^T$$

forman una cadena $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de longitud 2 asociada al valor propio $\lambda = 3 - 4i$. Entonces, calcule las partes real e imaginaria de las soluciones de valores complejos

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) e^{\lambda t}$$

para encontrar las cuatro soluciones de valores reales independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Anexo: valores y vectores propios de una matriz.

En desarollo.

3.1.3. Exponencial de una matriz

Definición: Para el sistema lineal homogéneo de primer orden $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)$ se define la *matriz fundamental* $\Phi(t)$ como aquella matriz cuya columna $k-$ésima contiene la $k-$ésima solución linealmente independiente de dicho sistema, i.e.

$$\boxed{\Phi(t) \triangleq \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{x}_1(t) & \cdots & \mathbf{x}_n(t) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}}.$$

Observe que dada una matriz fundamental $\Phi(t)$:

- Para todo t sus columnas son l.i., por definición.

- Se cumple que:
$$\Phi'(t) = \mathbf{F}(t)\,\Phi(t)\,.$$
Para notar esto, basta observar que para toda columna $k-$ésima de esta ecuación matricial se tiene que:
$$\mathbf{x}_k'(t) = \mathbf{F}(t)\,\mathbf{x}_k(t)\,,$$
lo cual es cierto pues $\mathbf{x}_k$ es solución del sistema homogéneo.

- Una transformación lineal isomórfica (invertible) genera una nueva matriz fundamental, i.e.
$$\tilde{\Phi}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\,,$$
con $\mathbf{C}$ una matriz de $n\times n$ invertible. Observe que un conjunto l.i. de combinaciones lineales de las columnas de $\Phi(t)$ también es solución del sistema, y por lo tanto matriz fundamental. Existen, por lo tanto, **infinitas matrices fundamentales**[3].

En virtud de las definiciones anteriores, existe la motivación de definir la exponencial de una matriz por razones que se expondrán a continuación. Partamos por la definición:

Definición: Se define la *exponencial de una matriz* como:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}}.$$

En otras palabras, se realiza la expansión en series de Taylor, utilizando matrices en vez de escalares, y considerando la potencia $k-$ésima como k multiplicaciones matriciales.

Partamos revisando la propiedad más importante de una exponencial de una matriz:

Proposición: $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Demostración:

Si $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental, entonces:
$$\left(e^{\mathbf{A}t}\right)' = \mathbf{A}\left(e^{\mathbf{A}t}\right).$$
Pero,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!}.$$
Observe que la suma comienza en $k=1$ pues el primer término de la suma era constante, y por lo tanto nula posterior a la derivación. De esta forma,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^{k+1}\frac{t^k}{k!} = \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)!}{k!} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.$$

[3]¿Cuántos conjuntos de soluciones l.i. puede generar para un sistema lineal dado? ¡Infinitos!

De esta forma, $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. ■

Como corolario inmediato de la demostración anterior, observe entonces que existirá una transformación lineal isomórfica representada por la matriz $\mathbf{C}$ tal que para cualquier otra matriz fundamental $\Phi(t)$ se cumplirá:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{C}\Phi(t).$$

Si $t = 0$, entonces:

$$e^{\mathbf{A}\cdot 0} = \mathbf{C}\Phi(0).$$

Observe que $e^{\mathbf{A}\cdot 0} = \mathbb{I}$ (todos los términos restantes de la definición se anulan). En consecuencia,

$$\mathbf{C} = \Phi^{-1}(0).$$

Es decir, una vez determinada una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, la exponencial de la matriz $\mathbf{A}$ viene dada por la fórmula:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \Phi^{-1}(0)\,\Phi(t) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0)}.$$

Asimismo, puede observar que $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental, y de hecho la única, tal que en $t = 0$ es igual a la identidad.

Pueden agregarse algunas propiedades adicionales a la exponencial de una matriz:

Proposición:

- Si $\mathbf{A}$ es diagonal, entonces

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n} \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \longrightarrow e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$.
- Para cualquier matriz $\mathbf{A}$, $e^{\mathbf{A}}$ es no singular y $\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$.
- Si $\mathbf{A}$ es nilpotente (existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{A}^n = 0$)[a], entonces:

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

[a]Note que si $\mathbf{A}$ es nilpotente, entonces $|\mathbf{A}| = 0$. **Esta es una condición necesaria, pero no suficiente.**

Demostración:

- Es decir,

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!},$$

pero $\left(\mathbf{A}^k\right)_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j}^k, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$, i.e. cada elemento de la diagonal se eleva a su potencia respectiva. Sumando matrices:

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{1,1}^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2,2}^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n,n}^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n} \end{bmatrix},$$

demostrando así lo enunciado.

- Basta notar que:

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathbf{A}^{k-j} \mathbf{B}^j,$$

donde se aplicó el teorema del binomio de Newton. Invirtiendo el orden de la sumatoria y expandiendo el binomio:

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{j!\,(k-j)!} \mathbf{A}^{k-j} \mathbf{B}^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^j}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k-j)!} \mathbf{A}^{k-j},$$

donde se aplicó la conmutación de matrices pues $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ y en consecuencia $\mathbf{A}^u\mathbf{B}^v = \mathbf{B}^v\mathbf{A}^u$. Cambiando el índice de la segunda sumatoria:

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^j}{j!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}.$$

Como cada una de las sumas independiente, la segunda puede ser sacada de la primera como constante o viceversa bajo la conmutación de matrices:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}}. \blacksquare$$

- $e^{\mathbf{A}t}$ es una matriz fundamental, y por lo tanto sus columnas son l.i. para todo t. En particular, para $t = 1$ se sigue que $e^{\mathbf{A}}$ debe ser no singular. Sabemos asimismo que:

$$e^{0_n} = e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}} = \mathbb{I}.$$

Como $\mathbf{A}\left(-\mathbf{A}\right) = \left(-\mathbf{A}\right)\mathbf{A}$, entonces se cumple de la proposición anterior:

$$e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = \mathbb{I}.$$

Finalmente, despejando,

$$\boxed{\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}}}. \blacksquare$$

En resumen existen dos formas de calcular la exponencial de una matriz:

- Resolver el sistema asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, calcular la matriz $\Phi(t)$ y luego hacer $e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0)$.
- Si la matriz es nilpotente, para lo cual un buen punto de partida es calcular $\det(\mathbf{A})$ y verificar si es cero, truncar la suma de Taylor y realizar las operaciones necesarias. Esto puede resultar sustencialmente menos tedioso en cantidad de cálculos que el paso anterior.

Revisemos algunos problemas de ejemplo respecto a esta metodología:

P105 Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ siendo:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución:

(a) Observamos que:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{A}$ no es nilpotente y debemos en consecuencia resolver el sistema asociado, $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Calculamos los valores propios de $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Por inspección determinamos $\lambda = 1$ como solución. Realizando división sintética:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 &= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) \\ &= (\lambda - 1)^3. \end{aligned}$$

Reemplazando con este valor obtenemos la matriz:

$$(\mathbf{A} - \mathbb{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir los valores propios pertenecen al subespacio:

$$\mathbf{v} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para determinar el vector propio faltante, tomamos cualquier vector de este conjunto. Buscamos $\mathbf{v}_3$ no nulo tal que:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}-\mathbb{I})\,\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_1,\\ (\mathbf{A}-\mathbb{I})^2\,\mathbf{v}_3 &= 0.\end{aligned}$$

Notamos que:

$$(\mathbf{A}-\mathbb{I})^2 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Es decir, cualquier $\mathbf{v}_3$ es de utilidad mientras pueda determinarse $\mathbf{v}_1$ con él. Observe que no es posible encontrar dicho $\mathbf{v}_3$ para cada una de las bases del conjunto generado obtenido, pero sí para la suma de ambas componentes. En efecto, si

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix},$$

entonces $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ será un vector linealmente independiente. Basta tomar $\mathbf{v}_2$ como $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

De esta forma, la matriz fundamental queda expresada como:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix}e^t & 0 & 1+te^t\\ e^t & e^t & te^t\\ -2e^t & -e^t & -2te^t\end{bmatrix} \longrightarrow \Phi(0) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Concluimos que:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix}e^t & 0 & 1+te^t\\ e^t & e^t & te^t\\ -2e^t & -e^t & -2te^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\longrightarrow \boxed{e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix}1+te^t & -1+e^t-te^t & 0\\ te^t & -e^t-te^t & -e^t\\ -2te^t & 2te^t & e^t\end{bmatrix}}.$$

(b) Una matriz con muchos ceros sugiere que su determinante puede serlo también, y esto a su vez nos hace sospechar que la matriz puede ser nilpotente. En efecto,

$$\det(\mathbf{A}) = 0.$$

Intentamos iterar realizando algunas multiplicaciones matriciales para comprobar si en efecto es nilpotente:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, la matriz es nilpotente. De esta forma, truncamos la suma:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbb{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t^2/2 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Este es el resultado buscado, y el procedimiento resultó sustancialmente más breve que en la parte anterior.

□

P106 Demuestre que si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada no nula que satisface que $\mathbf{A}^2 = 3\mathbf{A}$ entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbb{I} + \frac{1}{3}\left(e^{3t} - 1\right)\mathbf{A}.$$

Solución:

Por definición:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbb{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \cdots$$

Es de interés determinar $\mathbf{A}^3$ y potencias superiores de $\mathbf{A}$. Observe que multiplicando $\mathbf{A}^2 = 3\mathbf{A}$ por $\mathbf{A}$ obtenemos:

$$\mathbf{A}^3 = 3\mathbf{A}^2 = 3^2\mathbf{A}$$

Multiplicamos por $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^4 = 3^2\mathbf{A}^2 = 3^3\mathbf{A},$$

haciendo uso de la misma ecuación inicial. Luego, inductivamente:

$$\mathbf{A}^n = 3^{n-1}\mathbf{A}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \mathbb{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}3\mathbf{A}t^2 + \frac{1}{3!}3^2\mathbf{A}t^3 + \frac{1}{4!}3^3\mathbf{A}t^4 + \cdots \\
&= \mathbb{I} + \mathbf{A}\left(t + \frac{1}{2!}3t^2 + \frac{1}{3!}3^2t^3 + \frac{1}{4!}3^3t^4 + \cdots\right) \\
&= \mathbb{I} + \frac{1}{3}\mathbf{A}\left(3t + \frac{1}{2!}3^2t^2 + \frac{1}{3!}3^3t^3 + \frac{1}{4!}3^4t^4 + \cdots\right) \\
&= \mathbb{I} + \frac{1}{3}\mathbf{A}\left(1 + 3t + \frac{1}{2!}3^2t^2 + \frac{1}{3!}3^3t^3 + \frac{1}{4!}3^4t^4 + \cdots - 1\right) \\
&= \mathbb{I} + \frac{1}{3}\mathbf{A}\left(e^{3t} - 1\right).
\end{aligned}$$

Entonces, queda demostrado lo pedido.

$\square$

P107 Calcule la matriz $\mathbf{B}$ si

$$e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Solución:

La pregunta puede resultar complicada en cuanto debe determinarse la matriz $\mathbf{B}$, i.e., realizar la operación inversa a lo ivsto en el primer problema de esta sección. Sin embargo, dado que $e^{\mathbf{B}t}$ es una matriz fundamental, entonces:

$$\left(e^{\mathbf{B}t}\right)' = \mathbf{B}e^{\mathbf{B}t},$$

en un análogo a la propiedad de la derivación de $e^{\alpha t}$ si α es un escalar real. Observe que el miembro izquierdo es la derivación componente a componente de $e^{\mathbf{B}t}$. Haciendo $t = 0$ en esa ecuación:

$$\left.\left(e^{\mathbf{B}t}\right)'\right|_{t=0} = \mathbf{B}\mathbb{I} = \mathbf{B}.$$

Es decir, ¡basta derivar la matriz y evaluarla en 0 para obtener $\mathbf{B}$! Hágamoslo:

$$\left(e^{\mathbf{B}t}\right)' = \begin{bmatrix} 4e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - 2e^{2t} \\ 2e^{2t} - e^t & 4e^{2t} - e^t & e^t - 2e^{2t} \\ 6e^{2t} - 3e^t & 6e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 4e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$\boxed{\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4-1 & 2-1 & 1-2 \\ 2-1 & 4-1 & 1-2 \\ 6-3 & 6-3 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}}.$$

$\square$

P108 [**Propuesto**] Calcule sen $(\mathbf{A}t)$ y cos $(\mathbf{A}t)$ y luego establezca su relación con la matriz fundamental que es solución del sistema de orden dos $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}^2\mathbf{x}$.

3.1.4. Sistemas no homogéneos: variación de parámetros

Supongamos que se conoce la matriz fundamental $\Phi(t)$ de un sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Deseamos resolver el sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$. En un análogo al método de variación de parámetros ya desarrollado en ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, proponemos como solución una función que multiplica a la matriz fundamental, lo cual puede entenderse nuevamente como una combinación lineal en que varían los coeficientes también con respecto a t, i.e.

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t)\,\mathbf{u}(t),$$

donde $\mathbf{u}(t)$ es un vector por determinar. Derivando:

$$\mathbf{x}_p'(t) = \Phi'(t)\,\mathbf{u}(t) + \Phi(t)\,\mathbf{u}'(t).$$

Reemplazamos en la ecuación original:

$$\Phi'(t)\,\mathbf{u}(t) + \Phi(t)\,\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t).$$

Sin embargo, como Φ es una matriz fundamental, entonces $\mathbf{A}\Phi = \Phi'$, y en consecuencia, reemplazando con esto y cancelando términos:

$$\Phi(t)\,\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t).$$

Dado que Φ tiene columnas l.i., es invertible por definición:

$$\mathbf{u}'(t) = \Phi^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t).$$

Integrando componente a componente:

$$\mathbf{u}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t + \mathbf{c}.$$

El término $\mathbf{c}$, residuo de la integración, quedará multiplicado por $\Phi(t)$ en la expresión final y por lo tanto puede agruparse en la solución general homogénea. Para efectos prácticos, esto es equivalente a hacer $\mathbf{c} = 0$ pues las constantes finales dependerán de las condiciones iniciales dadas.

De esta forma, obtenemos la fórmula de variación de parámetros:

$$\boxed{\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Observe que si $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$, la inversión resulta muy sencilla, pues $\left(e^{\mathbf{A}t}\right)^{-1} = e^{\mathbf{A}t}$. Se recomienda entonces la resolución mediante exponenciales de matrices.

Esta fórmula será aplicada directamente en los siguientes problemas:

P109 Si el sistema homogéneo de orden dos $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ posee matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix},$$

use el método de variación de parámetros para hallar la solución del problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

No debe resolverse la parte homogénea del sistema pues esta ya está especificada. Aplicando la fórmula, requerimos invertir la matriz:

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & 3e^t \end{bmatrix}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \frac{1}{2}\int \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & 3e^t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ -e^{3t} + 3e^t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ -\frac{1}{3}e^{3t} + 3e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Reemplazando en la fórmula de variación de parámetros,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p(t) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ -\frac{1}{3}e^{3t} + 3e^t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t} \\ e^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t} + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solución general viene dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t} \\ e^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t} + 4 \end{pmatrix}.$$

Haciendo $t = 0$:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{c} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{c} = -\frac{7}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que la matriz es invertible, la invertimos:

$$\mathbf{c} = -\frac{7}{12}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{7}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Concluimos entonces que la solución particular es:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = -\frac{7}{6}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t} \\ e^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t} + 4 \end{pmatrix}}.$$

$\square$

P110 Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$, $t \in \mathbb{R}$ asociada con A.

(b) Resuelva el problema

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

P111 Resuelva $x' = 3x - y + 4e^{2t}$, $y' = -x + 3y + 4e^{4t}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

P112 Hallar funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ tales que $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$ y

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2' &= x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= x_3 + e^t \end{aligned}$$

P113 Resolver el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

P114 Use el método de variación de parámetros para hallar la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= x + 3y + 3e^{4t} \\ y'(t) &= 3x + y - 3e^{-2t} \end{aligned}$$

y luego determine aquella solución que satisface $(x(0), y(0)) = (1, -1)$.

P115 Resuelva el sistema lineal

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

P116 [**Propuesto**] Resolver el sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3.1.5. Aplicaciones

Sistemas de estanques. Realizando una extensión de lo estudiado en estanques para sistemas de primer orden, se pueden obtener ecuaciones dinámicas para un sistema en que aparece más de un estanque, lo cual se traduce en un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.

Sin embargo, el lector debe recordar que dicha ecuación diferencial, si bien era lineal, no era de coeficientes constantes, pues uno de los coeficientes respectivos representaba el volumen del estanque en el tiempo, el cual podía perfectamente tener dependencia temporal. Si extendiéramos la idea a varios estanques, nos encontraríamos con la dificultad de que generaríamos un sistema de ecuaciones de coeficientes no constantes, lo cual se escapa de lo estudiado en este capítulo.

Por esta razón, una simplificación realizada en esta sección pasa por asumir que el volumen total de cada estanque en el tiempo varía, i.e. el flujo neto es cero (suma de volúmenes de entrada igual a suma de volúmenes de salida).

Por lo tanto, todo el problema de modelamiento se reduce a determinar la cantidad de soluto en cada uno de los estanques. El modelo dinámico a las cantidades de soluto puede deducirse a partir de la ley de conservación de masa:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out}.$$

Es decir, la variación neta de masa en el tiempo es igual a la variación neta de la masa de entrada menos la variación neta de la masa que sale. Cada masa por lo general puede deducirse como:

$$\dot{m}_{in,k} = c_{in,k} f_{in,k},$$

donde $c_{in,k}$ es la concentración de entrada de la mezcla y $f_{in,k}$ el flujo de entrada respectivo. Asimismo, asumiendo que la mezcla en cada estanque se mantiene homogénea, puede deducirse que:

$$\dot{m}_{out,k} = \frac{x_i}{V_i} f_{out,k},$$

donde x_i es la masa de soluto al estanque para el cual se está determinando el flujo de entrada. Observe que en este caso, de acuerdo al supuesto realizado, V_i es constante. Asimismo, para mantener los términos constantes en el sistema resultante, $f_{out,k}$ también debe serlo.

Si se realizan conexiones entre estanques, el flujo de masa de salida de uno puede convertirse en el flujo de masa de entrada de otro, situación que debe analizarse con cuidado.

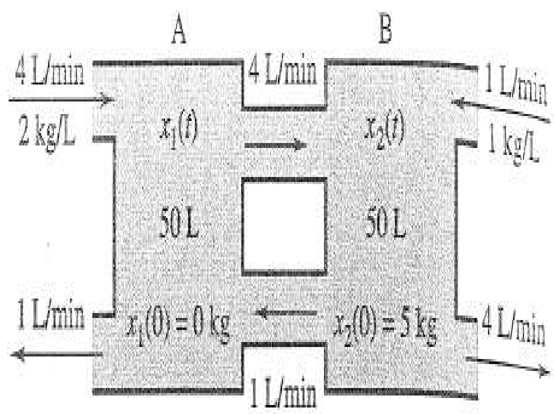
De esta forma, se genera un sistema lineal de coeficientes constantes, por lo general no homogéneo. Este puede resolverse en su parte homogénea mediante el método de valores y vectores propios y su parte particular mediante el método de variación de parámetros, tal como puede comprobarse en el siguiente ejemplo:

P117 Dos estanques, conteniendo 50 litros de salmuera cada uno, están conectados entre sí mediante tubos que hacen que el líquido pase del estanque A al estanque B a razón de 4 litros por minuto y del estanque B al estanque A a razón de 1 litro por minuto. Las mezclas dentro de cada estanque se mantienen homogéneas. Salmuera, con una concentración de 2 kg/litro de sal entra al estanque A a razón de 4 litros por minuto y una mezcla conteniendo 1 kg/litro de sal entra al estanque A a razón de 1 litro por minuto.

Las mezclas salen del sistema por ambos estanques, del estanque A a 1 litro por minuto y del estanque B a 4 litros por minuto. Si en un principio el estanque A contiene agua pura y el estanque B contiene 5 kg de sal, determine la cantidad de sal en cada estanque cuando $t \to \infty$.

Solución:

Graficamos la situación de acuerdo a lo descrito en el enunciado:



Por conservación de volumen, se observa que el volumen neto de cada estanque se conserva y es igual a 50 litros, puesto que el volumen de ingreso es igual al de salida. Esto es coherente con el supuesto que nos permite resolver este tipo de problemas con los conocimientos disponibles.

Por lo tanto, planteamos las ecuaciones de conservación de masa para cada estanque de acuerdo a los procedimientos descritos anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= \left(4 \cdot 2 + \frac{x_2}{50}\right) - \left(4\frac{x_1}{50} + \frac{x_1}{50}\right), \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= \left(1 + 4\frac{x_1}{50}\right) - \left(4\frac{x_2}{50} + \frac{x_2}{50}\right). \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales para este caso son $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 5$. Se obtiene de esta forma el sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos el sistema de acuerdo a la metodología ya estudiada:

- Para determinar la solución homogénea, resolvemos el determinante igualado a cero:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}| &= \left| \frac{1}{50}\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} - \lambda\mathbb{I} \right| \\ &= \frac{1}{50^2}\left| \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} - 50\lambda\mathbb{I} \right|, \end{aligned}$$

  donde se aplicó la propiedad $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$. De esta forma, resolvemos:

$$(5 + 50\lambda)^2 - 4 = 0.$$

  Obtenemos así $\lambda_1 = -\frac{7}{50} \longrightarrow \mathbf{v}_1 = \binom{1}{-2}$ y $\lambda_2 = -\frac{3}{50} \longrightarrow \mathbf{v}_2 = \binom{1}{2}$. La matriz fundamental vendrá dada por:

$$\boxed{\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-7t/50} & e^{-3t/50} \\ -2e^{-7t/50} & 2e^{-3t/50} \end{bmatrix}} \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}_h(t) = \Phi(t)\,\mathbf{c}}.$$

- Resolvemos ahora la solución particular, haciendo uso de la ecuación respectiva de variación de parámetros:

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t,$$

  con $\mathbf{f}(t) = \binom{8}{1}$ en este caso. Tenemos que:

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2e^{7t/50} & -e^{7t/50} \\ 2e^{3t/50} & e^{3t/50} \end{bmatrix} \longrightarrow \Phi^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 15e^{7t/50} \\ 17e^{3t/50} \end{pmatrix}.$$

  Es decir, la integral viene dada por:

$$\mathbf{u}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{25}{2}\begin{pmatrix} 15e^{7t/50}/7 \\ 17e^{3t}/3 \end{pmatrix}.$$

- La solución general se escribe como:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\,\mathbf{c} + \Phi(t)\,\mathbf{u}(t).$$

  Según la condición inicial,

$$\mathbf{x}(0) = \Phi(0)\,\mathbf{c} + \Phi(0)\,\mathbf{u}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Es decir,

$$\mathbf{c} = \Phi^{-1}(0)\,\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}(0)\,.$$

Reemplazando,

$$\mathbf{c} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{25}{2}\begin{pmatrix} 15/7 \\ 17/3 \end{pmatrix}.$$

Se concluye que:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\left[\mathbf{c} + \frac{25}{2}\begin{pmatrix} 15e^{7t/50}/7 \\ 17e^{3t}/3 \end{pmatrix}\right].$$

Observe que $\Phi(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, de modo que:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) &= \frac{25}{2}\lim_{t\to\infty} \Phi(t)\begin{pmatrix} 15e^{7t/50}/7 \\ 17e^{3t}/3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{25}{2}\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} 15/7 + 17/3 \\ -30/7 + 34/3 \end{pmatrix}. \\ &= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 2050 \\ 1850 \end{pmatrix}\text{kg} \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\boxed{\begin{bmatrix} x(\infty) \\ y(\infty) \end{bmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 2050 \\ 1850 \end{pmatrix}\text{kg}}.$$

□

Sistemas de resortes. Una aplicación directa de los sistemas de ecuaciones diferenciales son los sistemas de resortes, donde es de interés determinar la posición con respecto al equilibrio de más de un resortes, los cuales están conectados mediante ligaduras cinemáticas. Sin embargo, el lector debe tener presente que si bien el planteamiento puede deducirse directamente a partir de la segunda ley de Newton, contenidos aprendidos en un curso básico de mecánica clásica, aparecerán involucradas ecuaciones diferenciales de orden dos.

Como marco teórico, se revisará brevemente cómo resolver sistemas de ecuaciones de orden dos, siguiendo un desarrollo teórico similar al realizado para resolver sistemas de primer orden. En general, estamos interesados en determinar la solución de sistemas de forma:

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

en el cual esperamos $2n$ soluciones linealmente independientes si $\mathbf{A}_{n\times n}$[4]. Partimos con el caso básico: si la matriz es diagonal, entonces:

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{D}\mathbf{x}$$

Resolver esta ecuación es sencillo, porque es un juego de ecuaciones de orden dos, cada una independiente de la otra. Cada una tendrá ecuación característica $s^2 - d_i$ y por lo tanto sus soluciones

[4]**Ejercicio propuesto para el lector:** ¡pruebe esta afirmación! *Pista*: toda ecuación diferencial de orden superior de orden j puede reducirse a un sistema de ecuaciones de...

son o bien $e^{\sqrt{|d_i|}t}$ y $e^{-\sqrt{|d_i|}t}$ si $d_i \geq 0$ o bien $\cos\left(\sqrt{|d_i|}t\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\sqrt{|d_i|}t\right)$ en caso contrario. Es decir, la solución general queda expresada como la suma de cada una de las soluciones asociada a su respectivo vector componente:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n}\left[c_{i,1}\hat{\mathbf{e}}_i\begin{cases} e^{\sqrt{|d_i|}t} & \text{si } d_i \geq 0 \\ \cos\left(\sqrt{|d_i|}t\right) \text{ ó} & \text{si } d_i < 0\end{cases} + c_{i,2}\hat{\mathbf{e}}_i\begin{cases} e^{-\sqrt{|d_i|}t} & \text{si } d_i \geq 0 \\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{|d_i|}t\right) \text{ ó} & \text{si } d_i < 0\end{cases}\right].$$

Si la matriz no es diagonal, entonces consideramos el caso en que es diagonalizable, por lo cual $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$. Es decir, haciendo $\mathbf{y} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$ se obtiene el sistema:

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}'' = \mathbf{D}\mathbf{y}.$$

Para este sistema ya conocemos la solución, y basta reemplazar los elementos de la diagonal por los valores propios respectivos:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{n}\left[c_{i,1}\hat{\mathbf{e}}_i\begin{cases} e^{\sqrt{|\lambda_i|}t} & \text{si } \lambda_i \geq 0 \\ \cos\left(\sqrt{|\lambda_i|}t\right) \text{ ó} & \text{si } \lambda_i < 0\end{cases} + c_{i,2}\hat{\mathbf{e}}_i\begin{cases} e^{-\sqrt{|\lambda_i|}t} & \text{si } \lambda_i \geq 0 \\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{|\lambda_i|}t\right) \text{ ó} & \text{si } \lambda_i < 0\end{cases}\right].$$

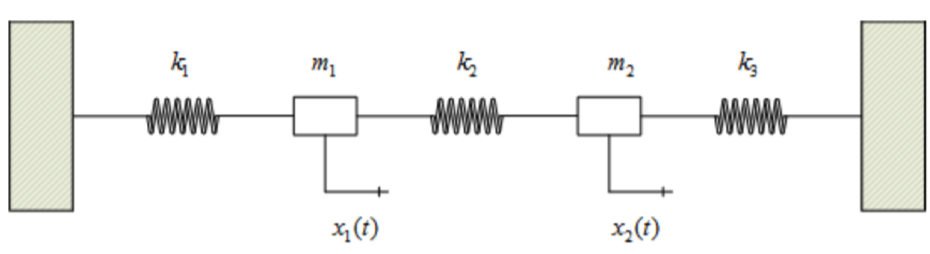
Finalmente, premultiplicamos por $\mathbf{V}$ para obtener $\mathbf{x}$ y notamos que $\mathbf{V}\hat{\mathbf{e}}_k = \mathbf{v}_k$, de modo que:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n}\left[c_{i,1}\hat{\mathbf{v}}_i\begin{cases} e^{\sqrt{|\lambda_i|}t} & \text{si } \lambda_i \geq 0 \\ \cos\left(\sqrt{|\lambda_i|}t\right) \text{ ó} & \text{si } \lambda_i < 0\end{cases} + c_{i,2}\hat{\mathbf{v}}_i\begin{cases} e^{-\sqrt{|\lambda_i|}t} & \text{si } \lambda_i \geq 0 \\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{|\lambda_i|}t\right) \text{ ó} & \text{si } \lambda_i < 0\end{cases}\right]}.$$

Finalmente, el caso no diagonalizable escapa a los propósitos de análisis de este tipo de sistemas, por lo cual se prescinde de él. La gran mayoría de problemas de naturaleza mecánica puede resolverse analíticamente mediante las consideraciones anteriores.

Procedamos a la resolución de un problema de ejemplo mediante la metodología anteriormente desarrollada. Se revisará el modelamiento de este tipo de problemas con ejemplos particulares en el desarrollo de los problemas:

P118 Considere el sistema de masas $m_1 = m_2 = 1$ kg y de resortes k_1, k_2 y k_3 con constantes 3 N/m, 2 N/m, 6 N/m respectivamente, como en la figura siguiente:



Determine las posiciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ de las masas m_1, m_2 respectivamente, con respecto a sus posiciones de equilibrio para los datos iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1'(0) = 0$, $x_2'(0) = 1$.

Solución:

(a) Considere, en coherencia con la figura, un desplazamiento x_1 de la primera masa con respecto a la posición natural y un desplazamiento x_2 de la segunda masa con respecto a la posición de equilibrio. Luego, el primer resorte se estira x_1, el tercero se contrae x_2 y el del medio se estira/contrae dependiendo de la diferencia entre x_2 y x_1. Si $x_2 > x_1$, entonces el segundo resorte se estira $x_2 - x_1$, y se contrae $x_1 - x_2$ en caso contrario.

En consecuencia, la segunda ecuación de Newton puede calcularse sobre cada masa, considerando la fuerza que cada resorte ejerce sobre dichas masas, obteniendo así el sistema:

$$\begin{aligned} m_1 x_1''(t) &= -k_1 x_1(t) + k_2 [x_2(t) - x_1(t)], \\ m_2 x_2''(t) &= -k_2 [x_2(t) - x_1(t)] - k_3 x_2(t). \end{aligned}$$

Entonces, acabamos de generar el siguiente sistema de segundo orden a resolver:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2+k_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

¡Utilicemos la teoría recién desarrollada! Reemplazando con los parámetros:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Reemplazamos con los valores numéricos de las constante y obtenemos así el sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos la ecuación característica para obtener así los valores propios:

$$(5+\lambda)(8+\lambda) - 4 = 0.$$

Es decir,

$$\lambda^2 + 13\lambda + 36 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{-13 \pm 5}{2} \longrightarrow \lambda_1 = -9 \vee \lambda_2 = -4.$$

Calculamos los vectores propios asociados a cada valor propio, obteniendo así:

- Para λ_1:
$$\mathbf{A} + 9\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{v}_1 \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- Para λ_2:

$$\mathbf{A}+4\mathbb{I}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow \mathbf{v}_1\in\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Es decir, concluimos que:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\left[c_1\cos(9t)+c_2\operatorname{sen}(9t)\right]+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\left[c_3\cos(4t)+c_4\operatorname{sen}(4t)\right].$$

Haciendo $t=0$ tenemos:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}c_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Derivando y haciendo $t=0$ tenemos:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}9\\-18\end{pmatrix}c_2+\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}c_4=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Resolviendo ambos sistemas obtenemos:

$$c_1=\quad 0\quad ;\quad c_2=-\frac{4}{81}\quad ;\quad c_3=0\quad ;\quad c_4=\frac{1}{18}.$$

Es decir, las posiciones de cada uno de los resortes con respecto al equilibrio corresponden a:

$$\boxed{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=-\frac{4}{81}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\operatorname{sen}(9t)+\frac{1}{18}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\operatorname{sen}(4t)}.$$

$\square$

3.2. Análisis cualitativo y teoría de estabilidad

El objetivo de este apartado es hacer el estudio de sistemas de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=F(x,y),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=G(x,y),\end{aligned}$$

donde la variable t no aparece de forma explícita y F y G son funciones diferenciables. Estos sistemas se denominan **sistemas autónomos**. Tal como ya sabemos, vectorialmente, el sistema anterior puede compactarse como:

$$\mathbf{x}'=\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

La solución obtenida a partir de estas condiciones iniciales corresponde a una curva denominada **trayectoria** del sistema.

Definición:

- Se definen los *puntos críticos* del sistema como aquellos puntos (x_0, y_0) tales que:

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= 0 \\ G(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

- Se define una solución de equilibrio como aquella de la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0, \\ y(t) &= y_0. \end{aligned}$$

  Es decir, funciones constantes con el punto crítico como valor.

Los sistemas autónomos se grafican en el plano cartesiano xy por medio de campos de pendientes, los cuales son segmentos de recta con pendiente:

$$\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}.$$

A la vez, se pueden asociar vectores para indicar la dirección "a favor del flujo". Toda trayectoria que pase por dicho punto tendrá la pendiente en dicho punto. Las flechas representarán la dirección de movimiento en la curva.

Se puede demostrar que cualquier trayectoria que no conste de un único punto es una curva no degenerada, es decir, sin autointersecciones.

Clasificación de puntos críticos. Los puntos críticos pueden clasificarse de diversas formas. A continuación se muestran algunas de ellas de forma esquemática:

- **Según su estabilidad:** Realizamos definiciones en analogía a lo estudiado para sistemas autónomos en la primera parte del curso:

  - Un punto crítico $\bar{x}$ se dice *estable* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t > 0$

    $$\|\bar{x} - x_0\| < \delta \longrightarrow \|\bar{x} - x(t)\| < \epsilon$$

  - Se dice *inestable* si no es estable.
  - Un punto crítico es *asintóticamente estable* si es estable y si toda trayectoria que comience suficientemente cerca de $\bar{x}$ tiende a $\bar{x}$ cuando $t \to \infty$. Es decir, si existe $\delta > 0$ tal que

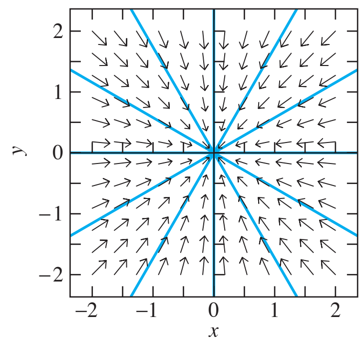
    $$\|x_0 - \bar{x}\| < \delta \longrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}.$$

    La estabilidad asintótica es una condición más fuerte que la simple estabilidad, porque un centro cumple la condición de estabilidad (por ejemplo, trayectorias elípticas), pero un nodo estable siempre será asintóticamente estable.

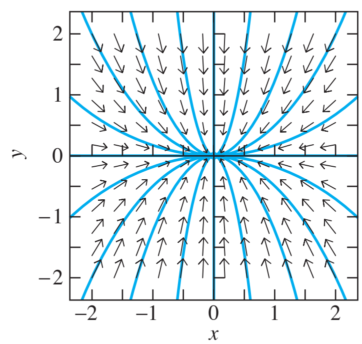
- **Según la naturaleza de las trayectorias:** De acuerdo al comportamiento de las trayectorias los puntos críticos se pueden clasificar en:

  - *Nodos*: Un punto crítico se denomina *nodo* si se cumple una de las siguientes condiciones:
    - Toda trayectoria tiende a $(\bar{x}, \bar{y})$ cuando $t \to +\infty$ o bien se aleja.
    - Toda trayectoria es tangente en $(\bar{x}, \bar{y})$ a alguna línea recta que pasa por el punto crítico.

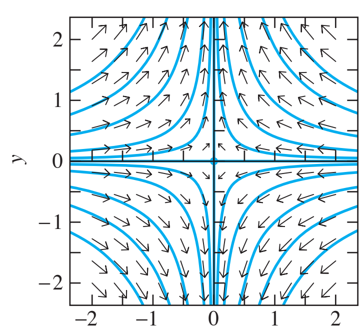
    De acuerdo a la degeneración del nodo se pueden clasificar en:
    - Propios: Si no existen parejas de trayectorias opuestas que sean tangentes a una misma linea recta que pase por el punto crítico.



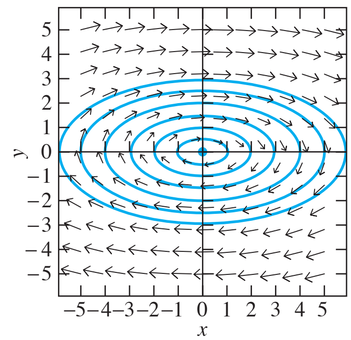
    - Impropios: Si no son propios.



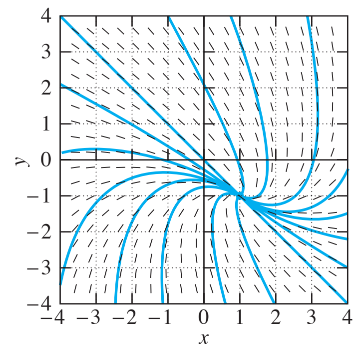
    De acuerdo a la atracción del nodo se pueden clasificar en:
    - Pozo: Si todas las trayectorias tienden al punto crítico. Los pozos por lo tanto son asintóticamente estables.
    - Fuente: Si todas las fuentes se alejan de él. Son por lo tanto inestables.
    - Punto silla: Cuando las trayectorias (salvo una número finito). Son por lo tanto inestables.



- *Centros*: Un punto crítico se denomina *centro* si determina trayectorias cerradas periódicas en torno al punto crítico. Este tipo de puntos son estables.



- *Puntos espiral*: Se define un *punto espiral* como aquellos puntos en el cual las trayectorias giran en espiral conforme tienden a el o se alejan de este. El comportamiento de acercamiento o alejamiento determinará la estabilidad del punto crítico.



Linealización de sistemas no lineales. Un punto crítico $\mathbf{x}_0$ se dice *aislado* si existe una vecindad en torno a él que no contiene puntos críticos salvo $\mathbf{x}_0$. Para puntos cercanos a $\mathbf{x}_0$, el comportamiento del sistema no lineal puede ser aproximado por un sistema lineal a partir de la definición de diferenciabilidad de una función vectorial:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

donde $\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)$ es la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$ evaluada en $\mathbf{x}_0$, cuadrada y constante en este caso. Recordar que esta se calcula derivando:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Dado que $\mathbf{x}_0$ es un punto crítico, entonces $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \vec{0}$ y por lo tanto:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Realicemos la sustitución $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, y consecuentemente $\mathbf{u}' = \mathbf{x}'$ (derivación con respecto al tiempo t). De esta forma, el sistema lineal que aproxima al no lineal puede escribirse como:

$$\mathbf{u}' = \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{u}.$$

Puede demostrarse sin mayores dificultades que el comportamiento cualitativo del sistema no lineal puede determinarse a partir del comportamiento del sistema lineal. Por lo tanto, se concluye que es necesario determinar el compartimiento cualitativo de sistemas lineales para poder estudiar cualquier sistema no lineal diferenciable. Esto es lo que haremos a continuación.

Puntos críticos de sistemas lineales. Consideremos el sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

donde los valores propios de $\mathbf{A}$ los denotaremos por λ_1 y λ_2. Si $\mathbf{A}$ es la matriz jacobiana evaluada en $\mathbf{x}_0$ y suponiendo que $\mathbf{x}_0$ es un punto crítico aislado, entonces $ad - bc \neq 0$ de modo que no se generen trayectorias o valores en los cuales el sistema se iguala a cero. En otras palabras, ninguno de los valores propios puede ser cero.

Para los valores propios λ_1 y λ_2 de la matriz se pueden considerar los siguientes casos:

- **Reales y distintos con el mismo signo:** De acuerdo a lo estudiado sobre sistemas lineales, se generan vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ distintos y una solución de la forma

  $$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}.$$

  Se observa que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ generan una base de $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto podemos considerar dicho sistema de coordenadas como una transformación válida y denotarlo por $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. De aquí se sigue que $\mathbf{x}(t)$ puede escribirse en este sistema de coordenadas como:

  $$[\mathbf{x}(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

  Analizar el sistema en este sistema de coordenadas resulta sustancialmente más sencillo.

  Si $c_1 = 0$ ó $c_2 = 0$ entonces la curva solución está determinada por uno de los vectores propios y por lo tanto está determinada sobre uno de estos ejes. En caso contrario, si tomamos $k = \lambda_2/\lambda_1$ notar que:

  $$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \longrightarrow u^k(t) = c_1^k e^{\lambda_2 t} = \frac{c_1^k}{c_2} v(t) \longrightarrow \boxed{v(t) = \frac{c_2}{c_1^k} u^k(t)}$$

  - Si $k > 1$ entonces las curvas son tangentes al eje $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1$ y si $0 < k < 1$ las curvas son tangentes al eje $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$. Por lo tanto, en cualquiera sea el caso el nodo es impropio.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, entonces las trayectorias se alejan del punto crítico y el nodo es una fuente.
  - Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, entonces las trayectorias se acercan al punto crítico y el nodo es un pozo.

- **Reales, distintos con distinto signo:** Denotemos dichos valores propios como $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Bajo la misma transformación lineal descrita anteriormente se obtiene que:

  $$\boxed{v(t) = \frac{c_2}{c_1^k} u^k(t)}$$

  Ahora es claro que $k < 0$ y por lo tanto el comportamiento de las curvas es similar al de hipérbolas. De esta forma, concluimos que el punto crítico es un nodo tipo punto silla.

- **Reales iguales:** En este caso debemos cuidar si para el vector propio λ existe un vector propio o dos vectores propios. Revisemos ambos casos:

  - Si existen dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, entonces la solución viene dada por:

$$\mathbf{x}\left(t\right)=\left(c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2\right)e^{\lambda t}$$

    Bajo la transformación lineal descrita con anterioridad tenemos en este caso que $k=1$ y por lo tanto:

$$v(t)=\frac{c_2}{c_1}u\left(t\right)$$

    (Note que $c_1=0$ implica en este caso una recta a lo largo del eje $\mathbf{v}$) De esta forma, el nodo es un nodo propio cuyo caracter atractor o repulsor estará dado por el signo de λ: es una fuente si $\lambda>0$ y un pozo si $\lambda<0$.

  - Si existe un solo vector $\mathbf{v}_1$, entonces podemos obtener el otro mediante el procedimiento ya conocido, de modo que:

$$\mathbf{x}\left(t\right)=c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda t}+c_2\left(\mathbf{v}_1t+\mathbf{v}_2\right)e^{\lambda t}$$

    De esta forma,

$$\left[\mathbf{x}\left(t\right)\right]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\left(c_1+c_2t\right)e^{\lambda t}\\ c_2e^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

    Se tiene entonces que:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}v/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u/\mathrm{d}t}=\frac{\lambda c_2e^{\lambda t}}{c_1e^{\lambda t}+\lambda\left(c_1+c_2t\right)e^{\lambda t}}=\frac{\lambda c_2}{c_1+\lambda\left(c_1+c_2t\right)}$$

    Cuando $t\to\infty$ es claro que que $\mathrm{d}v/\mathrm{d}u\longrightarrow 0$, por lo que cada trayectoria es tangente al eje $\mathbf{u}$, en particular cuando $c_2=0$ coincide con el eje $\mathbf{u}$. De esta forma, el sistema describe un nodo impropio. Si $\lambda<0$ entonces es un pozo (ver la solución $\mathbf{x}\left(t\right)$) y si $\lambda>0$ entonces es una fuente.

- **Complejos conjugados:** Los valores propios los denotaremos por $\lambda_{1,2}=p+iq$. Los vectores propios asociados serán $\mathbf{v}_1=\mathbf{a}+i\mathbf{b}$ y $\mathbf{v}_2=\mathbf{a}-i\mathbf{b}$. Entonces, las soluciones serán

$$\mathbf{x}_1\left(t\right)=e^{pt}\left(\mathbf{a}\cos qt-\mathbf{b}\operatorname{sen}qt\right)\quad\text{y}\quad\mathbf{x}_2\left(t\right)=e^{pt}\left(\mathbf{b}\cos qt-\mathbf{a}\operatorname{sen}qt\right).$$

  Luego, cada una de las componentes oscila en torno a valores positivos y negativos conforme t se incrementa. Por lo tanto, el sistema es un punto espiral. Asimismo, si $p>0$ se observa en $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ que la solución diverge, por lo que el sistema es inestable y si $p<0$ el sistema es estable.

- **Imaginarias conjugadas:** Entendiéndolo como un caso particular del caso anterior ($p=0$), se tendrá que:

$$\mathbf{x}_1\left(t\right)=\mathbf{a}\cos qt-\mathbf{b}\operatorname{sen}qt\quad\text{y}\quad\mathbf{x}_2\left(t\right)=\mathbf{b}\cos qt-\mathbf{a}\operatorname{sen}qt.$$

  Entonces $\mathbf{x}\left(t\right)=c_1\mathbf{x}_1\left(t\right)+c_2\mathbf{x}\left(t\right)$ describe una elipse centrada en el origen del plano xy. En consecuencia, el sistema es un centro (estable en consecuencia).

De acuerdo a lo anterior se puede hacer el siguiente cuadro resumen:

Caso	**Tipo**	**Estabilidad**
Reales, distintas, de mismo signo	Nodo impropio	Pozo (estable) si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
		Fuente (inestable) si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
Reales, distintas, de distinto signo	Nodo punto silla	Inestable
Reales iguales	Nodo propio o impropio *según multiplicidad geométrica*	Pozo (estable) si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
		Fuente (inestable) si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
Complejas conjugadas ($\lambda = p \pm iq$)	Punto espiral	Estable si $p < 0$
		Inestable si $p > 0$
Imaginarias puras	Centro	Estable

Observe entonces que los resultados de estabilidad de acuerdo al comportamiento de los valores propios puede resumirse en el siguiente teorema:

Teorema: (de Hartman–Grobman) Sean λ_1 y λ_2 los valores propios de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ del sistema de 2×2:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

donde $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Entonces el punto crítico $(0, 0)$ es:

- Asintóticamente estable si $\Re\{\lambda_1\} < 0$ y $\Re\{\lambda_2\} < 0$.
- Estable pero no asintóticamente estable si las partes reales de λ_1 y λ_2 son ambas cero (de tal manera que $\lambda_1, \lambda_2 = \pm qi$).
- Inestable si λ_1 ó λ_2 tienen una parte real positiva.

Bajo este marco teórico estamos en condiciones de resolver los siguientes problemas:

P119 (a) Determine todos los puntos críticos del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - 1, \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = xy. \end{cases}$$

Resuelva la ecuación en el plano fase xy para determinar las curvas integrales. Pruebe que hay dos trayectorias que son semicírculos genuinos. ¿Cuáles son los extremos de los semicírculos?

(b) Encuentre los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y - x^2 + 2 \\ \\ y'(t) = x^2 - xy \end{cases},$$

y clasifíquelos de acuerdo a su estabilidad.

Solución:

(a) Para determinar los puntos críticos resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ xy &= 0 \end{aligned}$$

La primera ecuación implica que $x = \pm 1$ y la segunda que $x = 0$ ó $y = 0$. Como $x = 0$ contradice el resultado de la primera ecuación, entonces concluimos que los puntos son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.
Para resolver la ecuación del plano fase estamos interesados en resolver:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xy}{x^2 - 1},$$

la cual es una ecuación claramente separable. Por esta razón, la reescribimos como:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{x}{x^2 - 1}\mathrm{d}x$$

Integrando a ambos lados:

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| + c = \ln\sqrt{|x^2 - 1|} + c$$

Tomando exponencial a ambos lados:

$$y = k\sqrt{|x^2 - 1|}$$

donde $k = \pm e^c$. Por propiedades del módulo tendremos que:

$$y = k\sqrt{|1 - x^2|}.$$

Para $k = \pm 1$ las curvas efectivamente serán semicírculos, pues:

$$y^2 = 1 - x^2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

De esta forma, se prueba todo lo pedido.

(b) Por resolver el sistema:

$$\begin{aligned} y - x^2 + 2 &= 0 \\ x^2 - xy &= 0. \end{aligned}$$

En la segunda ecuación se tiene que $x\,(x - y) = 0$. Si $x = 0$, entonces en la primera ecuación se sigue que $y = -2$. Si $x = y$, entonces la primera ecuación se reescribe como:

$$x - x^2 + 2 = 0 \longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \longrightarrow (x + 1)\,(x - 2) = 0$$

Es decir, $x = y = -1$ y $x = y = 2$ son los dos puntos críticos faltantes. Concluimos entonces que los puntos de equilibrio son:

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0,-2), (-1,-1), (2,2)\}}$$

Para clasificar los puntos críticos de acuerdo a su estabilidad utilizamos el teorema de Hartman–Grobman, linealizando el sistema en torno a cada uno de los puntos de operación. Partimos derivando:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ 2x - y & -x \end{bmatrix}.$$

Luego, evaluamos en cada uno de los puntos críticos:

- Si $(x,y) = (0,-2)$, entonces:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(0,-2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

  Es decir, la ecuación característica es $\lambda^2 - 2 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$. Como uno de los valores propios es positivo, concluimos que el equilibrio es inestable.

- Si $(x,y) = (-1,-1)$, entonces:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(-1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

  La ecuación característica en este caso es $(\lambda - 2)(\lambda - 1) + 1 = 0$. Expandiendo, $\lambda^2 - 3\lambda + 3 = 0$. Despejando,

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

  Como las partes reales de los valores propios son positivas, entonces el sistema es inestable.

- Finalmente, si $(x,y) = (2,2)$, entonces:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(-1,-1) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

  La ecuación característica será $(-4-\lambda)(-2-\lambda) - 2 = 0$. Es decir, expandiendo:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 6 = 0.$$

  Luego,

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-24}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2}.$$

  Como ambos valores propios son negativos, concluimos entonces que el sistema es asintóticamente estable.

$\square$

P120 Estudie la estabilidad del punto de equilibrio $(0,0)$ en relación a los sistemas

(a) $\begin{cases} x' &= x + y - 2xy \\ \\ y' &= -2x + y + 3y^2 \end{cases}.$

(b) $\begin{cases} x' &= -4y \\ \\ y' &= x \end{cases}.$

(c) $\begin{cases} x' &= x^2 - 4y \\ \\ y' &= x - 2y^2 \end{cases}.$

Solución:

(a) Dado que el sistema es claramente no lineal, lo primero que debemos hacer es linealizarlo en torno a su punto $(0,0)$:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} 1-2y & 1-2x \\ -2 & 1+6y \end{bmatrix} \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinamos los valores propios de esta matriz haciendo:

$$\left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \longrightarrow (1-\lambda)^2 + 2 = 0$$

Es decir,

$$\lambda = 1 \pm i\sqrt{2}.$$

A partir de la tabla resumen obtenida deducimos que el punto es un punto espiral pues los valores propios son complejos conjugados. Como $\Re\{\lambda\} = 1 > 0$, entonces el punto es un equilibrio inestable.

(b) El sistema ya es lineal, por lo que no hay necesidad de linealizarlo debido a que esto sería una operación redundante. De esta forma, buscamos los valores propios de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left| \begin{bmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

Es decir, $\lambda = \pm 2i$. De esta forma, como los valores propios son puramente imaginarios, el equilibrio es un centro (estable).

(c) Linealizamos el sistema en torno a $(0,0)$, obteniendo así la matriz:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -4 \\ 1 & -4y \end{bmatrix} \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que la matriz es exactamente la misma que la de la parte anterior, por lo cual no es necesario realizar trabajo adicional. El punto $(0,0)$ corresponde a un <u>centro</u> en este caso y por lo tanto el equilibrio es estable.

□

P121 El punto $(0,0)$ es el único punto de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= k\left(1-x^2\right)y - x \end{cases}$$

Determine su carácter (atractor, repulsor, centro o punto de silla) en función del parámetro k.

Solución:

Dado que el sistema es no lineal, partimos linealizándolo en torno al punto crítico $(0,0)$ (entregado en el enunciado) para un valor de k cualquiera, y a partir de este generamos el sistema que debemos estudiar:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2kxy-1 & k\left(1-x^2\right) \end{bmatrix} \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{bmatrix}$$

Entonces, determinamos los valores propios haciendo:

$$\left|\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & k-\lambda \end{bmatrix}\right| = 0 \longrightarrow \lambda(\lambda-k)+1=0 \longrightarrow \lambda^2 - k\lambda + 1 = 0$$

Despejando aquí λ (los valores propios buscados) en función de k obtenemos así:

$$\lambda = \frac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$$

Es decir, el comportamiento de los valores propios dependerá del valor de k, en particular dependiendo de cómo se comporte la raíz:

- Si $k^2-4>0$ ($k>2$ ó $k<2$), entonces las raíces (valores propios) serán reales y dadas por:

  $$\lambda_1 = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}$$

  Observe que en este caso los valores propios no pueden ser en ningún caso iguales, pues eso solo se cumple cuando $k^2-4=0$. Entonces, lo que puede suceder es que estas tengan el mismo signo o distinto signo. Si ambas tienen el mismo signo, entonces se cumplirá que:

$$\lambda_1\lambda_2 > 0 \longrightarrow \frac{k^2 - k^2 + 4}{4} > 0 \longrightarrow 1 > 0,$$

lo cual se cumple para todo k en el intervalo. Esto implica que es imposible que las raíces tengan signos opuestos. De esta forma, en ambos casos los equilibrios serán <u>nodos impropios</u>. Si $k > 2$ entonces serán <u>fuentes</u> pues λ_1 y λ_2 serán positivos y si $k < -2$ entonces serán <u>pozos</u>.

- Si $k^2 - 4 = 0$ ($k = \pm 2$) se tendrá que $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{k}{2} = \pm 1$. El tipo de nodo lo determinaremos obteniendo el o los vectores propios. Reemplazamos, para obtener así:
$$\begin{bmatrix} \mp 1 & 1 \\ -1 & \pm 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \mp 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
donde el signo se decide según el valor de k. Dado que tenemos un solo vector propio, se sigue inmediatamente que el equilibrio será un <u>nodo impropio</u>. Si $k = 2$ será una fuente (inestable) y si $k = -2$ será un pozo (estable).
- Si $k^2 - 4 < 0$ ($k \in (-2, 2)$) tendremos que las raíces serán complejas conjugadas, y dadas por:
$$\lambda_1 = \frac{k + i\sqrt{4 - k^2}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{k - i\sqrt{4 - k^2}}{2}$$
Es de particular interés el caso $k = 0$, donde la parte real de los valores propios será cero, ambos valores propios puramente imaginarios y por lo tanto el equilibrio un centro (estable). En caso contrario, el punto será un <u>punto espiral</u>, estable si $k > 0$ e inestable si $k < 0$.

En resumen podemos separar en los siguientes intervalos para k:

- Si $k \leq -2$ tendremos nodos impropios tipo pozo (estables).
- Si $k \in (-2, 0)$ tendremos un punto espiral estable.
- Si $k = 0$ tendremos un centro (estable).
- Si $k \in (0, 2)$ tendremos un punto espiral inestable.
- Si $k \geq 2$ tendremos nodos impropios tipo fuente (inestables).

$\square$

P122 Determine y clasifique todos los puntos críticos del sistema:

$$\begin{cases} y' &= -3y + yz \\ z' &= z + y^2 \end{cases}.$$

Solución:

Partimos determinando los puntos críticos del sistema haciendo:

$$\begin{aligned} -3y + yz &= 0 \\ z + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación factorizamos y deducimos que $y\left(z-3\right) = 0$. Es decir, si $y = 0$ entonces en la segunda ecuación se deduce que $z = 0$ y si $z = 3$ entonces la segunda ecuación no tiene solución real. Por lo tanto, el único punto crítico es $(0, 0)$. Linealizamos el sistema en torno a este punto:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}\left(y, z\right) = \begin{bmatrix} -3+z & y \\ 2y & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathbf{F}}\left(0, 0\right) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, los valores propios son $\lambda = -3$ y $\lambda = 1$. Como son valores propios reales, distintos, de signos opuestos, concluimos que $(0, 0)$ es un equilibrio tipo <u>punto silla</u> y por lo tanto inestable.

$\square$

P123 Considere el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x' &= e^{y^2} + \alpha x - x^5 - 1 \\ y' &= -\operatorname{sen}\left(x\right) - y^5 \end{aligned}$$

Determine los valores de $\alpha \neq 0$ para los cuales el origen $(0, 0)$ es estable, inestable o asintóticamente estable.

Solución:

Dado que solo nos preguntan el comportamiento del origen, linealizamos solo en torno a dicho punto de operación:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}\left(x, y\right) = \begin{bmatrix} \alpha - 5x^4 & 2ye^{y^2} \\ -\cos\left(x\right) & -5y^4 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathbf{F}}\left(0, 0\right) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, el polinomio característico asociado es

$$\left(\alpha - \lambda\right)\lambda = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = \alpha$$

De esta forma, las soluciones asociadas serán:

$$\mathbf{x}_{\ell}\left(t\right) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 e^{\alpha t}.$$

Observe que solo piden determinar la estabilidad del sistema y no el tipo de punto crítico. Entonces, observamos que si $\alpha = 0$ entonces la solución es constante y por lo tanto estable (pero no asintóticamente estable pues nunca convergerá al origen), si $\alpha > 0$

será inestable pues el segundo termino divergerá y si $\alpha < 0$ el equilibrio será estable (pero no asintóticamente estable).

$\square$

P124 **[Propuesto]** Realice los siguientes pasos para demostrar que las soluciones de ecuaciones de la forma particular $y'' = f(y)$ satisfacen

$$\frac{1}{2}(y')^2 - F(y) = c$$

donde $F(y)$ es una primitiva de $f(y)$.

(a) Haga $v = y'$ y escriba $y'' = f(y)$ como un sistema equivalente de primer orden.

(b) Muestre que las soluciones de la ecuación en el plano fase yv para el sistema de la parte (a) satisfacen $v^2 = F(y) + K$. Concluya.

3.2.1. Sistemas Hamiltonianos

Estamos interesados en estudiar un caso particular de sistemas no lineales, que se conocen como los **Sistemas Hamiltonianos** y cumplen ciertas condiciones que permiten aplicaciones interesantes a nivel físico. Partiremos definiéndolos:

Definición: Un sistema no lineal se dice *hamiltoniano* si existe una función escalar $\mathcal{C}^2$ $\mathcal{H}(x, y)$ tal que:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}[x(t), y(t)] = f[x(t), y(t)],$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}[x(t), y(t)] = g[x(t), y(t)].$$

De existir la función $\mathcal{H}$, esta se conoce como *función hamiltoniana* o *constante de movimiento*.

La primera propiedad interesante de este tipo de sistemas es que una curva solución $[x(t), y(t)]$ de un sistema hamiltoniano puede evaluarse en la función hamiltoniana, obteniendo una función $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$g(t) = \mathcal{H}[x(t), y(t)].$$

Derivando con respecto al tiempo y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Dado que el sistema es hamiltoniano, se cumplirá entonces que:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0.$$

En otras palabras, la curva solución del sistema hamiltoniano mantiene la función hamiltoniana constante en todo punto. Más aún, las curvas solución del sistema serán curvas de nivel de la función hamiltoniana bajo la deducción anterior, pues sus vectores tangentes serán ortogonales a $\vec{\nabla}\mathcal{H}\left(x,y\right)$ (haga el producto punto entre el vector gradiente y $\mathbf{x}'\left(t\right)$ para comprobarlo).

¿Cómo determinar si un sistema es hamiltoniano? Si el sistema es hamiltoniano, entonces existirá una función $\mathcal{C}^2$ que determina la constante de movimiento del sistema. Esta función deberá cumplir el lema de Schwarz, de modo que:

$$\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x\partial y}.$$

Como no sabemos a priori $\mathcal{H}\left(x,y\right)$, debemos escribir esta información en función del sistema dado:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y},\\ \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}$$

Luego, un sistema será hamiltoniano si:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

¿Cómo determinar la constante de movimiento? Puede ser de interés determinar la constante de movimiento en el sistema hamiltoniano, pues de esta forma obtenemos la curvas de nivel en el plano xy que representan las soluciones del sistema. Para ello, basta notar que:

$$f\left(x,y\right) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} \longrightarrow \mathcal{H}\left(x,y\right) = -\int f\left(x,y\right)\mathrm{d}y + c\left(x\right).$$

Derivando nuevamente,

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\int f\left(x,y\right)\mathrm{d}y + c'\left(x\right).$$

Deberá cumplirse que:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int f\left(x,y\right)\mathrm{d}y + c'\left(x\right) = g\left(x\right) \longrightarrow c'\left(x\right) = g\left(x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\int f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$$

Integrando nuevamente,

$$c\left(x\right) = \int\left[g\left(x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\int f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + d.$$

Como nos sirve cualquier función hamiltoniana, podemos hacer arbitrariamente $d = 0$. De esta forma,

$$\boxed{\mathcal{H}\left(x,y\right) = \int\left[g\left(x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\int f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x - \int f\left(x,y\right)\mathrm{d}y}.$$

Más que memorizar esta fórmula se recomienda aplicar el procedimiento seguido en cada problema en particular, siempre y cuando se haya determinado previamente que el sistema es hamiltoniano. De serlo, nunca se encontrarán inconsistencias en este método. De no serlo, el principal problema que puede aparecer es que al despejar $c(x)$ este no sea una función que depende exclusivamente de x. Esto puede ser un indicador de problemas de desarrollo algebraico.

Estabilidad de sistemas hamiltonianos. Dado un punto (x_0, y_0) del sistema hamiltoniano, observamos que este entonces anulará $-\mathcal{H}_y(x,y)$ y $\mathcal{H}_x(x,y)$ simultáneamente. Asimismo, podemos entender este sistema como un caso particular de sistemas no lineales analizados con anterioridad y determinar su comportamiento mediante los mismos procedimientos. En particular, en virtud de la notación utilizada anteriormente, tenemos que:

$$\mathbf{F}(x,y) = (-\mathcal{H}_y, \mathcal{H}_x)$$

Entonces, linealizando:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} -\mathcal{H}_{yx}(x,y) & \mathcal{H}_{yy}(x,y) \\ \mathcal{H}_{xx}(x,y) & \mathcal{H}_{xy}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Como la función es por hipótesis de clase $\mathcal{C}^2$, entonces a la luz del lema de Schwarz tenemos que $\mathcal{H}_{yx} = \mathcal{H}_{xy}$. Asimismo, podemos observar que esta matriz es una transformación lineal de la matriz hessiana de $\mathcal{H}$, la cual denotaremos por $\mathbf{M}(x,y)$. En efecto, se puede notar que:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{H}_{xx}(x,y) & \mathcal{H}_{xy}(x,y) \\ \mathcal{H}_{xy}(x,y) & \mathcal{H}_{yy}(x,y) \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(x,y)}.$$

Es decir, en el punto crítico $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ se tendrá que:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Haciendo $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, se llega así a estudiar el sistema:

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{u}.$$

Observemos un poco la matriz $\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$:

- Esta puede escribirse en general como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

- Sus valores propios se deducen por lo tanto de la ecuación: $(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0$. Expandiendo:

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c) - 4ac + 4b^2}}{2}$$

  Es decir,

$$\boxed{\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}}.$$

- En la expresión anterior los términos dentro de la raíz nunca pueden hacerse negativos, razón por la cual **los valores propios serán siempre reales**.
- Si $b = 0$ y $a = c$ entonces los valores propios son iguales a $\lambda = a$. En dicho caso, la matriz Hessiana es nula y por lo tanto se pueden obtener dos valores propios inmediatamente. Es decir, la matriz $\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$ **es siempre diagonalizable**.
- Se sigue que:
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{PDP}^{-1},$$
donde $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$ y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Como $\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$ es simétrica, entonces por teorema espectral es diagonalizable ortogonalmente, por lo que $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$. Es decir,
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{PDP}^{T}.$$
- Observe que:
$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{(a+c)^2 - (a-c)^2 - 4b^2}{4} = ac - b^2 = |\mathbf{M}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)|.$$
Es decir, el producto de los valores propios puede determinarse inmediatamente a partir del determinante.

Este es el momento en que integramos todas las observaciones con anterioridad, podemos partir notando que la función $\mathcal{H}$ evaluada en la curva solución es constante pues es una curva de nivel. Asimismo, como $\mathcal{H}$ es $\mathcal{C}^2$ podemos obtener su aproximación de Taylor de segundo orden. De esta forma, expandiendo en términos de $\mathbf{u}$:

$$\mathcal{H}[x(t), y(t)] \approx \mathcal{H}(\mathbf{x}_0) + \cancelto{0}{\vec{\nabla}\mathcal{H}(\mathbf{x}_0)} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^t \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} = c$$

Es decir,
$$\mathbf{u}^t \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} = 2[c - \mathcal{H}(\mathbf{x}_0)].$$
Como $\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$ es diagonalizable, entonces:
$$\mathbf{u}^t \mathbf{PDP}^t \mathbf{u} = 2[c - \mathcal{H}(\mathbf{x}_0)].$$
Aplicando la transformación lineal $\mathbf{w} = \mathbf{P}^t \mathbf{u}$, que no es más que expandir y/o rotar cada uno de los ejes, se tendrá entonces que para la curva solución debe cumplirse que:
$$\lambda_1 w_1^2(t) + \lambda_2 w_2^2(t) = 2[c - \mathcal{H}(\mathbf{x}_0)].$$
De aquí podemos desprender que:

- Si λ_1 y λ_2 tienen ambos el mismo signo (o equivalentemente $|\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)| = \lambda_1\lambda_2 > 0$), entonces el comportamiento de $[w_1(t), w_2(t)]$ es elíptico (y por transformación lineal, el de $\mathbf{u}$ lo es en consecuencia). En dicho caso tendremos entonces un centro (estable pero no asintóticamente estable).

- Si λ_1 y λ_2 tienen distinto signo (o equivalentemente $|\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)| = \lambda_1\lambda_2 < 0$), entonces tendremos una hipérbola en $[w_1(t), w_2(t)]$ que también lo será en el sistema de coordenadas de $\mathbf{u}$. Por lo tanto, en este caso tendremos un punto silla, que es inestable.

Observe cómo en este caso las posibilidades de los comportamientos de los puntos críticos se ven reducidas. Asimismo, ponga especial ojo en que es relevante determinar los valores propios de $\mathbf{M}$ y no los de $\mathbf{F}$. Más aún, solo importa determinar el producto de los valores propios y no los valores propios en sí, por lo cual solo basta calcular el determinante de $\mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$ y luego determinar su signo. Cualquiera sea el caso, el análisis se ve sustancialmente simplificado para este tipo de sistemas.

Elaborado este marco teórico podemos resolver sin mayores dificultades los siguientes problemas:

P125 Verifique que el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2xy, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 1 - x^2 - y^2, \end{cases}$$

es hamiltoniano y encuentre una constante de movimiento. Encuentre además sus puntos de equilibrio y decida si son estables o inestables.

Solución:

- Partimos demostrando que el sistema es hamiltoniano. Para ello, derivamos:

$$f(x,y) = 2xy \longrightarrow -\frac{\partial f}{\partial x} = -2y$$

$$g(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$

Luego, como $-\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$, entonces el sistema claramente es hamiltoniano.

- Obtenemos $\mathcal{H}(x,y)$ integrando en primer lugar la primera componente:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -f(x,y) = -2xy \longrightarrow \mathcal{H}(x,y) = -xy^2 + c(x).$$

Es decir,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -y^2 + c'(x) = 1 - x^2 - y^2 \longrightarrow c'(x) = 1 - x^2.$$

Integrando, $c(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$. Con esto concluimos que:

$$\boxed{\mathcal{H}(x,y) = -xy^2 + x - \frac{x^3}{3}}.$$

- Determinamos los puntos de equilibrio resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 2xy &= 0, \\ 1 - x^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

La primera ecuación implica que $x = 0$ ó $y = 0$. Si $x = 0$, entonces en la primera ecuación se deduce que $y = \pm 1$. Si $y = 0$, entonces $x = \pm 1$ análogamente. Los puntos de equilibrio son entonces $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

- Para estudiar la estabilidad de los puntos críticos determinamos la matriz hessiana de $\mathcal{H}(x, y)$:

$$\mathbf{M}(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & -2y \\ -2y & -2x \end{bmatrix}.$$

Luego, evaluamos en cada uno de los puntos y calculamos los respectivos determinantes:

  - $\mathbf{M}(1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow |\mathbf{M}(1, 0)| = 4 > 0 \longrightarrow$ **estable**.
  - $\mathbf{M}(-1, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow |\mathbf{M}(-1, 0)| = 4 > 0 \longrightarrow$ **estable**.
  - $\mathbf{M}(0, -1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow |\mathbf{M}(0, -1)| = -4 > 0 \longrightarrow$ **inestable**.
  - $\mathbf{M}(0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow |\mathbf{M}(0, 1)| = -4 > 0 \longrightarrow$ **inestable**.

□

P126 (a) Demuestre que el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -3y^2 - 3x^2 + 6xy + 3, \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 6xy - 3y^2 - 12x + 3, \end{cases}$$

es hamiltoniano, encuentre una función de Hamilton, halle los puntos de equilibrio y clasifíquelos como estables o inestables.

(b) Demuestre que el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\operatorname{sen} x \cos y, \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \cos x \operatorname{sen} y, \end{cases}$$

es hamiltoniano, encuentre una función de Hamilton, halle los puntos de equilibrio y clasifíquelos como estables o inestables.

Solución:

(a) Procedemos en analogía al problema anterior:

- **Demostrar que el sistema es hamiltoniano.** Se tiene que:

$$f(x,y) = -3y^2 - 3x^2 + 6xy + 3 \longrightarrow -\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y$$

$$g(x,y) = 6xy - 3y^2 - 12x + 3 \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 6x - 6y$$

Es claro que $-\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$, con lo cual el sistema es hamiltoniano.

- **Calcular la función hamiltoniana.** Se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 3y^2 + 3x^2 - 6xy - 3 \longrightarrow \mathcal{H}(x,y) = y^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 3y + c(x).$$

Es decir,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 6xy - 3y^2 + c'(x) = 6xy - 3y^2 - 12x + 3 \longrightarrow c'(x) = -12x + 3.$$

Integrando,

$$c(x) = -6x^2 + 3x.$$

De esta forma,

$$\boxed{\mathcal{H}(x,y) = y^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 3y - 6x^2 + 3x}.$$

- **Determinar puntos de equilibrio.** Para determinar los puntos de equilibrio resolvemos:

$$\begin{aligned} -3y^2 - 3x^2 + 6xy + 3 &= 0, \\ 6xy - 3y^2 - 12x + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Por transitividad se tiene que:

$$-3y^2 - 3x^2 + 6xy + 3 = 6xy - 3y^2 - 12x + 3 \longrightarrow -3x^2 = -12x \longrightarrow x(x-4) = 0.$$

Si $x = 0$ entonces en la primera ecuación se tendrá que $-3y^2 + 3 = 0 \longrightarrow y = \pm 1$. Si $x = 4$, entonces en la primera ecuación se tendrá que$-3y^2 - 48 + 24y + 3 = 0$. Luego, simplificando términos obtenemos así la ecuación de segundo orden:

$$y^2 - 8y - 15 = 0 \longrightarrow (y-3)(y-5) = 0.$$

Es decir, $y = 3$ ó $y = 5$. De esta forma, los puntos críticos son $(0,1)$, $(0,-1)$, $(4,3)$ y $(4,5)$.

- **Clasificación de puntos de equilibrio.** Calculamos la matriz hessiana de $\mathcal{H}$:
$$\mathbf{M}(x,y) = \begin{bmatrix} 6y-12 & 6x-6y \\ 6x-6y & 6y-6x \end{bmatrix}.$$
Evaluamos en cada uno de los puntos y calculamos el determinante.
  - $\mathbf{M}(0,1) = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |\mathbf{M}(0,1)| = -36-36 < 0 \longrightarrow$ **inestable**.
  - $\mathbf{M}(0,-1) = \begin{bmatrix} -18 & 6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow |\mathbf{M}(0,-1)| = 18\cdot 6-36 > 0 \longrightarrow$ **estable**.
  - $\mathbf{M}(4,3) = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow |\mathbf{M}(4,3)| = -36-36 < 0 \longrightarrow$ **inestable**.
  - $\mathbf{M}(4,5) = \begin{bmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |\mathbf{M}(4,5)| = 18\cdot 6-36 > 0 \longrightarrow$ **estable**.

(b) Procedemos por analogía:

- **Demostrar que el sistema es hamiltoniano.** Se tiene que:
$$f(x,y) = -\operatorname{sen} x \cos y \longrightarrow -\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y.$$
$$g(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \cos x \cos y.$$
Es claro que $-\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$, con lo cual el sistema es hamiltoniano.
- **Calcular la función hamiltoniana.** Se tiene que:
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \operatorname{sen} x \cos y \longrightarrow \mathcal{H}(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + c(x).$$
Luego,
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \cos x \operatorname{sen} y + c'(x) = \cos x \operatorname{sen} y \longrightarrow c'(x) = 0 \longrightarrow c(x) = 0.$$
De esta forma,
$$\boxed{\mathcal{H}(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}.$$
- **Determinar puntos de equilibrio.** Se genera el sistema:
$$\operatorname{sen} x \cos y = 0,$$
$$\cos x \operatorname{sen} y = 0.$$
Si $\operatorname{sen} x = 0$, entonces $\cos x = \pm 1$, por lo que en la segunda ecuación necesariamente implica que $\operatorname{sen} y = 0$. De esta forma,
$$\operatorname{sen} x = 0 \longrightarrow \boxed{x = k\pi} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{sen} y = 0 \longrightarrow \boxed{y = n\pi} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

Si $\cos x = 0$, entonces $\operatorname{sen} x = \pm 1$, por lo que la segunda ecuación necesariamente implica que $\cos y = 0$. De esta forma,

$$\cos x = 0 \longrightarrow \boxed{x = \pm\frac{\pi}{2} + 2m\pi} \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos y = 0 \longrightarrow \boxed{y = \pm\frac{\pi}{2} + 2\ell\pi} \quad \text{con } \ell \in \mathbb{Z}.$$

Observe que hemos obtenido infinitos puntos críticos.

- **Clasificación de puntos de equilibrio.** Partimos calculando la matriz hessiana:

$$\mathbf{M}(x,y) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{bmatrix}.$$

Evaluamos en cada uno de los puntos críticos, sin embargo, como estos son infinitos, separamos por casos y buscamos generalidades:

  - Si $x = k\pi$ e $y = n\pi$, entonces las diagonales de la matriz se anulan. Asimismo, $\cos(k\pi) = (-1)^k$ y $\cos(n\pi) = (-1)^n$, de modo que:

$$\mathbf{M}(k\pi, n\pi) = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{k+n} \\ (-1)^{k+n} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow |\mathbf{M}(k\pi, n\pi)| = -(-1)^{2k+2n} = -1 < 0.$$

Por lo tanto, el equilibrio es **inestable** para este tipo de puntos.

  - Si $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2m\pi$ e $y = \pm\frac{\pi}{2} + 2\ell\pi$ se tendrá que las funciones coseno se anulan inmediatamente. Asimismo,

$$\operatorname{sen}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1,$$
$$\operatorname{sen}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1,$$

donde se aplicó la periodicidad de las funciones coseno. Entonces,

$$\mathbf{M}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \pm\frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right) = \begin{bmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left|\mathbf{M}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \pm\frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right)\right| = 1 > 0.$$

Luego, el equilibrio es **estable** para esta familia de puntos.

□

P127 Considere la ecuación diferencial del sistema masa–resorte:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

(a) Determine condiciones sobre m, b y k para que el sistema sea hamiltoniano.

(b) Para las condiciones determinadas en (a), encuentre la función hamiltoniana asociada al sistema.

(c) Determine condiciones para que el sistema sea estable.

Solución:

(a) Lo primero que debemos hacer es escribir la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de primer orden de 2×2 de modo que se puedan aplicar los conocimientos estudiados con anterioridad. En efecto, hacemos:

$$x_1 = x \longrightarrow x_1'(t) = x'(t) = x_2(t)$$
$$x_2 = x' \longrightarrow x_2'(t) = x''(t) = -\frac{b}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x'(t).$$

Es decir, el sistema asociado es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Es claro que:

$$f(x_1, x_2) = x_2 \longrightarrow -\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$
$$g(x_1, x_2) = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x_2} = -\frac{b}{m}.$$

Entonces, se deberá cumplir que $-\frac{b}{m} = 0 \longrightarrow b = 0$ para que el sistema sea hamiltoniano.

(b) Se tendrá que:

$$\mathcal{H}_{x_2}(x_1, x_2) = -x_2 \longrightarrow \mathcal{H}(x_1, x_2) = -x_2^2 + c(x_1).$$

Derivando,

$$\mathcal{H}_{x_1}(x_1, x_2) = c'(x_1) = -\frac{k}{m}x_1,$$

donde desapareció el primer término debido a que $b = 0$. Luego,

$$c(x_1) = -\frac{k}{2m}x_1^2.$$

De esta forma,

$$\boxed{\mathcal{H}(x_1, x_2) = -x_2^2 - \frac{k}{2m}x_1^2}.$$

(c) Calculamos la matriz hessiana de $\mathcal{H}$:

$$\mathbf{M}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -k/m & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es $\frac{k}{m}$ y buscamos entonces que $\frac{k}{m} > 0$ para que el sistema sea estable. Dado que m representa una masa y por lo tanto $m > 0$, esta desigualdad se traduce en $\boxed{k > 0}$, lo cual es perfectamente lograble para sistemas físicos, considerando en particular que k representa la constante de un resorte, de naturaleza positiva.

$\square$